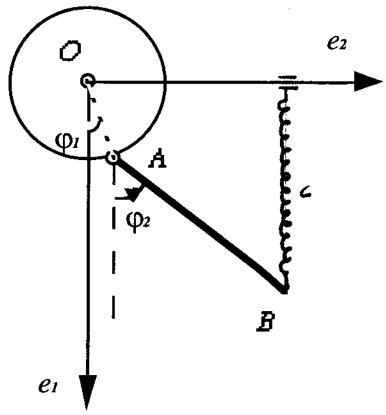
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 14 settembre 2009

(G. Tondo)



Si consideri il modello articolato di figura, costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R, libero di ruotare intorno al suo centro O e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza l, incernierata sulla periferia del disco nel punto A (vincoli lisci e bilateri). Il sistema, posto in un piano **verticale**, è soggetto alla forza $\mathbf{F}$ della molla (di costante elastica c) applicata in B e sempre parallela all'asse $\mathbf{e_1}$, ed è soggetto al peso proprio.

STATICA.

1) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio del modello e discutere la stabilità di quelle presenti per ogni valore dei dei parametri;

2) calcolare le reazioni in O nelle configurazioni di equilibrio;

3) calcolare le reazioni in A nelle configurazioni di equilibrio.

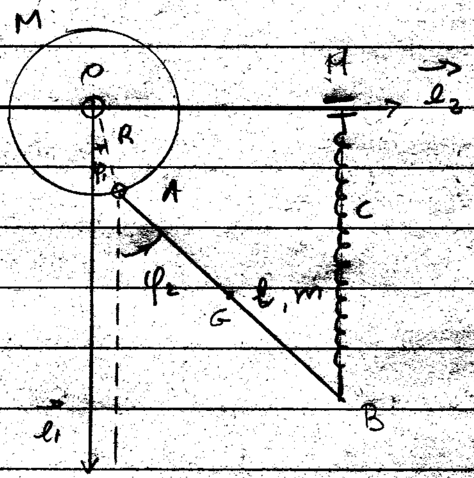
DINAMICA.

4) scrivere due equazioni differenziali pure di moto;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, determinarla in corrispondenza delle condizioni iniziali $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\dot{\varphi_1} = 0$, $\dot{\varphi_1} = 0$;

6) calcolare le reazioni vincolari in O durante il moto in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo.

Tema del 14-09-09



Cinematica

Il sistema è costituito da 2 rigidi vincolati. Il # dei gradi di libertà del modello si calcola facilmente con il metodo dei congelamenti successivi. Infatti:

1) congelo la rotazione del disco attorno al suo centro;
2) congelo la rotazione dell'asta attorno al punto A;

e il modello è congelato del tutto. Quindi

$$g.l = 2, \quad \text{coordinate libere } (\varphi_1, \varphi_2) \qquad \begin{array}{l} -\pi < \varphi_1 \leq \pi \\ -\pi < \varphi_2 \leq \pi \end{array}$$

Statica

Il modello è soggetto a forze conservative (pesi + molla), quindi posso usare l'energia potenziale. Osservo che, essendo il baricentro O del disco fisso, la sua energia potenziale è una costante, quindi la posso trascurare.

(1.1) $$V(\varphi_1, \varphi_2) = -m\vec{g}\cdot\vec{x}_G + \frac{1}{2}c\,\overline{BH}^2$$

(1.2) $$\vec{x}_G = (\vec{x}_A - \vec{x}_O) + (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = \left(R\cos\varphi_1 + \frac{\ell}{2}\cos\varphi_2\right)\vec{e}_1 + \left(R\sin\varphi_1 + \frac{\ell}{2}\sin\varphi_2\right)\vec{e}_2$$

(1.3) $$\vec{x}_B = (\vec{x}_A - \vec{x}_O) + (\vec{x}_B - \vec{x}_A) = (R\cos\varphi_1 + \ell\cos\varphi_2)\vec{e}_1 + (R\sin\varphi_1 + \ell\sin\varphi_2)\vec{e}_2$$

