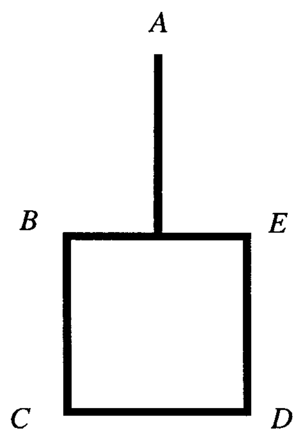
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 15 febbraio 2010

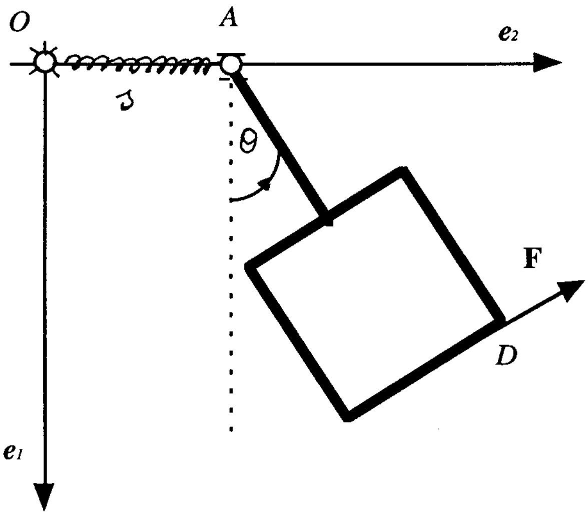
(G. Tondo)



È dato un corpo rigido omogeneo di massa m, formato da un **telaio** quadrato di lato a e da un'asta di lunghezza a, saldata al telaio nel punto medio del lato BE, come in figura.

1) Determinare il baricentro del corpo e il suo momento d'inerzia rispetto ad una diagonale del telaio.

STATICA.



Si vincoli il corpo in un piano **verticale** con una cerniera in A, liscia e scorrevole senza attrito sull'asse orizzontale. Le forze attive sono: il peso proprio del corpo, la forza di richiamo della molla di costante elastica c, collegata all'estremo A, la forza "follower" **F** applicata al vertice D.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari all'equilibrio in A.

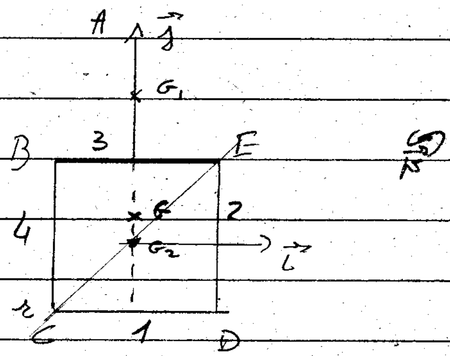
DINAMICA.
Inoltre si chiede di:

4) scrivere due equazioni differenziali pure di moto;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, determinarla;

6) calcolare le reazioni vincolari in A, durante il moto, in funzione delle coordinate libere ed, eventualmente, delle loro derivate rispetto al tempo.

Tema del 15/02/2010



1) Baricentro: utilizziamo la proprietà distributiva, considerando il baricentro dell'asta G_1 in cui concentriamo la massa dell'asta, $m_a = \frac{m}{5}$, e il baricentro del telaio G_2 in cui concentriamo la massa del telaio, $m_t = \frac{4}{5} m$.

Quindi:

$$\vec{x}_G - \vec{x}_P = \frac{\frac{m}{5}(\vec{x}_{G_1} - \vec{x}_P) + \frac{4}{5} m (\vec{x}_{G_2} - \vec{x}_P)}{m}$$

Si noti che la formula suddetta, essendo vettoriale, è indipendente dalla scelta della terna di riferimento. Allora, se per esempio, scelgo la terna $(G_2, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, trovo $(P \equiv G_2)$

$$\vec{x}_G - \vec{x}_{G_2} = \frac{1}{5} a \vec{j} \Rightarrow \vec{x}_G - \vec{x}_r = (\vec{x}_G - \vec{x}_{G_2}) + (\vec{x}_{G_2} - \vec{x}_r) = \frac{1}{5} a \vec{j} - \frac{3}{2} a \vec{j} = \frac{-13}{10} a \vec{j}$$

