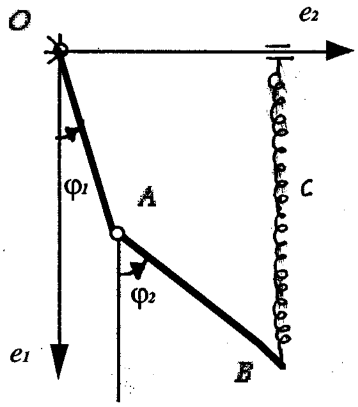
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 14 luglio 2009

(G. Tondo)



Si consideri il modello articolato di figura costituito dalle aste omogenee OA e AB di densità di massa ρ e, rispettivamente, di lunghezza l_1, l_2, incernierate in A e vincolate in O su un piano **verticale** (vincoli lisci e bilateri). Il sistema è soggetto alla forza elastica $\mathbf{F}$ applicata in B, sempre parallela all'asse $\mathbf{e_1}$, ed al peso proprio delle aste.

STATICA.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio del modello e discuterne la stabilità in funzione dei parametri del modello;

2) calcolare le reazioni in O nelle configurazioni di equilibrio;

3) calcolare le reazioni in A nelle configurazioni di equilibrio.

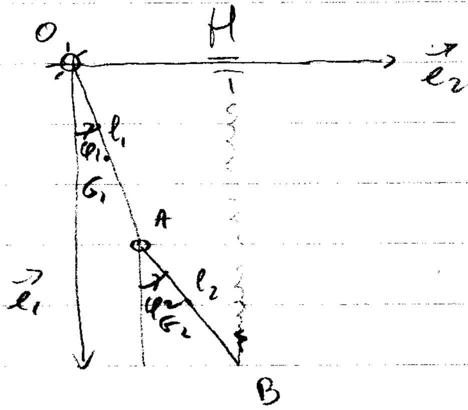
DINAMICA.

4) scrivere due equazioni differenziali pure di moto;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, determinarla in corrispondenza delle condizioni iniziali $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$;

6) calcolare le reazioni vincolari in O durante il moto in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo.

Tema del 14-07-2009



Analisi cinematica

Il modello è il cosiddetto "bipendolo", cioè un modello articolato costituito da 2 aste rigide incernierate e con una delle 2 aste vincolata a terra.
Con il metodo dei congelamenti successivi (2) o con il metodo del bilancio $(l = 3\cdot 2 - (2+2) = 2)$ si dimostra che il modello ha 2 gradi di libertà. Prendiamo come coordinate libere i 2 angoli di figura:

$$-\pi < \varphi_1 \leq \pi \quad e \quad -\pi < \varphi_2 \leq \pi \qquad C_V = S^1 \times S^1 = T^2$$

Statica

Per determinare le configurazioni di equilibrio e poi discuterne la stabilità, utilizziamo l'energia potenziale. Infatti, la sollecitazione attiva sul modello è conservativa, poiché è composta da forze conservative: il peso e la forza elastica in B.

$$(1.1) \quad V(\varphi_1, \varphi_2) = -m_1 \vec{g}\cdot\vec{x}_{G_1} - m_2 \vec{g}\cdot\vec{x}_{G_2} + \frac{1}{2} c\, \overline{BH}^2$$

$$(1.2) \quad \vec{x}_{G_1} = \frac{l_1}{2}\left(\cos\varphi_1 \vec{e}_1 + \sin\varphi_1 \vec{e}_2\right)$$

$$(1.3) \quad \vec{x}_{G_2} = \vec{x}_A + \left(\vec{x}_{G_2} - \vec{x}_A\right) = \left(l_1\cos\varphi_1 + \frac{l_2}{2}\cos\varphi_2\right)\vec{e}_1 + \left(l_1\sin\varphi_1 + \frac{l_2}{2}\sin\varphi_2\right)\vec{e}_2$$

$$\overline{BH}^2 = |\vec{x}_B - \vec{x}_H|^2 = \left(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\right)^2$$

$$m_1 = \rho\, l_1 \quad , \quad m_2 = \rho\, l_2$$

Quindi

$$V(\varphi_1,\varphi_2) = -\rho\, l_1\, g\, \vec{e}_1 \cdot \vec{x}_{G_1} - \rho\, l_2\, g\, \vec{e}_1 \cdot \vec{x}_{G_2} + \frac{1}{2} c \left(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2\right)^2$$

$$(2.1) \qquad = -\rho\, l_1\, g\, \frac{l_1}{2} \cos\varphi_1 - \rho\, l_2\, g \left(l_1 \cos\varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cos\varphi_2\right) + \frac{1}{2} c \left(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2\right)^2$$

$$= -\rho\, g\, l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) \cos\varphi_1 - \rho g \frac{l_2^2}{2} \cos\varphi_2 + \frac{1}{2} c \left(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2\right)^2$$

Cerchiamo ora i punti stazionari della funzione $V(\varphi_1,\varphi_2)$:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = \rho g\, l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) \sin\varphi_1 + c\left(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2\right)\left(-l_1 \sin\varphi_1\right) = -Q_{\varphi_1}$$

(2.2)

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = \rho g \frac{l_2^2}{2} \sin\varphi_2 + c\left(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2\right)\left(-l_2 \sin\varphi_2\right) = -Q_{\varphi_2}$$

Dunque, le eq. pure di equilibrio sono:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \sin\varphi_1 \left[\rho g\, l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) - c\, l_1 \left(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2\right)\right] = 0 \\ \sin\varphi_2 \left[\rho g \frac{l_2^2}{2} - c\, l_2 \left(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2\right)\right] = 0 \end{cases}$$

Il sistema (2.3) equivale ai seguenti 4 sistemi:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \sin\varphi_1 = 0 \\ \sin\varphi_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.5) \quad \begin{cases} \sin\varphi_1 = 0 \\ l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 = \frac{\rho g l_2}{2c} \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 = \frac{\rho g}{c}\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) \\ \sin\varphi_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.7) \quad \begin{cases} l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 = \frac{\rho g}{c}\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) \\ l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 = \frac{\rho g l_2}{2c} \end{cases}$$

Il sistema (2.4) ha 4 soluzioni:

(3.1) $\quad \vec{q}_e^{\,(1)}=(0,0)\ ;\ \vec{q}_e^{\,(2)}=(0,\pi)\ ;\ \vec{q}_e^{\,(3)}=(\pi,0)\ ;\ \vec{q}_e^{\,(4)}=(\pi,\pi)$.