Quindi

$$(2.1)\quad V(\varphi_1,\varphi_2) = -mg\vec{e}_1\cdot\left(R\cos\varphi_1+\frac{l}{2}\cos\varphi_2\right)\vec{e}_1+\frac{1}{2}c\left(R\cos\varphi_1+l\cos\varphi_2\right)^2$$

$$= -mg\left(R\cos\varphi_1+\frac{l}{2}\cos\varphi_2\right)+\frac{1}{2}c\left(R\cos\varphi_1+l\cos\varphi_2\right)^2$$

I punti stazionari di V sono equilibri del sistema. Allora,

$$(2.2)\quad \begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\varphi_1} &= mgR\sin\varphi_1+c\left(R\cos\varphi_1+l\cos\varphi_2\right)\left(-R\sin\varphi_1\right)\\ \frac{\partial V}{\partial\varphi_2} &= mg\frac{l}{2}\sin\varphi_2+c\left(R\cos\varphi_1+l\cos\varphi_2\right)\left(-l\sin\varphi_2\right)\end{aligned}$$

Pertanto, le forze generalizzate sono

$$(2.3)\quad \begin{aligned}Q_{\varphi_1} &= -mgR\sin\varphi_1+cR\sin\varphi_1\left(R\cos\varphi_1+l\cos\varphi_2\right)\\ Q_{\varphi_2} &= -mg\frac{l}{2}\sin\varphi_2+cl\sin\varphi_2\left(R\cos\varphi_1+l\cos\varphi_2\right)\end{aligned}$$

e le equazioni pure di equilibrio

$$(2.4)\quad \begin{cases}R\sin\varphi_1\left(-mg+c\left(R\cos\varphi_1+l\cos\varphi_2\right)\right)=0\\ l\sin\varphi_2\left(-\dfrac{mg}{2}+c\left(R\cos\varphi_1+l\cos\varphi_2\right)\right)=0\end{cases}$$

Il sistema (2.4) è equivalente ai 4 sistemi

(3.1) $\begin{cases} \sin\varphi_1 = 0 \\ \sin\varphi_2 = 0 \end{cases}$ (3.2) $\begin{cases} \sin\varphi_1 = 0 \\ R\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 = \dfrac{mg}{2C} \end{cases}$

(3.3) $\begin{cases} R\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 = \dfrac{mg}{C} \\ \sin\varphi_2 = 0 \end{cases}$ (3.4) $\begin{cases} R\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 = \dfrac{mg}{C} \\ R\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 = \dfrac{mg}{2C} \end{cases}$

Osserviamo subito che il sistema (3.4) non ammette alcuna soluzione. Quindi, risolviamo i sistemi (3.1), (3.2), (3.3)

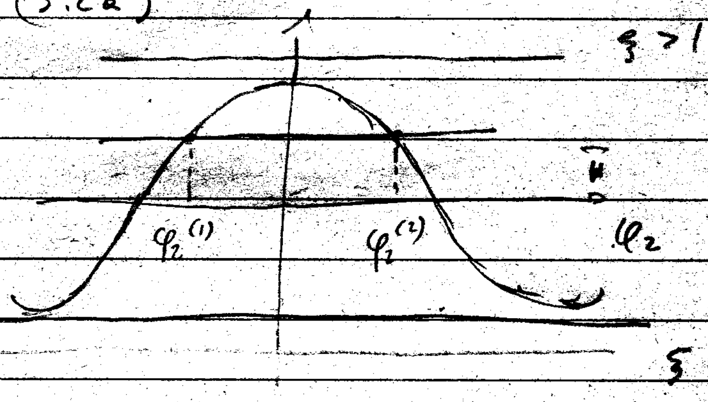
Sistema (3.1) : $\vec{q}_e^{(1)} = (0,0)$, $\vec{q}_e^{(2)} = (0,\pi)$; $\vec{q}_e^{(3)} = (\pi,0)$; $\vec{q}_e^{(4)} = (\pi,\pi)$