Momento d'inerzia rispetto ad r

Calcolo la matrice d'inerzia del rigido rs. a G_2, I_{G_2}

$$I_{G_2} = I_{G_2}^{(a)} + I_{G_2}^{(t)} \qquad I_{G_2}^{(a)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}\left(\frac{m}{5}\right)a^2 + \frac{m a^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{60} m a^2 \end{bmatrix}$$

$$I_{G_2}^{(t)} = \begin{bmatrix} I_x^{(t)} & 0 & 0 \\ 0 & I_y^{(t)} & 0 \\ 0 & 0 & I_x^{(t)} + I_y^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x^{(t)} & 0 & 0 \\ 0 & I_x^{(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 2 I_x^{(t)} \end{bmatrix} = m a^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{15} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

poiché

$$I_x^{(t)} = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)} = 2\left(I_x^{(1)} + I_x^{(2)}\right) = 2\left(\frac{m}{5}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \frac{m}{5} a^2\right) = \frac{2}{15} m a^2$$

Quindi,

$$(2.1)\quad \mathbb{I}_{G_2} = ma^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{13}{60}+\frac{2}{15}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{15} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{60} \end{bmatrix}$$

Allora,

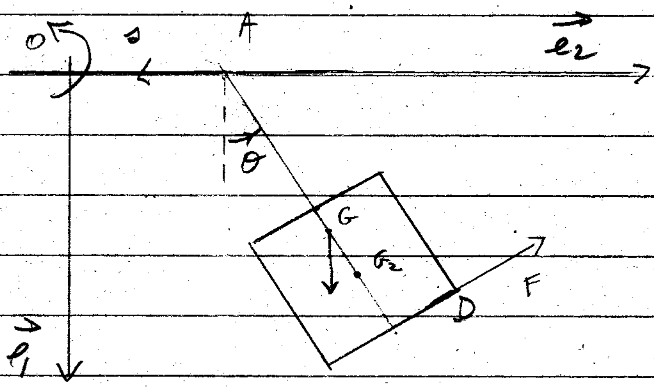
$$(2.2)\quad I_z = \text{vers}(E-G) \cdot \mathbb{I}_{G_2}(\text{vers}(E-G)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]\, ma^2 \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & 0 \\ 0 & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} ma^2 [1,1] \begin{bmatrix} \frac{7}{20} \\ \frac{2}{15} \end{bmatrix} = \frac{29}{120} ma^2$$

<u>Momento d'inerzia I_{Gz}, rispetto ad un asse $\perp$ al piano $(\vec{i},\vec{j})$ e passante per G</u>

$$(2.3)\quad I_{Gz} = I_{G_2 z} - m\,\overline{GG_2}^2 = \frac{29}{60} ma^2 - m\left(\frac{1}{5}a\right)^2 = ma^2\left(\frac{29}{60} - \frac{1}{25}\right) = \frac{133}{300} ma^2$$

2) Statica



Il modello ha 2 g.l.
Scegliamo come coordinate libere l'ascissa del punto A, s e l'angolo θ:
$s \in \mathbb{R}$, $-\pi < \theta \leq \pi$

Per cercare le eventuali configurazioni di equilibrio, utilizziamo il PLV. Poichè il modello è rigido, possiamo scrivere

$$(3.1)\quad LV^{(a\#)} = \vec{R}^{(a\#)} \cdot \delta\vec{x}_A + \vec{M}_A^{(a\#)} \cdot \vec{\chi} \qquad \delta\vec{x}_A = \delta s\,\vec{e}_2,\ \vec{\chi} = \delta\theta\,\vec{e}_3$$

$$(3.2)\quad \vec{R}^{(a\#)} = \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_D \qquad \vec{F}_A = -cs\,\vec{e}_2$$

$$\vec{F}_D = F\vec{e}_3 \times \text{vers}(\vec{x}_G - \vec{x}_A) = F\,\vec{e}_3 \times (\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2) = F(-\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2)$$

$$(3.3)\quad \vec{M}_A^{(a\#)} = (\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times m\vec{g} + (\vec{x}_D - \vec{x}_A) \times \vec{F}_D$$

$$(3.4)\quad (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = \frac{-13}{10} a\,\vec{j} = \frac{13}{10} a\,(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2)$$

$$LV^{(a\#)} = \left(-cs\,\vec{e}_2 + mg\,\vec{e}_1 + F(-\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2)\right) \cdot \delta s\,\vec{e}_2 +$$
$$+ \left[(\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times m\vec{g} + (\vec{x}_D - \vec{x}_A) \times \vec{F}_D\right] \cdot \delta\theta\,\vec{e}_3$$
$$= (-cs + F\cos\theta)\,\delta s +$$
$$+ \left[\frac{13}{10} a(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2) \times mg\,\vec{e}_1 + 2aF\right] \cdot \delta\theta\,\vec{e}_3$$
$$= (-cs + F\cos\theta)\,\delta s + \left(-\frac{13}{10} mga\sin\theta + 2aF\right)\delta\theta$$