Il sistema (2.7), che è un sistema lineare e non omogeneo nelle incognite $(\cos\varphi_1, \cos\varphi_2)$ ha i lati sinistri delle 2 equazioni uguali. Quindi, ammette (∞^1) soluzioni se e solo se sono uguali i termini noti, cioè se e solo se vale la condizione

(3.2) $$l_1 + l_2 = 0$$

che è, ovviamente, falsa. Quindi, il sistema (2.7) non ammette soluzioni. Restano da risolvere i sistemi (2.5) e (2.6).

Sistema (2.5)

$$\begin{cases} \sin\varphi_1 = 0 \\ l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 = \dfrac{\rho g l_2}{2C} \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{\rho g}{2C} - \dfrac{l_1}{l_2} =: \mu_1 \end{cases} & (3.3) \\ \begin{cases} \varphi_1 = \pi \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{\rho g}{2C} + \dfrac{l_1}{l_2} =: \mu_2 \end{cases} & (3.4) \end{cases}$$

La II eq. del sistema (3.3) ha soluzioni φ_2 tali che:

se $\mu_1 := \dfrac{\rho g}{2C} - \dfrac{l_1}{l_2} > 1$ Nessuna soluzione

se $\mu_1 = 1$ $\quad \varphi_2^{(0)} = 0$

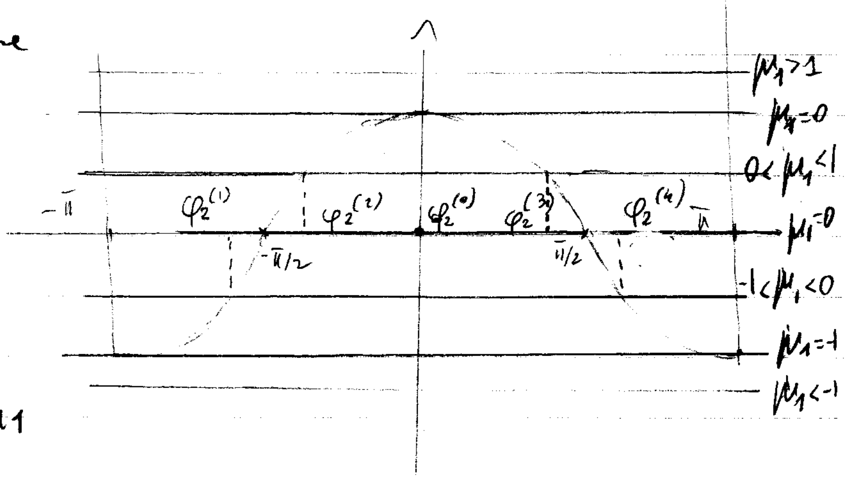
se $0<\mu_1<1$ $\quad$ 2 sol. $\quad \varphi_2^{(2)} = -\varphi_2^{(3)}$, $\ \varphi_2^{(3)} = \arccos\mu_1$

se $\mu_1 = 0$ $\quad$ 2 sol. $\quad \varphi_2 = \pm\dfrac{\pi}{2}$

se $-1<\mu_1<0$ $\quad$ 2 sol. $\quad \varphi_2^{(1)} = -\varphi_2^{(4)}$, $\ \varphi_2^{(4)} = \arccos\mu_1$

se $\mu_1 = -1$ $\quad$ 1 sol. $\quad \varphi_2 = \pi$

se $\mu_1 < -1$ $\quad$ Nessuna soluzione



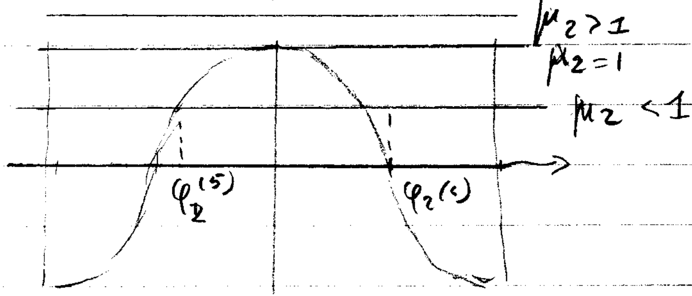
Quindi, il sistema (3.3) determina le seguenti conf. di equilibrio nuove

se $0<\mu_1<1$ $\quad \vec{q}_e^{(5)}=(0,\varphi_2^{(2)})$, $\vec{q}_e^{(6)}=(0,\varphi_2^{(3)})$

se $\mu_1=0$ $\quad = (0,-\frac{\pi}{2})$, $\vec{q}_e$

se $-1<\mu_1<0$ $\quad \vec{q}_e^{(7)}=(0,\varphi_2^{(1)})$, $\vec{q}_e^{(8)}=(0,\varphi_2^{(4)})$

Studiamo, ora, il sistema (3.4). La sua II equazione ha soluzioni:



se $\mu_2:=\frac{\rho g}{2C}+\frac{l_1}{l_2}>1$ Nessuna sol

se $\mu_2=1$ $\quad \varphi_2=0$

se $\mu_2<1$ 2 sol. $\quad \varphi_2^{(5)}=-\varphi_2^{(6)}$, $\quad \varphi_2^{(6)}=\arccos\mu_2$

Dunque, il sistema (3.4) determina le seguenti nuove configuraz. di eq.

(4.1) se $\mu_2<1$ $\quad \vec{q}_e^{(9)}=(\pi,\varphi_2^{(5)})$, $\vec{q}_e^{(10)}=(\pi,\varphi_2^{(6)})$

Consideriamo, ora, il sistema (2.6).

Sistema (2.6)

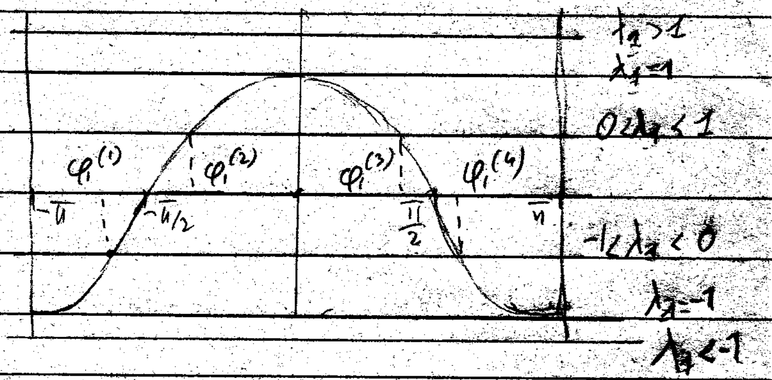
$$\begin{cases} l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2=\frac{\rho g}{C}\left(\frac{l_1}{2}+l_2\right) \\ \sin\varphi_2=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \varphi_2=0 \\ \cos\varphi_1=\frac{\rho g}{C}\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)-\frac{l_2}{l_1} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \varphi_2=\pi \\ \cos\varphi_1=\frac{\rho g}{C}\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)+\frac{l_2}{l_1} \end{cases} \quad (4.3)$$

Studiamo il sistema (4.2).