Sistema (3.2): equivale ai 2 sistemi

(3.2a) $\begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{1}{l}\left(\dfrac{mg}{2C} - R\right) \end{cases}$ (3.2b) $\begin{cases} \varphi_1 = \pi \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{1}{l}\left(\dfrac{mg}{2C} + R\right) \end{cases}$

Consideriamo la II eq. di (3.2a)

$$\cos\varphi_2 = \frac{mg}{2cl} - \frac{R}{l} =: \xi$$



se $\xi > 1$ $\nexists$ sol

se $|\xi| < 1$ $\varphi_2^{(1)} = -\varphi_2^{(2)}$, $\varphi_2^{(2)} = \arccos\xi$

se $\xi < -1$ $\nexists$ sol

se $\xi = 1$ $\varphi_2 = 0$ (c'è già)

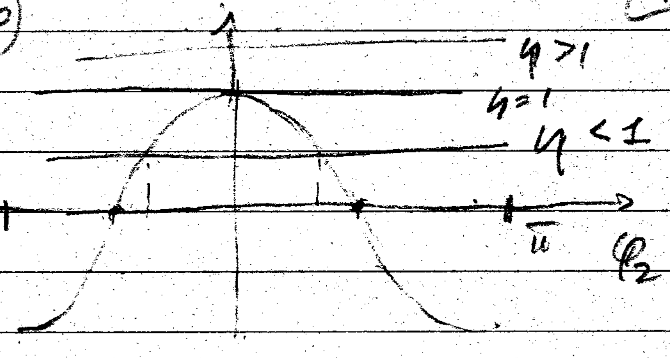
se $\xi = -1$ $\varphi_2 = \pi$ (c'è già)

Nuovi equilibri

$\vec{q}_e^{(5)} = (0, -\arccos\xi)$

$\vec{q}_e^{(6)} = (0, \arccos\xi)$

Consideriamo la II eq di (3.2b)



$$\cos\varphi_2 - \frac{mg}{2cl} + \frac{R}{l} =: \eta > 0$$

se $\eta > 1$ $\nexists$ sol

se $\eta < 1$ $\varphi_2^{(3)} = -\varphi_2^{(4)}$, $\varphi_2^{(4)} = \arccos\eta$

se $\eta = 1$ $\varphi_2 = 0$

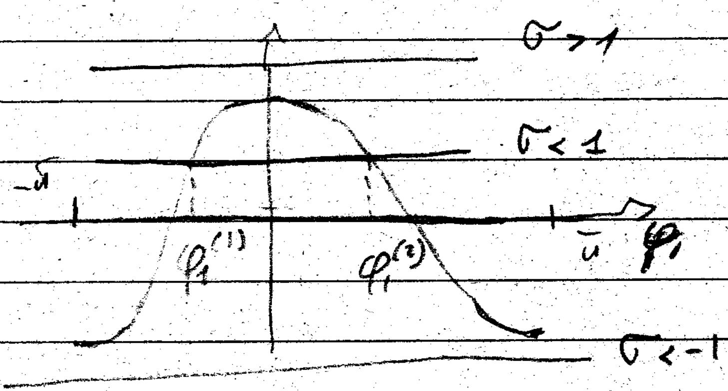
Quindi, i nuovi equilibri sono

$\vec{q}_e^{(7)} = (\pi, -\arccos\eta)$; $\vec{q}_e^{(8)} = (\pi, \arccos\eta)$

Sistema 3.3: equivale ai 2 sistemi

(3.3a) $\begin{cases} \varphi_2 = 0 \\ \cos\varphi_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{mg}{c} - \ell\right) \end{cases}$ (3.3b) $\begin{cases} \varphi_2 = \pi \\ \cos\varphi_1 = \frac{mg}{cR} + \frac{\ell}{R} \end{cases}$