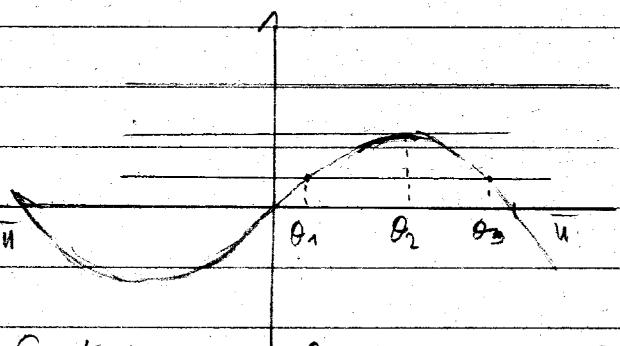
Pertanto, le forze generalizzate sono

$$(4.1)\quad \begin{cases} Q_s = F\cos\theta - c\,s \\ Q_\theta = 2aF - \dfrac{13}{10}\,mga\sin\theta \end{cases},$$

e le eq. pure di equilibrio

$$\begin{cases} (4.2a) & F\cos\theta - c\,s = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \dfrac{F}{c}\cos\theta \\ (4.2b) & 2F - \dfrac{13}{10}\,mg\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \dfrac{20}{13}\dfrac{F}{mg} =: \lambda \end{cases}$$

Risolviamo graficamente la (4.2b).



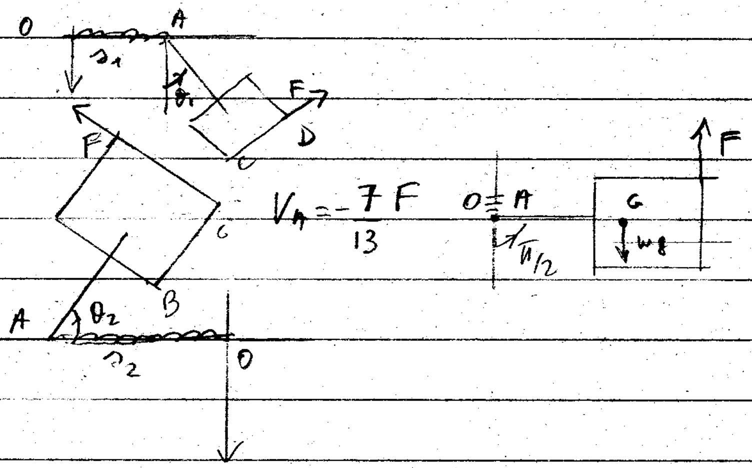
$\lambda > 1$	No sol.	
$\lambda = 1$	1 sol.: $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$	$\cos\theta_2 = 0$
$\lambda < 1$	2 sol.: $\theta_1 = \arcsin\lambda$	$\cos\theta_1 = \sqrt{1-\lambda^2}$
	$\theta_3 = \pi - \theta_1$	$\cos\theta_2 = -\sqrt{1-\lambda^2}$

Sostituendo le soluzioni θ_e nella (4.2a) si trova

$$q_e^{(1)} = \left(\theta_1, \frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}\right)$$

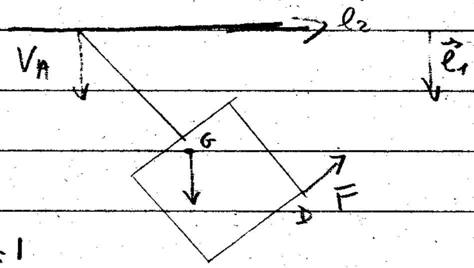
$$q_e^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right),$$

$$q_e^{(3)} = \left(\pi - \theta_1, -\frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}\right)$$



3) Reazioni in A

La cerniera scorrevole senza attrito esercita sul rigido una reazione $\vec{\Phi}_A = V_A\,\vec{e}_1$, che si trova risolvendo



$$\vec{R}^{ext}\cdot e_1: \quad V_A + mg - F\sin\theta_e = 0$$

$$V_A = -mg + F\lambda = F\left(\lambda - \frac{20}{13}\frac{1}{\lambda}\right) < 0 \quad \text{poiché } \lambda \le 1$$

4) Scriviamo le 2 EL non conservative relative alle c.l. (s, θ).
A tale scopo, determiniamo l'energia cinetica K del rigido.