La II eq. del sistema (4.2) ha soluzioni φ_1 tali che:



se $\lambda_1 := \frac{\rho g}{c}\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)-\frac{l_2}{l_1} > 1$ Nessuna sol.

se $\lambda_1 = 1$ $\quad \varphi_1^{(0)} = 0$

se $0<\lambda_1<1$ $\quad \varphi_1^{(2)} = -\varphi_1^{(3)}$; $\quad \varphi_1^{(3)} = \arccos\lambda_1$

se $\lambda_1 = 0$ $\quad \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}$

se $-1<\lambda_1<0$ $\quad \varphi_1^{(1)} = -\varphi_1^{(4)}$; $\quad \varphi_1^{(4)} = \arccos\lambda_1$

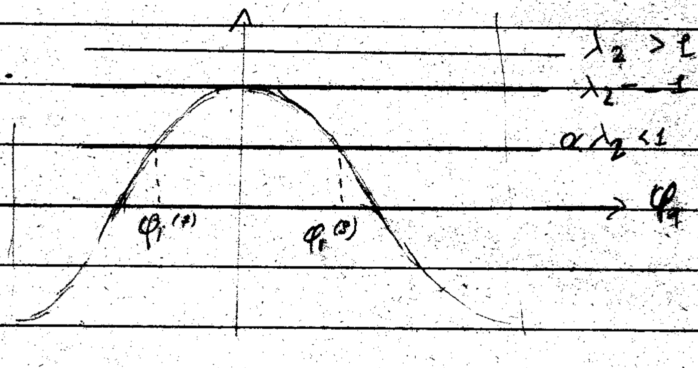
se $\lambda_1<-1$ Nessuna soluzione

Quindi, il sistema (4.2) determina le config. di equil. nuove

se $0<\lambda_1<1$ $\quad \vec{q}_e^{\,(11)} = (\varphi_1^{(2)}, 0)$; $\vec{q}_e^{\,(12)} = (\varphi_1^{(3)}, 0)$

se $-1<\lambda_1<0$ $\quad \vec{q}_e^{\,(13)} = (\varphi_1^{(1)}, 0)$; $\vec{q}_e^{\,(14)} = (\varphi_1^{(4)}, 0)$

. Studiamo il sistema (4.3). La sua II eq. ha soluzioni φ_1 tali che:



se $\lambda_2 := \frac{\rho g}{c}\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)+\frac{l_2}{l_1} > 1$ Nessuna sol.

se $\lambda_2 = 1$ $\quad \varphi_1^{(0)} = 0$

se $0<\lambda_2<1$ 2 sol. $\quad \varphi_1^{(7)} = -\varphi_1^{(8)}$; $\quad \varphi_1^{(8)} = \arccos\lambda_2$

Quindi, il sistema (4.3) aggiunge le seguenti configurazioni di equilibrio:

se $0<\lambda_2<1$ $\quad \vec{q}_e^{\,(15)} = (\varphi_1^{(7)}, \pi)$; $\vec{q}_e^{\,(16)} = (\varphi_1^{(8)}, \pi)$

Ricapitolando, le configurazioni di equilibrio sono:

(6.1) $\vec{q}_e^{(1)} = (0, 0)$; $\vec{q}_e^{(2)} = (0, \bar{u})$; $\vec{q}_e^{(3)} = (\bar{u}, 0)$; $\vec{q}_e^{(4)} = (\bar{u}, \bar{u})$

per ogni valore dei parametri. Inoltre, ci sono

$\vec{q}_e^{(5)} = (0, \varphi_2^{(2)})$; $\vec{q}_e^{(6)} = (0, \varphi_2^{(3)})$ se $0 \le \mu_1 < 1$

$\vec{q}_e^{(7)} = (0, \varphi_2^{(1)})$; $\vec{q}_e^{(8)} = (0, \varphi_2^{(4)})$ se $-1 < \mu_1 \le 0$

(6.2) $\vec{q}_e^{(9)} = (\bar{u}, \varphi_2^{(5)})$; $\vec{q}_e^{(10)} = (\bar{u}, \varphi_2^{(6)})$ se $\mu_2 < 1$

$\vec{q}_e^{(11)} = (\varphi_1^{(2)}, 0)$; $\vec{q}_e^{(12)} = (\varphi_1^{(3)}, 0)$ se $0 \le \lambda_1 < 1$

$\vec{q}_e^{(13)} = (\varphi_1^{(1)}, 0)$; $\vec{q}_e^{(14)} = (\varphi_1^{(4)}, 0)$ se $-1 < \lambda_1 \le 0$

$\vec{q}_e^{(15)} = (\varphi_1^{(7)}, \bar{u})$; $\vec{q}_e^{(16)} = (\varphi_1^{(8)}, \bar{u})$ se $\lambda_2 < 1$

Si osservi che le coppie $(\vec{q}_e^{(7)}, \vec{q}_e^{(8)})$; $(\vec{q}_e^{(9)}, \vec{q}_e^{(10)})$; $(\vec{q}_e^{(11)}; \vec{q}_e^{(12)})$; $(\vec{q}_e^{(13)}, \vec{q}_e^{(14)})$, $(\vec{q}_e^{(15)}, \vec{q}_e^{(16)})$ individuano configurazioni di equilibrio <u>simmetriche</u> rispetto all'asse verticale. Per tale motivo, da ora in poi ci limiteremo a studiare le configurazioni:

(6.3) $\vec{q}_e^{(1)}$; $\vec{q}_e^{(2)}$; $\vec{q}_e^{(3)}$, $\vec{q}_e^{(4)}$; $\vec{q}_e^{(6)}$; $\vec{q}_e^{(8)}$; $\vec{q}_e^{(10)}$, $\vec{q}_e^{(12)}$; $\vec{q}_e^{(14)}$; $\vec{q}_e^{(16)}$,

restando inteso che le configurazioni di equilibrio simmetriche rispetto all'asse verticale hanno le stesse proprietà di stabilità e le stesse reazioni vincolari.