Consideriamo la II eq. di (3.3a)



$$\cos\varphi_1 = \frac{mg}{cR} - \frac{\ell}{R} = \sigma$$

se $\sigma > 1$, $\nexists$ sol.

se $|\sigma| < 1$, $\varphi_1^{(1)} = -\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_1^{(2)} = \arccos\sigma$

se $\sigma < -1$ $\nexists$ sol

se $\sigma = 1$, $\varphi_1 = 0$ (c'è già)

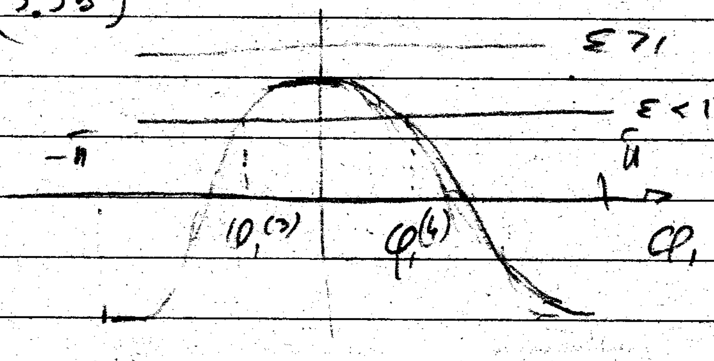
se $\sigma = -1$, $\varphi_1 = \pi$ (c'è già)

Nuovi equilibri:

$\vec{q}_e^{\,(9)} = (-\arccos\sigma, 0)$, $\vec{q}_e^{\,(10)} = (\arccos\sigma, 0)$

Consideriamo la II eq. di (3.3b)

$$\cos\varphi_1 = \frac{mg}{cR} + \frac{l}{R} = \varepsilon > 0$$



se $\varepsilon > 1$, $\nexists$ sol.

se $\varepsilon < 1$, $\varphi_1^{(3)} = -\varphi_1^{(4)}$, $\varphi_1^{(4)} = \arccos\varepsilon$

se $\varepsilon = 1$, $\varphi_1 = 0$ (c'è già)

Nuovi equilibri:

$\vec{q}_e^{\,(11)} = (-\arccos\varepsilon, \pi)$; $\vec{q}_e^{\,(12)} = (\arccos\varepsilon, \pi)$

Ricapitolando, le configurazioni di equilibrio sono:

a) $\vec{q}_e^{(1)} = (0,0)$, $\vec{q}_e^{(2)} = (0,\pi)$; $\vec{q}_e^{(3)} = (\pi,0)$, $\vec{q}_e^{(4)} = (\pi,\pi)$

per qualunque valore dei parametri;

b) $\vec{q}_e^{(5)} = (0, -\arccos\xi)$; $\vec{q}_e^{(6)} = (0, \arccos\xi)$ $\quad |\xi| < 1$

$\vec{q}_e^{(7)} = (\pi, -\arccos\eta)$; $\vec{q}_e^{(8)} = (\pi, \arccos\eta)$ $\quad \eta < 1$

$\vec{q}_e^{(9)} = (-\arccos\sigma, 0)$; $\vec{q}_e^{(10)} = (\arccos\sigma, 0)$ $\quad |\sigma| < 1$

$\vec{q}_e^{(11)} = (-\arccos\varepsilon, \pi)$; $\vec{q}_e^{(12)} = (\arccos\varepsilon, 0)$ $\quad \varepsilon < 1$

Stabilità dell'equilibrio.