(5.1) $$K = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} \dot{\theta}^2$$

Dal Teo di Poisson segue che

(5.2) $$\vec{V}_G = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = \dot{s}\,\vec{e}_2 + \dot{\theta}\,\vec{e}_3 \times \frac{13}{10} a \left(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right)$$

$$= \dot{s}\,\vec{e}_2 + \frac{13}{10} a \cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_2 - \frac{13}{10} a \sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_1$$

$$= -\frac{13}{10} a \sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_1 + \left(\dot{s} + \frac{13}{10} a \cos\theta\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_2$$

(5.3) $$V_G^2 = \left(\frac{13}{10} a \sin\theta\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(\dot{s} + \frac{13}{10} a \cos\theta\,\dot{\theta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{13}{10}\right)^2 a^2 \underline{\sin^2\theta}\,\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 + \left(\frac{13}{10}\right)^2 a^2 \underline{\cos^2\theta}\,\dot{\theta}^2 + \frac{13}{5} a \cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{s}$$

$$= \dot{s}^2 + \frac{169}{100} a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{13}{5} a \cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{s}$$

Pertanto, tenuto conto della (2.3), si trova

(5.4) $$K = \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{169}{100} a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{13}{5} a \cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{s}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{133}{300} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{32}{15} a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{13}{5} a \cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{s}\right)$$

Quindi, si trova

$$\frac{\partial K}{\partial \dot s} = m\dot s + \frac{13}{10} m a \cos\theta\,\dot\theta \quad ; \quad \frac{\partial K}{\partial s} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot s}\right) = m\ddot s + \frac{13}{10} m a\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right)$$

Tenuto conto delle (4.1), l'EL relativa alla coordinata s è:

(6.1) $$m\ddot s + \frac{13}{10} m a\left(-\sin\theta\,\ddot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right) = F\cos\theta - c s$$

Inoltre,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = \frac{32}{15} m a^2 \dot\theta + \frac{13}{10} m a \cos\theta\,\dot s$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{32}{15} m a^2 \ddot\theta + \frac{13}{10} m a\left(-\sin\theta\,\dot\theta\dot s + \cos\theta\,\ddot s\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{13}{10} m a\left(-\sin\theta\right)\dot s\,\dot\theta$$

Quindi, tenendo conto della (4.1), si trova l'EL relativa a θ

$$\frac{32}{15} m a^2 \ddot\theta + \frac{13}{10} m a\left(\cancel{-\sin\theta\,\dot\theta\, \dot s} + \cos\theta\,\ddot s\right) + \cancel{\frac{13}{10} m a \sin\theta\,\dot s\,\dot\theta} =$$
$$= 2aF - \frac{13}{10} m g a \sin\theta$$

Pertanto,

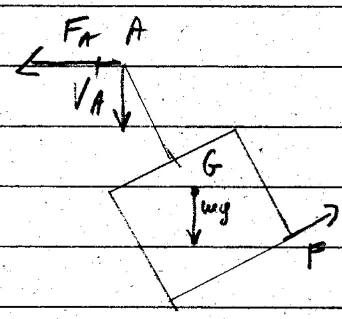
(6.2) $$\frac{32}{15} m a^2 \ddot\theta + \frac{13}{10} m a \cos\theta\,\ddot s = 2aF - \frac{13}{10} m g a \sin\theta$$

5) Controlliamo, prima di tutto, che il modello meccanico sia conservativo, confrontando le derivate seconde miste delle forze lagrangiane (4.1).

$$\frac{\partial Q_s}{\partial \theta} = -F\sin\theta \neq \frac{\partial Q_\theta}{\partial s} = 0$$

Pertanto, il modello NON è conservativo, quindi non ammette energia potenziale

6) Reazioni vincolari in A durante il moto



Dalla I ECD proiettata lungo $\vec{e}_1$, si ha

$$\vec{R}^{ext}\cdot\vec{e}_1 = m\,\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_1$$

$$V'_A + mg - F\sin\theta = m\,\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_1$$

Dalla (5.2) segue che:

$$\ddot{\vec{x}}_G = -\frac{13}{10}a\left(\cos\theta\,\dot\theta^2+\sin\theta\,\ddot\theta\right)\vec{e}_1 + \left(\ddot{s}+\frac{13}{10}a\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2+\cos\theta\,\ddot\theta\right)\right)\vec{e}_2$$

Quindi,

$$V'_A = F\sin\theta - mg - m\frac{13}{10}a\left(\cos\theta\,\dot\theta^2+\sin\theta\,\ddot\theta\right)$$