Stabilità

Determiniamo la matrice Hessiana dell'energia potenziale V (2.1). A tal scopo, derivando le (2.2) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} = \rho g l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2\right)\cos\varphi_1 + cl_1\left(-l_1 \cos 2\varphi_1 - l_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2\right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = + c\, l_1 l_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} = \rho g \frac{l_2^2}{2}\cos\varphi_2 + c\, l_2\left(l_1 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - l_2 \cos 2\varphi_2\right)$$

Quindi la matrice Hessiana in una generica configurazione è data da

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \rho g l_1^2\left(\frac{1}{2} + \frac{l_2}{l_1}\right)\cos\varphi_1 - c l_1\left(l_1 \cos 2\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2\right) & c\, l_1 l_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ c\, l_1 l_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 & \rho g \frac{l_2^2}{2}\cos\varphi_2 + \\ & - c l_2\left(l_2 \cos 2\varphi_2 + l_1 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2\right) \end{bmatrix}$$

Valutiamo la matrice Hessiana nella configurazione di eq. (6.3)

$$\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}=(0,0)} = \begin{bmatrix} \rho g l_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)-c l_1(l_1+l_2) & 0 \\ 0 & \rho g \frac{l_2^2}{2} - c l_2(l_1+l_2) \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}}\right)_{11} = c l_1^2\left(\frac{\rho g}{c}\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)-\frac{l_2}{l_1}-1\right) = c l_1^2(\lambda_1-1)$$

$$\det\left(\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}}\right) = c l_1^2(\lambda_1-1)\, c l_2^2\left[\left(\frac{\rho g}{2c}-\frac{l_1}{l_2}\right)-1\right] = c^2 l_1^2 l_2^2(\lambda_1-1)(\mu_1-1)$$

Allora, la configurazione $\vec{q}_e^{(1)}$ è stabile se

$$\lambda_1 > 1 \quad \text{et} \quad \mu_1 > 1 \; ;$$

instabile negli altri casi con $\lambda_1 \neq 1$ e $\mu_1 \neq 1$. Per $\lambda_1 = 1$ vel $\mu_1 = 1$, bisogna considerare i differenziali di ordine superiore.

$$\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}=(0,\pi)} = \begin{bmatrix} \rho g l_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)-c\,l_1(l_1-l_2) & 0 \\ 0 & -\rho g \frac{l_2^2}{2} - c\,l_2(l_2-l_1) \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}}\right)_{11} = c\,l_1^2\left[\frac{\rho g}{c}\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)+\frac{l_2}{l_1}-1\right] = c\,l_1^2\,(\lambda_2-1)$$

$$\det\left(\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}}\right) = c\,l_1^2(\lambda_2-1)\,c\,l_2^2\left[\left(-\frac{\rho g}{2c}+\frac{l_1}{l_2}\right)-1\right] = c^2 l_1^2 l_2^2(\lambda_2-1)(-\mu_1-1)$$

Dunque, la configurazione $\vec{q}_e^{(2)}=(0,\pi)$ è di eq. stabile se

$\lambda_2 > 1$ et $\mu_1 < -1$;

instabile negli altri casi con $\lambda_2 \neq 1$ vel $\mu_1 \neq 1$.

$$\mathcal{H}_{\big|\vec{q}_e^{\,(3)}=(\pi,0)} = \begin{bmatrix} -\rho g\, l_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)-c\,l_1(l_1-l_2) & 0 \\ 0 & \rho g\,\frac{l_2^2}{2}-c\,l_2(l_2-l_1) \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathcal{H}_{\big|\vec{q}_e^{\,(3)}}\right)_{11} = c\,l_1^2\left[-\frac{\rho g}{c}\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)+\frac{l_2}{l_1}-1\right] = c\,l_1^2\left(-\lambda_1-1\right)$$

$$\det \mathcal{H}_{\big|\vec{q}_e^{\,(3)}} = -c\,l_1^2(\lambda_1+1)\; c\,l_2^2\left[\left(\frac{\rho g}{2c}+\frac{l_1}{l_2}\right)-1\right] = -c\,l_1^2 l_2^2(\lambda_1+1)(\mu_2-1)$$

Quindi, la configurazione $\vec{q}_e^{\,(3)}=(\pi,0)$ è di eq. stabile se

(10.1) $\quad \lambda_1 < -1 \quad et \quad \mu_2 > 1$;

instabile negli altri casi in cui $\lambda_1 \neq -1$ vel $\mu_2 \neq 1$.

N.B. Osserviamo che i parametri $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ non possono assumere qualunque valore $\in \mathbb{R}$ poiché sono dipendenti tra loro. Infatti, si possono esprimere in termine di altri 2 parametri, strettamente positivi e indipendenti (di notevole significato fisico), dati da:

(10.2) $\quad a = \frac{\rho g}{2c}, \quad b = \frac{l_2}{l_1}$

Allora

(10.3) $\quad \lambda_1 = a(1+2b)-b\,;\ \lambda_2 = a(1+2b)+b\,;\ \mu_1 = a-\frac{1}{b}\,;\ \mu_2 = a+\frac{1}{b}$.

Ciò comporta, ad esempio, che il sistema di equazioni (10.1) non ammette soluzioni se a e $b \in \mathbb{R}^+$. In definitiva, $\vec{q}_e^{\,(3)}$ è sempre instabile ($\lambda_1 \neq -1$; $\mu_2 \neq 1$)

$$\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(4)}=(\overline{u},\overline{u})} = \begin{bmatrix} -\rho g l_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)-c l_1\left(l_1-l_2\right) & 0 \\ 0 & -\rho g \frac{l_2^2}{2}-c l_2\left(l_2-l_1\right) \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(4)}}\right)_{11} = c l_1^2\left[-\frac{\rho g}{c}\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)+\frac{l_2}{l_1}-1\right] = c l_1^2\left(-\lambda_1-1\right)$$

$$\det\left(\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(4)}}\right) = c l_1^2\left(-\lambda_1-1\right) c l_2^2\left[\left(-\frac{\rho g}{2c}+\frac{l_1}{l_2}\right)-1\right] = c l_1^2\left(-\lambda_1-1\right)\left(-\mu_1-1\right)$$

Allora, la configurazione $\vec{q}_e^{(4)}=(\overline{u},\overline{u})$ è stabile se

(11.1) $\quad \lambda_1 < -1 \quad$ et $\quad \mu_1 < -1$;

instabile negli altri casi in cui $\lambda_1 \neq -1$ vel $\mu_1 \neq -1$

N.B. Anche in questo caso, il sistema (11.1)

$$\begin{cases} \lambda_1 < -1 \\ \mu_1 < -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a(1+2b)-b < -1 \\ a-\frac{1}{b} < -1 \end{cases} \qquad (11.2)$$

non ammette soluzioni per $(a,b)\in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, come si evince da uno studio grafico di (11.2).
Dunque, la configurazione $\vec{q}_e^{(4)}$ è sempre instabile ($\lambda_1 \neq -1$ et $\mu_1 \neq -1$).