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} = mgR\cos\varphi_1 - cR\left[\cos\varphi_1\left(R\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2\right) + \sin\varphi_1\left(-R\sin\varphi_1\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} = mg\frac{l}{2}\cos\varphi_2 - cl\left[\cos\varphi_2\left(R\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2\right) + \sin\varphi_2\left(-l\sin\varphi_2\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = +cRl\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

Calcoliamo la matrice Hessiana nella config. di equilibrio

$$\mathcal{H}\Big|_{\vec{\varphi}_e^{(1)}=(0,0)} = \begin{bmatrix} mgR - cR(R+l) & 0 \\ 0 & mg\frac{l}{2} - cl(R+l) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{11}\Big|_{\vec{\varphi}_e^{(1)}} = R\left(mg - c(R+l)\right) > 0 \iff \frac{mg}{c(R+l)} > 1$$

$$\mathcal{H}_{22}\Big|_{\vec{\varphi}_e^{(1)}} = l\left(\frac{mg}{2} - c(R+l)\right) > 0 \iff \frac{mg}{c(R+l)} > 2$$

Quindi, $\vec{\varphi}_e^{(1)}$ è stabile se $\frac{mg}{c(R+l)} > 2$, è instabile altrimenti,

tranne quando $\frac{mg}{c(R+l)} = 1$ ed $\frac{mg}{c(R+l)} = 2$, che sono casi dubbi.

$$\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}=(0,\pi)} = \begin{bmatrix} mgR - cR(R-\ell) & 0 \\ 0 & -mg\frac{\ell}{2} + c\ell(R-\ell) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{11}\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = R\Big(mg - c(R-\ell)\Big) > 0 \iff \frac{mg}{c(R-\ell)} > 1$$

$$\mathcal{H}_{22}\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = \ell\left(-\frac{mg}{2} + c(R-\ell)\right) > 0 \iff \frac{mg}{c(R-\ell)} < 2$$

Dunque, $\vec{q}_e^{(2)}$ è stabile se

$$1 < \frac{mg}{c(R-\ell)} < 2$$

altrimenti è instabile tranne se $\frac{mg}{c(R-\ell)} = 1$ vel $\frac{mg}{c(R-\ell)} = 2$ (casi dubbi).

$$\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(3)}=(\bar{u},0)} = \begin{bmatrix} -mgR+cR(-R+l) & 0 \\ 0 & \frac{mg}{2}l-cl(-R+l) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{11}\Big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = R\left(-mg+c(l-R)\right)>0 \iff \frac{mg}{c(l-R)}<1$$

$$\mathcal{H}_{22}\Big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = l\left(\frac{mg}{2}-c(l-R)\right)>0 \iff \frac{mg}{c(l-R)}>2$$

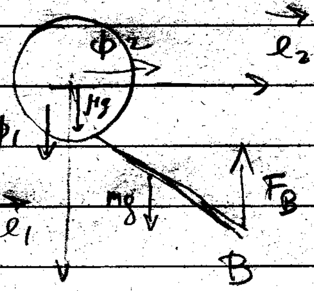
Pertanto, $\vec{q}_e^{(3)}$ è sempre instabile, tranne se $\frac{mg}{c(l-R)}=1$ vel $\frac{mg}{c(l-R)}=2$ (c. dubbi)

$$\mathcal{H}\Big|_{\vec{q}_e^{(4)}=(\bar{u},\bar{u})} = \begin{bmatrix} -mgR-cR(R+l) & \\ & -mg\frac{l}{2}-cl(R+l) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{11}\Big|_{\vec{q}_e^{(4)}} = -R\left(mg+c(R+l)\right)<0 \Rightarrow \vec{q}_e^{(4)} \text{ è sempre instabile.}$$

2) Reazioni in O all'equilibrio

Applichiamo le ECS a tutto il modello



$\vec{R}^{ext}\cdot\vec{e}_1 \qquad \phi_1 + Mg + mg - c(R\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2) = 0$

$\vec{R}^{ext}\cdot\vec{e}_2 \qquad \phi_2 = 0$

Quindi

$$\phi_2 = 0 \quad \forall\, \vec{q}_e$$

$$\phi_1 = -(M+m)g + c\left(R\cos\varphi_1^{(e)} + l\cos\varphi_2^{(e)}\right)$$

Valutiamole nelle configurazioni di equilibrio

$$\phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -(M+m)g + c(R+l) \; ; \quad \phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = -(M+m)g + c(R-l)$$

$$\phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = -(M+m)g + c(-R+l) \; ; \quad \phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(4)}} = -(M+m)g - c(R+l)$$

$$\phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(5)}} = -(M+m)g + c(R + l\xi) \; ; \quad \phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(6)}} = -(M+m)g + c(R + l\xi)$$

