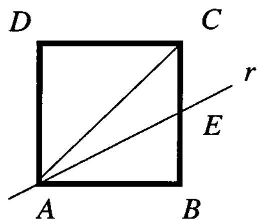
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 19 Febbraio 2009. (G. Tondo)

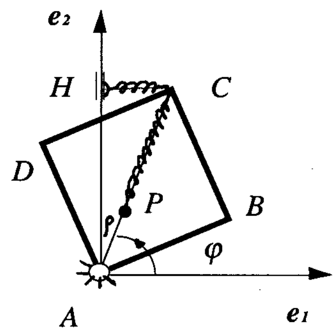


È dato un telaio omogeneo quadrato con i lati di massa m e lunghezza l e la diagonale AC di massa trascurabile.

1) Calcolare il momento d'inerzia del telaio rispetto alla retta r passante per il vertice A e per il punto medio E del lato BC.

STATICA.

Si vincoli il telaio in un piano **verticale** con una cerniera fissa e liscia in A e si ponga un punto materiale P di massa m sulla diagonale AC, libero di scorrervi senza attrito. Le forze attive sono: il peso proprio, le forze di richiamo delle molle applicate in C e di costante elastica c



2) Determinare le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri $\mu = \frac{cl\sqrt{2}}{mg}$, $\lambda = \frac{3\mu}{1+\mu^2}$ e discutere la stabilità di una di esse;

3) calcolare le reazioni vincolari, esterne sul telaio e interne sul punto P, all'equilibrio.

DINAMICA.

Inoltre si chiede di:

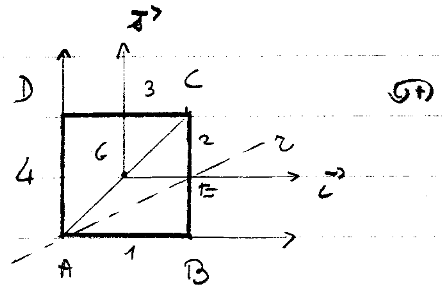
4) scrivere le equazioni pure di moto;

5) scrivere un integrale primo di moto a partire dalle condizioni iniziali:

$$\varphi(0) = 0 \ , \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \ , \qquad \rho(0) = l\sqrt{2} \ , \quad \dot{\rho}(0) = 0.$$

6) calcolare le reazioni vincolari, esterne sul telaio e interne sul punto P, durante il moto.

Compito del 19/02/2009



1) Calcolo di I_r.

Calcoliamo la matrice d'inerzia I_G rispetto alla terna $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ che è una TPI(G) per ragioni di simmetria materiale.

$$I_G = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_x + J_y \end{bmatrix} \qquad J_y = J_x \Rightarrow J_z = 2 J_x$$

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} + J_x^{(3)} + J_x^{(4)} = 2\left(J_x^{(1)} + J_x^{(2)}\right) = 2\left(m\frac{l^2}{4} + \frac{1}{12} m l^2\right)$$

$$= \frac{2}{3} m l^2$$

Dunque:

$$I_G = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Per il teorema di Huygens-Steiner:

$$(11) \quad I_A = I_G + 4m \begin{bmatrix} \frac{l^2}{4} & -l^2/4 & 0 \\ -l^2/4 & \frac{l^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l^2}{2} \end{bmatrix} = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{vers}\left(\vec{x}_E - \vec{x}_A\right) = \left(l\,\vec{i} + \frac{l}{2}\vec{j}\right) \Big/ l\sqrt{5/4} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

$$I_r = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[1, \frac{1}{2}\right] m l^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ -1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{13}{15} m l^2 = \text{vers}(\vec{x}_E - \vec{x}_A) \cdot \mathbb{I}_A\left(\text{vers}(\vec{x}_E - \vec{x}_A)\right)$$

Statica

Il modello costituito dal telaio fissato in A e dal punto P scorrevole lungo la diagonale ha 2 g.l., come si può calcolare con il metodo dei congelamenti successivi.
Come coordinate libere scegliamo l'angolo φ di figura e la distanza ρ di P da A. Quindi lo spazio di configurazione C_v è dato da:

$$(2.1) \qquad C_v =]-\pi, \pi] \times]0, l\sqrt{2}[$$

(Escluse le configurazioni di confine $\rho = 0$, $\rho = l\sqrt{2}$, trattate a parte)

La sollecitazione attiva data dal peso e dalla forza di richiamo delle molle è conservativa. Calcoliamone, quindi, l'energia potenziale $V(\varphi, \rho)$.

$$(2.2) \qquad V(\varphi, \rho) = \frac{1}{2} c\, \overline{CP}^2 - m\vec{g} \cdot \vec{x}_P + \frac{1}{2} c\, \overline{CH}^2 - 4m\vec{g} \cdot \vec{x}_G$$

$$= \frac{1}{2} c \left(l\sqrt{2} - \rho\right)^2 + mg\rho \sin\varphi + \frac{c}{2}\left(l\sqrt{2}\cos\varphi\right)^2 + 4m \frac{l\sqrt{2}}{2} g \sin\varphi$$

$$= \frac{1}{2} c \left(l\sqrt{2} - \rho\right)^2 + \frac{c}{2} 2l^2 \cos^2\varphi + mg \sin\varphi \left(\rho + 2l\sqrt{2}\right)$$