Se $0<\mu_1<1$

$$\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(6)}=(0,\varphi_2^{(3)})} = \begin{bmatrix} \rho g l_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)-c\,l_1(l_1+l_2\mu_1) & 0 \\ 0 & \frac{\rho g l_2^2}{2}\mu_1 - c l_2\left(l_2(2\mu_1^2-1)+l_1\mu_1\right) \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\cos\varphi_2^{(3)}=\mu_1 \;;\quad \cos 2\varphi_2^{(3)} = 2\mu_1^2-1$$

Allora

$$\left(\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(6)}}\right)_{11} = c\,l_1^2\left[\frac{\rho g}{2c}\left(1+2\frac{l_2}{l_1}\right)-1-\frac{l_2}{l_1}\mu_1\right] \overset{(10.2)}{\underset{(10.3)}{=}} c\,l_1^2\left[a(1+2b)-1-b\left(a-\frac{1}{b}\right)\right]$$

$$= c\,l_1^2\left[a+2ab\cancel{-1}-ab\cancel{+1}\right] = c\,l_1^2\, a(1+b) > 0$$

poiché a e $b\in\mathbb{R}^+$.

Inoltre,

$$\det \mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(6)}} = \mathcal{H}_{11}\left[\frac{\rho g l_2^2}{2}\mu_1 - c l_2\left(2 l_2\mu_1^2 - l_2 + l_1\mu_1\right)\right] =$$

$$= \mathcal{H}_{11}\, c l_2^2\left[\frac{\rho g}{2c}\mu_1 - \left(2\mu_1^2-1+\frac{l_1}{l_2}\mu_1\right)\right] =$$

$$= c l_2^2\,\mathcal{H}_{11}\left[\mu_1\left(\frac{\rho g}{2c}-\frac{l_1}{l_2}\right)-2\mu_1^2+1\right] =$$

$$= c l_2^2\,\mathcal{H}_{11}\left[\mu_1^2-2\mu_1^2+1\right] = c l_2^2\,\mathcal{H}_{11}(1-\mu_1^2)$$

Allora, poiché $0<\mu_1<1$ segue che $\det\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(6)}}>0$ quindi

$\vec{q}_e^{(6)}$ è stabile

La configurazione $\vec{q_e}^{(5)}$ che simmetrica rs. a $\vec{q_e}^{(6)}$ è anch'essa stabile se $0<\mu_1<1$.

Nella configurazione $\vec{q_e}^{(8)}$ (e nella sua simmetrica $\vec{q_e}^{(7)}$) la matrice Hessiana ha la stessa forma della (12.1').
Quindi,

$$\left(\mathcal{H}_{|\vec{q_e}^{(8)}}\right)_{11} = c l_1^2 a (1+b) > 0 \quad e$$

$$\det \mathcal{H}_{|\vec{q_e}^{(8)}} = c l_2^2 \mathcal{H}_{11} (1-\mu_1^2)$$

Quindi, poiché $-1<\mu_1<0$ segue che $\det \mathcal{H}_{|\vec{q_e}^{(8)}} > 0$, dunque

$$\vec{q_e}^{(8)} \text{ è } \underline{\text{stabile}}.$$

Valutiamo ora $\mathcal{H}$ nella configurazione $\vec{q_e}^{(10)}$ (e nella simmetrica $\vec{q_e}^{(9)}$) che $\exists$ se $\mu_2<1$.

$$\mathcal{H}_{|\vec{q_e}^{(10)} = (\pi, \varphi_2^{(c)})} = \left[\begin{array}{c|c} -\rho g l_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right) - c l_1 (l_1 - l_2\mu_2) & 0 \\ \hline 0 & \rho g \frac{l_2^2}{2}\mu_2 + \\ & - c l_2 \left(l_2 (2\mu_2^2 - 1) - l_1 \mu_2\right) \end{array}\right]$$

$$\left(\mathcal{H}_{|\vec{q_e}^{(10)}}\right)_{11} = c l_1^2 \left[-\frac{\rho g}{2c}\left(1+2\frac{l_2}{l_1}\right) - 1 + \frac{l_2}{l_1}\mu_2\right] =$$

$$\overset{(10.2)}{\underset{(10.3)}{=}} c l_1^2 \left[-a(1+2b) \cancel{-1} + b\left(a + \cancel{\tfrac{1}{b}}\right)\right] =$$

$$= -c l_1^2 a (1+b) < 0 \Rightarrow \underline{\text{instabile}}$$

Se $0<\lambda_1<1$, valutiamo $\mathcal{H}$ in $\vec{q}_e^{(12)}$ ($e\ \vec{q}_e^{(11)}$).

$$\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(12)}=(\varphi_1^{(3)},0)} = \begin{bmatrix} \rho g l_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)\lambda_1 - c l_1\left(l_1\left(2\lambda_1^2-1\right)+l_2\lambda_1\right) & 0 \\ 0 & \rho g \frac{l_2^2}{2} + c l_2^2\left(l_2+l_1\lambda_1\right) \end{bmatrix}$$

(14.1)

$$\left(\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(12)}}\right)_{11} = c l_1^2\left[\frac{\rho g}{2c}\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right)\lambda_1 - 2\lambda_1^2 + 1 - \frac{l_2}{l_1}\lambda_1\right]$$

$$= c l_1^2\left[\lambda_1\left(\frac{\rho g}{2c}\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right)-\frac{l_2}{l_1}\right)+1-2\lambda_1^2\right]$$

$$= c l_1^2\left[\lambda_1^2+1-2\lambda_1^2\right] = c l_1^2\left(1-\lambda_1^2\right)$$

Allora, poiché $0<\lambda_1<1$ segue che $\left(\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(12)}}\right)_{11} > 0$.

Inoltre,

$$\det\left(\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(12)}}\right) = \mathcal{H}_{11}\, c l_2^2\left(\frac{\rho g}{2c} - 1 - \frac{l_1}{l_2}\lambda_1\right) =$$

$$= \mathcal{H}_{11}\, c l_2^2\left(a - 1 - \frac{1}{b}\left[a\left(1+2b\right)-b\right]\right)$$

$$= c l_2^2\,\mathcal{H}_{11}\left(a - \cancel{1} - \frac{a}{b}\left(1+2b\right)+\cancel{1}\right)$$

$$= c l_2^2\,\mathcal{H}_{11}\left(a - \frac{a}{b} - 2a\right) = c l_2^2\,\mathcal{H}_{11}\, a\left(-1-\frac{1}{b}\right) < 0$$

poiché a e $b \in \mathbb{R}^+$.

Quindi, $\vec{q}_e^{(12)}$ è un punto di sella, quindi <u>instabile</u>.

Nella configurazione $\vec{q}_e^{(14)}$ (e $\vec{q}_e^{(13)}$) la matrice $\mathcal{H}$ ha la stessa forma della (14.1). Quindi,

$$\left(\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(14)}}\right)_{11} = c\, l_1^2 \left(1-\lambda_1^2\right).$$

Allora, poichè in $\vec{q}_e^{(14)}$ $-1<\lambda_1<0$ segue che $\left(\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(14)}}\right)_{11} > 0$.
Analogamente,

$$\det \mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(14)}} = -\,c\, l_2^2\, a \left(1+\frac{1}{b}\right) < 0.$$

Dunque, anche $\vec{q}_e^{(14)}$ ($\vec{q}_e^{(13)}$) è <u>instabile</u>.