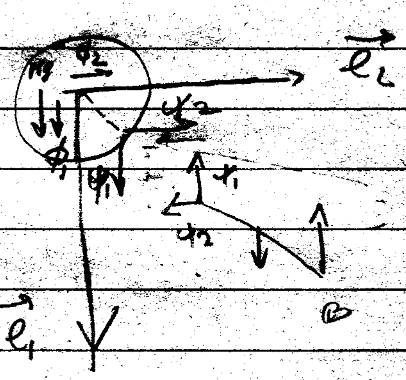
$$\phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(7)}} = -(M+m)g + c(-R + l\eta) \; ; \quad \phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(8)}} = -(M+m)g + c(-R + l\eta)$$

$$\phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(9)}} = -(M+m)g + c(R\sigma + l) \; ; \quad \phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(10)}} = -(M+m)g + c(R\sigma + l)$$

$$\phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(11)}} = -(M+m)g + c(R\varepsilon - l) \; ; \quad \phi_1\big|_{\vec{q}_e^{(12)}} = -(M+m)g + c(R\varepsilon - l)$$

3) Reazioni in A all'equilibrio

Applichiamo le ECS al solo disco



$\vec{R}^{\,\text{est-disco}} \cdot \vec{e}_1 \quad \phi_1 + Mg + \Psi_1 = 0$

$\vec{R}^{\,\text{est-disco}} \to \vec{e}_2 \quad \phi_2 + \Psi_2 = 0$

Quindi

$$\Psi_1 = -Mg - \phi_1 \quad , \quad \Psi_2 = -\phi_2 = 0$$

Valutando la Ψ_1 all'equilibrio, tenendo conto dell(4.1), si ha

$$\Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = mg - c(R+l) \; , \; \Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = mg - c(R-l)$$

$$\Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = mg - c(-R+l) \; , \; \Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(4)}} = mg + c(R+l)$$

$$\Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(5)}} = mg - c(R+l\xi) \; ; \; \Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(6)}} = mg - c(R+l\xi)$$

$$\Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(7)}} = mg - c(-R+l\eta) ; \; \Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(8)}} = mg - c(-R+l\eta)$$

$$\Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(9)}} = mg - c(R\sigma+l) ; \; \Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(10)}} = mg - c(R\sigma+l)$$

$$\Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(11)}} = mg - c(R\varepsilon-l) ; \; \Psi_1\big|_{\vec{q}_e^{(12)}} = mg - c(R\varepsilon-l)$$

Dinamica

Scriviamo le 2 eq. di Lagrange. A tale scopo, calcoliamo

(6.1) $K = K^{(disco)} + K^{(asta)}$

(6.2) $K^{(disco)} = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\varphi}_1^2 \qquad J_{Oz} = \frac{1}{2} M R^2$

(6.3) $K^{(asta)} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{Gz} \dot{\varphi}_2^2 \qquad J_{Gz} = \frac{1}{12} m l^2$

(6.4) $\vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G \overset{(1.2)}{=} -\left(R \sin\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{l}{2} \sin\varphi_2 \dot{\varphi}_2\right)\vec{e}_1 + \left(R\cos\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{l}{2}\cos\varphi_2 \dot{\varphi}_2\right)\vec{e}_2$

$$v_G^2 = \left(R \sin\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{l}{2}\sin\varphi_2 \dot{\varphi}_2\right)^2 + \left(R\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1 + \frac{l}{2}\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2\right)^2$$

$$= R^2 \sin^2\varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{l^2}{4}\sin^2\varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + Rl \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 +$$

$$+ R^2 \cos^2\varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + Rl\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

$$= R^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}_2^2 + Rl\cos(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