Infine, se $\lambda_2 < 1$, valutiamo $\mathcal{H}$ in $\vec{q}_e^{(16)}$ ($\vec{q}_e^{(15)}$).

$$\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(16)}=\left(\varphi_1^{(2)},\frac{\pi}{4}\right)} = \begin{bmatrix} \rho g l_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{l_2}{l_1}\right)\lambda_2 - c\, l_1\left(l_1\left(2\lambda_2^2-1\right)-l_2\lambda_2\right) & 0 \\ 0 & -\rho g \frac{l_2^2}{2} + c\, l_2\left(l_2 - l_1\lambda_2\right) \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(16)}}\right)_{11} = c\, l_1^2\left[\frac{\rho g}{2c}\left(1+\frac{2l_2}{l_1}\right)\lambda_2 - \left(2\lambda_2^2-1\right) + \frac{l_2}{l_1}\lambda_2\right] =$$

$$= c\, l_1^2\left[\lambda_2\left[\frac{\rho g}{2c}\left(1+\frac{2l_2}{l_1}\right)+\frac{l_2}{l_1}\right] - 2\lambda_2^2 - 1\right] =$$

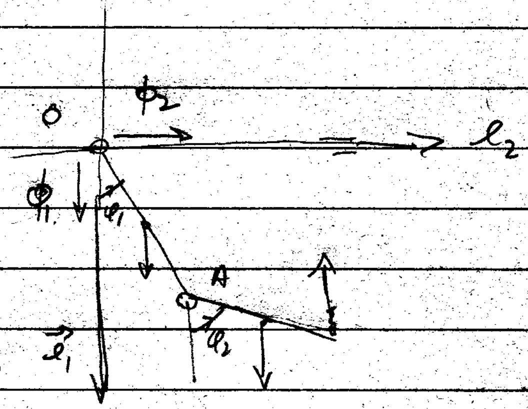
$$= c\, l_1^2\left(\lambda_2^2 - 2\lambda_2^2 - 1\right) = -c\, l_1^2\left(1+\lambda_2^2\right) < 0$$

poichè $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$. Quindi

$\vec{q}_e^{(16)}$ e $\vec{q}_e^{(15)}$ sono <u>instabili</u>.

2) Reazioni vincolari in O

La I ECS applicata a tutto il modello fornisce



$\vec{R}^{est}\cdot\vec{e}_1$: $\phi_1+\rho g(l_1+l_2)-c(l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2)=0$

$\vec{R}^{est}\cdot\vec{e}_2$: $\phi_2=0$

Quindi, le reazioni vincolari in O all'equilibrio sono:

$$\phi_1=-\rho g(l_1+l_2)+c\left(l_1\cos\varphi_1^{(e)}+l_2\cos\varphi_2^{(e)}\right),\quad \phi_2=0$$

Valutiamole nelle configurazioni di equilibrio (6.2) ritrovate:

$$\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(1)}}=-\rho g(l_1+l_2)+c(l_1+l_2)\ ;\ \phi_1\big|_{\vec{q}e^{(3)}}=-\rho g(l_1+l_2)+c(-l_1+l_2)$$

$$\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(2)}}=-\rho g(l_1+l_2)+c(l_1-l_2),\ \phi_1\big|_{\vec{q}e^{(4)}}=-\rho g(l_1+l_2)-c(l_1+l_2)<0$$

$$\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(5)}}=-\rho g(l_1+l_2)+c(l_1+l_2\mu_1)=\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(6)}}=\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(7)}}=\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(8)}}$$

$$\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(9)}}=-\rho g(l_1+l_2)+c(-l_1+l_2\mu_2)=\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(10)}}$$

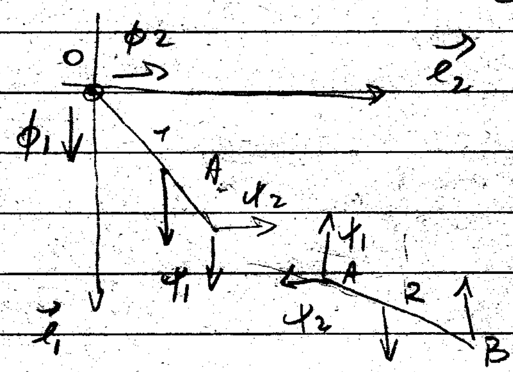
$$\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(11)}}=-\rho g(l_1+l_2)+c(l_1\lambda_1+l_2)=\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(12)}}=\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(13)}}=\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(14)}}$$

$$\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(15)}}=-\rho g(l_1+l_2)+c(l_1\lambda_2-l_2)=\phi_1\big|_{\vec{q}e^{(16)}}$$

e, ovviamente,

$\phi_2=0$ in tutte le configurazioni di equilibrio.

3) Reazioni vincolari in A



Utilizziamo la I ECS applicata alla sola asta 1

$\vec{R}^{\,est\to 1} \cdot \vec{e}_1 : \ \phi_1 + \rho g l_1 + \psi_1 = 0$

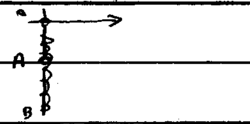
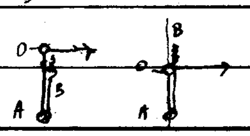
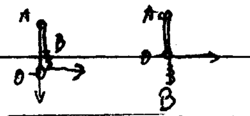
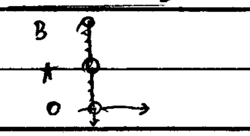
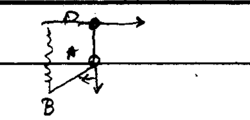
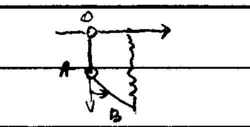
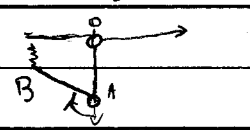
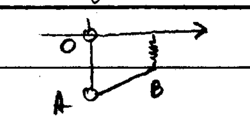
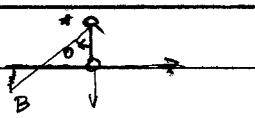
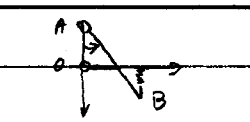
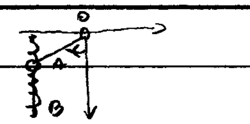
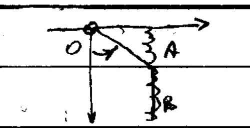
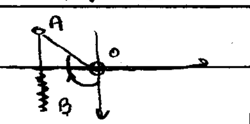
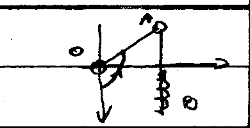
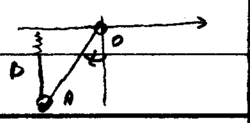
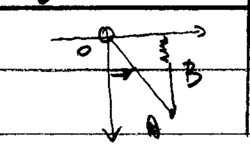
$\vec{R}^{\,est\to 1} \cdot \vec{e}_2 : \ \phi_2 + \psi_2 = 0$

Quindi

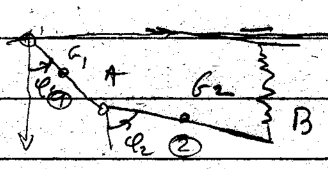
$$(17.1) \qquad \psi_1\big|_{\vec{q}_e} = -\rho g l_1 - \phi_1\big|_{\vec{q}_e} \quad , \quad \psi_2\big|_{\vec{q}_e} = -\phi_2\big|_{\vec{q}_e} = 0 .$$

Perciò, sostituendo nella (17.1) i valori $\phi_1\big|_{\vec{q}_e}$ calcolato alla pagina precedente, si ottiene il risultato cercato

Ricapitolando :

i	$\vec{q}_e^{(i)} = (\varphi_1, \varphi_2)$	Configurazione	Esistenza	Stabilità	Reaz. in O: $\phi_2 = 0$	Reaz. in A: $\psi_2 = 0$
1	$(0, 0)$		sempre	$\begin{cases} \lambda_1 > 1 \\ \mu_1 > 1 \end{cases}$	$\phi_1 = -\rho g (l_1 + l_2) + c(l_1 + l_2)$	$\psi_1 = -\rho g l_1 - \phi_1$
2	$(0, \pi)$		"	$\begin{cases} \lambda_2 > 1 \\ \mu_1 < -1 \end{cases}$	$\phi_1 = -\rho g (l_1 + l_2) + c(l_1 - l_2)$	$\psi_1 =$ "
3	$(\pi, 0)$		"	no	$\phi_1 = -\rho g (l_1 + l_2) + c(-l_1 + l_2)$	$\psi_1 =$ "
4	(π, π)		"	no	$\phi_1 = -\rho g (l_1 + l_2) - c(l_1 + l_2)$	$\psi_1 =$ "
5	$(0, \varphi_2^{(2)})$		$0 < \mu_1 < 1$	sì	$\phi_1 = -\rho g (l_1 + l_2) + c(l_1 + l_2 \mu_1)$	$\psi_1 =$ "
6	$(0, \varphi_2^{(3)})$		"	"	$\phi_1 =$ "	$\psi_1 =$ "
7	$(0, \varphi_2^{(1)})$		$-1 < \mu_1 \leq 0$	sì	$\phi_1 =$ "	$\psi_1 =$ "
8	$(0, \varphi_2^{(4)})$		"	"	$\phi_1 =$ "	$\psi_1 =$ "
9	$(\pi, \varphi_2^{(5)})$		$\mu_2 < 1$	no	$\phi_1 = -\rho g (l_1 + l_2) + c(-l_1 + l_2 \mu_2)$	$\psi_1 =$ "
10	$(\pi, \varphi_2^{(6)})$		"	"	$\phi_1 =$ "	$\psi_1 =$ "
11	$(\varphi_1^{(2)}, 0)$		$0 < \lambda_1 < 1$	no	$\phi_1 = -\rho g (l_1 + l_2) + c(l_1 \lambda_1 + l_2)$	$\psi_1 =$ "
12	$(\varphi_1^{(3)}, 0)$		"	"	$\phi_1 =$ "	$\psi_1 =$ "
13	$(\varphi_1^{(1)}, 0)$		$-1 < \lambda_1 \leq 0$	no	$\phi_1 =$ "	$\psi_1 =$ "
14	$(\varphi_1^{(4)}, 0)$		"	"	$\phi_1 =$ "	$\psi_1 =$ "
15	$(\varphi_1^{(7)}, \pi)$		$\lambda_2 < 1$	no	$\phi_1 = -\rho g (l_1 + l_2) + c(l_1 \lambda_2 - l_2)$	$\psi_1 =$ "
16	$(\varphi_1^{(8)}, \pi)$		"	"	$\phi_1 =$ "	$\psi_1 =$ "

3) Dinamica



Scriviamo le eq. di Lagrange (EL). A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica K del modello.

$$K = K^{(1)} + K^{(2)}$$

$$K^{(1)} = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\varphi}_1^2 \qquad J_{Oz} = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 = \frac{1}{3} \rho l_1^3$$

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{G_2}^{\,2} + \frac{1}{2} J_{G_2 z} \dot{\varphi}_2^2 \qquad m_2 = \rho l_2 \,,\; J_{G_2 z} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 = \frac{\rho l_2^3}{12}$$

(19.1) $$\vec{v}_{G_2} = \dot{\vec{x}}_{G_2} \overset{(1.3)}{=} -\left(l_1 \sin\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{l_2}{2} \sin\varphi_2 \dot{\varphi}_2\right)\vec{e}_1 + \left(l_1 \cos\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{l_2}{2} \cos\varphi_2 \dot{\varphi}_2\right)\vec{e}_2$$

$$\vec{v}_{G_2}^{\,2} = \left(l_1 \sin\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{l_2}{2} \sin\varphi_2 \dot{\varphi}_2\right)^2 + \left(l_1 \cos\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{l_2}{2} \cos\varphi_2 \dot{\varphi}_2\right)^2 =$$

$$= l_1^2 \sin^2\varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \sin^2\varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + l_1 l_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + l_1^2 \cos^2\varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \cos^2\varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + l_1 l_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi \, \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

$$= l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \dot{\varphi}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Dunque,

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} \rho l_2 \left(l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right) + \frac{1}{24} \rho l_2^3$$

$$= \frac{1}{2} \rho l_2 \left(l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{l_2^2}{3} \dot{\varphi}_2^2 + l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right)$$

Allora,

$$K = \frac{1}{2}\left[\rho l_1^2 \left(\frac{l_1}{3} + l_2\right) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{3} \rho l_2^3 \dot{\varphi}_2^2 + \rho l_1 l_2^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right]$$