Quindi

$$K^{(asta)} = \frac{1}{2} m\left(R^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}_2^2 + Rl\cos(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m l^2 \dot{\varphi}_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(R^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}_2^2 + Rl\cos(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right)$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m R l \cos(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_1} = \left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m R l \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m R l \left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2} m R l \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

I EL:

$$\left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m R l \left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \left(\dot{\varphi}_2^2 - \cancelto{0}{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2}\right)\right] +$$

$$\cancelto{0}{- \frac{1}{2} m R l \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2} = Q_{\varphi_1}$$

$$\left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m R l \left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_2^2\right] = Q_{\varphi_1}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_2} = m \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m R l \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = m \frac{l^2}{3} \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m R l \left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi_2} = - \frac{1}{2} m R l \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

Pertanto,

II EL:

$$m\frac{l^2}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m R l \left[\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 - \sin(\varphi_2-\varphi_1)\left(\cancel{\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2} - \dot{\varphi}_1^2\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} m R l \cancel{\sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2} = Q_{\varphi_2}$$

$$m\frac{l^2}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m R l \left[\cos(\varphi_2-\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + \sin(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2\right] = Q_{\varphi_2}$$

5) Il modello è conservativo, soggetto a vincoli fissi, lisci e bilateri; quindi ammette l'energia meccanica come integrale primo di moto. Pertanto,

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m\frac{l^2}{3}\right)\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m R l \cos(\varphi_2-\varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 +$$

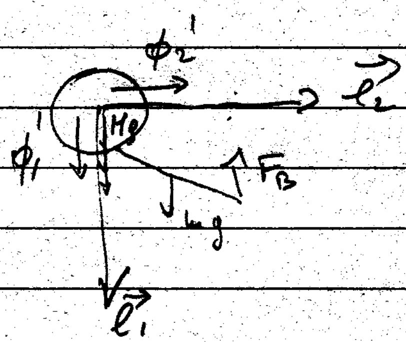
$$- mg\left(R\cos\varphi_1 + \frac{l}{2}\cos\varphi_2\right) + \frac{1}{2} c \left(R\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2\right)^2$$

La costante dell'energia è data da

$$E(0) = V\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

6) Reazioni in O in dinamica

Applichiamo le ECD a tutto il modello



$$R^{est} = \cancel{M\ddot{\vec{x}}_O} + m\ddot{\vec{x}}_G$$

Quindi, proiettando lungo gli assi

$$\phi_1' + (M+m)g - c(R\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2) = m\,\ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_1$$

$$\phi_2' = m\,\ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_2$$

Dalla (6.4), ricaviamo

$$\ddot{\vec{x}}_G = -\left[R\left(\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 + \sin\varphi_1\ddot{\varphi}_1\right) + \frac{l}{2}\left(\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 + \sin\varphi_2\ddot{\varphi}_2\right)\right]\vec{e}_1 +$$
$$+\left[R\left(-\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 + \cos\varphi_1\ddot{\varphi}_1\right) + \frac{l}{2}\left(-\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 + \cos\varphi_2\ddot{\varphi}_2\right)\right]\vec{e}_2$$

Pertanto

$$\phi_1' = -(M+m)g + c(R\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2) - m\left[R\left(\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 + \sin\varphi_1\ddot{\varphi}_1\right) + \frac{l}{2}\left(\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 + \sin\varphi_2\ddot{\varphi}_2\right)\right]$$

$$\phi_2' = m\left[R\left(-\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 + \cos\varphi_1\ddot{\varphi}_1\right) + \frac{l}{2}\left(-\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 + \cos\varphi_2\ddot{\varphi}_2\right)\right]$$

N.B. Si osservi che la reazione ϕ_2' è non nulla, al contrario della ϕ_2 in statica. Infatti, sappiamo che le reazioni in statica sono diverse da quelle in dinamica poiché dobbiamo aggiungere le forze d'inerzia.