Equazioni di Lagrange non conservative

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi_1} = \rho l_1^2 \left(\frac{l_1}{3} + l_2\right)\dot\varphi_1 + \frac{1}{2}\rho l_1 l_2^2 \cos(\varphi_2-\varphi_1)\dot\varphi_2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2}\rho l_1 l_2^2 \sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot\varphi_1\dot\varphi_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi_1}\right) = \rho l_1^2 \left(\frac{l_1}{3} + l_2\right)\ddot\varphi_1 + \frac{1}{2}\rho l_1 l_2^2 \left[\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot\varphi_2 - \sin(\varphi_2-\varphi_1)(\dot\varphi_2-\dot\varphi_1)\dot\varphi_2\right]$$

Quindi,

$$\text{IEL: } \rho l_1^2\left(\frac{l_1}{3}+l_2\right)\ddot\varphi_1 + \frac{1}{2}\rho l_1 l_2^2\left[\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot\varphi_2 - \sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot\varphi_2^2 + \cancel{\sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot\varphi_1\dot\varphi_2} + \right.$$
$$\left. - \cancel{\frac{1}{2}\rho l_1 l_2^2 \sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot\varphi_1\dot\varphi_2} = Q_{\varphi_1}\right.$$

Tenuto conto delle (2.20), si trova:

$$\text{IEL: } \rho l_1^2\left(\frac{l_1}{3}+l_2\right)\ddot\varphi_1 + \frac{1}{2}\rho l_1 l_2^2\left[\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot\varphi_2 - \sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot\varphi_2^2\right] =$$
$$= -\rho g l_1\left(\frac{l_1}{2}+l_2\right)\sin\varphi_1 + c\, l_1 \sin\varphi_1 (l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)$$

Inoltre,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi_2} = \frac{1}{3}\rho l_2^3\dot\varphi_2 + \frac{1}{2}\rho l_1 l_2^2 \cos(\varphi_2-\varphi_1)\dot\varphi_1$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi_2} = -\frac{1}{2}\rho l_1 l_2^2 \sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot\varphi_1\dot\varphi_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi_2}\right) = \frac{1}{3}\rho l_2^3\ddot\varphi_2 + \frac{1}{2}\rho l_1 l_2^2\left[\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot\varphi_1 - \sin(\varphi_2-\varphi_1)(\dot\varphi_2-\dot\varphi_1)\dot\varphi_1\right]$$

Dunque,

$$\text{II EL: } \frac{1}{3}\rho\, l_2^3\, \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\rho\, l_1 l_2^2 \left[\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 - \cancel{\sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2} + \sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\rho\, l_1 l_2^2 \cancel{\sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2} = Q_{\varphi_2}$$

Tenendo conto delle (2.25) si trova:

$$\text{II EL: } \frac{1}{3}\rho\, l_2^3\, \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\rho\, l_1 l_2^2 \left[\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + \sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2\right] =$$

$$= -\rho g \frac{l_2^2}{2}\sin\varphi_2 + c\, l_2 \sin\varphi_2 \left(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\right)$$

4) Il sistema è conservativo, i vincoli sono lisci e indipendenti dal tempo, quindi l'energia meccanica è un integrale primo di moto:

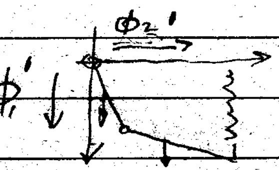
$$E = K+V = \frac{1}{2}\left[\rho\, l_1^2\left(\frac{l_1}{3}+l_2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{3}\rho\, l_2^3\dot{\varphi}_2^2 + \rho\, l_1 l_2^2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \right.$$

$$-\rho g\, l_1\left(\frac{l_1}{2}+l_2\right)\cos\varphi_1 - \rho g\frac{l_2^2}{2}\cos\varphi_2 + \frac{1}{C}\left(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\right)$$

La costante dell'energia è:

$$E|_{t=0} = V(\varphi_1,\varphi_2)|_{t=0} = V\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

6) Reazioni dinamiche in O



La I ECD applicata a tutto il modello si scrive

$$\vec{R}^{est}_{..} = m_1 \ddot{\vec{x}}_{G_1} + m_2 \ddot{\vec{x}}_{G_2}$$

Quindi, proiettando lungo gli assi, si trova:

(22.1) $$\Phi_2' = \rho\left(l_1 \ddot{\vec{x}}_{G_1} + l_2 \ddot{\vec{x}}_{G_2}\right)\cdot \vec{e}_2$$

(22.2) $$\Phi_1' + \rho g(l_1 + l_2) - c(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2) = \rho\left(l_1 \ddot{\vec{x}}_{G_1} + l_2 \ddot{\vec{x}}_{G_2}\right)\cdot\vec{e}_1$$

Tenendo conto delle (1.2) si ha:

$$\dot{\vec{x}}_{G_1} = \frac{l_1}{2}\left(-\sin\varphi_1\dot\varphi_1\vec{e}_1 + \cos\varphi_1\dot\varphi_1\vec{e}_2\right)$$

$$\ddot{\vec{x}}_{G_1} = -\frac{l_1}{2}\left[\left(\sin\varphi_1\ddot\varphi_1 + \cos\varphi_1\dot\varphi_1^2\right)\vec{e}_1 + \left(\cos\varphi_1\ddot\varphi_1 - \sin\varphi_1\dot\varphi_1^2\right)\vec{e}_2\right]$$

Inoltre, dalla (13.1) segue che

$$\ddot{\vec{x}}_{G_2} = \dot{\vec{V}}_{G_2} = -\left[l_1\left(\sin\varphi_1\ddot\varphi_1 + \cos\varphi_1\dot\varphi_1^2\right) + \frac{l_2}{2}\left(\sin\varphi_2\ddot\varphi_2 + \cos\varphi_2\dot\varphi_2^2\right)\right]\vec{e}_1 +$$
$$+\left[l_1\left(\cos\varphi_1\ddot\varphi_1 - \sin\varphi_1\dot\varphi_1^2\right) + \frac{l_2}{2}\left(\cos\varphi_2\ddot\varphi_2 - \sin\varphi_2\dot\varphi_2^2\right)\right]\vec{e}_2$$

Dunque,

$$\Phi_2' = \rho\left[\left(\frac{l_1^2}{2} + l_1 l_2\right)\left(\cos\ddot\varphi_1 - \sin\varphi_1\dot\varphi_1^2\right) + \frac{l_2^2}{2}\left(\cos\varphi_2\ddot\varphi_2 - \sin\varphi_2\dot\varphi_2^2\right)\right]$$

$$\Phi_1' = -\rho g(l_1 + l_2) + c(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2) +$$
$$+\rho\left[-\left(\frac{l_1^2}{2} + l_1 l_2\right)\left(\sin\varphi_1\ddot\varphi_1 + \cos\varphi_1\dot\varphi_1^2\right) - l_1 l_2\left(\sin\varphi_2\ddot\varphi_2 + \cos\varphi_2\dot\varphi_2^2\right)\right]$$