Determiniamone i punti stazionari

$$(2.3) \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -2cl^2 \cos\varphi \sin\varphi + \left(\rho + 2l\sqrt{2}\right) mg \cos\varphi = -Q_\varphi$$

$$(2.4) \qquad \frac{\partial V}{\partial \rho} = -c\left(l\sqrt{2} - \rho\right) + mg \sin\varphi = -Q_\rho$$

Quindi, le eq. pure di equilibrio sono

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \cos\varphi \left(-2cl^2 \sin\varphi + mg\left(\rho + 2l\sqrt{2}\right)\right) = 0 \\ -c\left(l\sqrt{2} - \rho\right) + mg \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema precedente per sostituzione

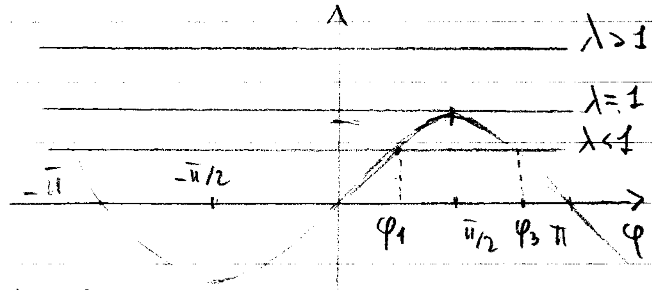
$$\begin{cases} \rho = l\sqrt{2} - \dfrac{mg}{c}\sin\varphi \\[2mm] \cos\varphi\left(-2cl^2\sin\varphi + mg\left(l\sqrt{2} - \dfrac{mg}{c}\sin\varphi\right) + 2mgl\sqrt{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$(3.1)\quad \begin{cases} \rho = l\sqrt{2} - \dfrac{mg}{c}\sin\varphi \\[2mm] \cos\varphi\left(3mgl\sqrt{2} - \left(2cl^2 + \dfrac{m^2g^2}{c}\right)\sin\varphi\right) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzioni

$$(3.2)\quad \cos\varphi = 0 \iff \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \,,$$

$$(3.3)\quad \sin\varphi = \frac{3mgl\sqrt{2}}{2cl^2 + \dfrac{m^2g^2}{c}} = \lambda$$



Sostituendo nella prima si hanno le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\varphi_1,\ l\sqrt{2} - \frac{mg}{c}\lambda\right) \qquad \lambda < \frac{cl\sqrt{2}}{mg} \ \text{ et } \ \lambda < 1$$

$$\vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{\pi}{2},\ l\sqrt{2} - \frac{mg}{c}\right) \qquad 1 < \frac{cl\sqrt{2}}{mg} := \mu$$

$$\vec{q}_e^{\,(3)} = \left(\varphi_3,\ l\sqrt{2} - \frac{mg}{c}\lambda\right) \qquad \lambda < \frac{cl\sqrt{2}}{mg} \ \text{ et } \ \lambda < 1$$

$$\varphi_1 = \arcsin\lambda < \frac{\pi}{2}$$
$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$
$$\varphi_3 = \pi - \varphi_1$$

N.B. La soluzione della II equazione (3.1), $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, fornisce $\rho = l\sqrt{2} + \frac{mg}{c} > l\sqrt{2} \notin \,]0, l\sqrt{2}[$, dunque un punto che non appartiene a C_V. Quindi, per ora, è da scartare ma è da ridiscutere tenendo conto del vincolo unilatero $0 \le \rho \le d$.

N.B Nel caso di $\vec{q}_e^{(1)}$ e $\vec{q}_e^{(2)}$ devono essere soddisfatte simultaneamente le disequazioni

$$(4.1)\quad \begin{cases} \lambda < 1 \\ \lambda < \dfrac{c\, l\sqrt{2}}{mg} := \mu \end{cases}$$

Tenendo conto che $\lambda = \dfrac{3\mu}{1+\mu^2}$ si può concludere che le due disequazioni sono entrambe verificate se e solo se

$$(4.2)\quad \mu > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

In tal caso, quindi, esistono $\vec{q}_e^{(1)}$ e $\vec{q}_e^{(3)}$.

N.B. Il vincolo $0 \leq \rho \leq l\sqrt{2}$ è un vincolo unilatero. Quindi, dobbiamo studiare separatamente le configurazioni di confine che corrispondono a $\rho = 0$ e $\rho = l\sqrt{2}$, in cui il modello ha 1 solo g.l. ma 2 spostamenti virtuali indipendenti (configurazioni labili), dei quali uno è irreversibile:

$$(4.3)\quad \begin{array}{l} \text{se } \rho = 0\text{, } \delta\varphi \text{ è arbitrario, } \delta\rho \geq 0 \\ \text{se } \rho = l\sqrt{2}\text{, } \delta\varphi \text{ è arbitrario, } \delta\rho \leq 0 \end{array}$$

Calcoliamo il lavoro virtuale per $\rho = 0$ e cerchiamo φ_e:

$$(4.4)\quad LV_{|\rho=0} = \left(Q_\varphi\,\delta\varphi + Q_\rho\,\delta\rho\right)_{|\rho=0} = \left(2c\,l^2\cos\varphi\sin\varphi - 2l\sqrt{2}\,mg\cos\varphi\right)\delta\varphi + \left(c\,l\sqrt{2} - mg\sin\varphi\right)\delta\rho$$

Per il PLV deve essere $LV \leq 0$, che equivale al sistema

$$(4.5)\quad \begin{cases} Q_\varphi = 0 \\ Q_\rho \leq 0 \end{cases} \quad \text{se } \rho = 0$$

La I delle (4.5) equivale a:

(5.1) $\cos\varphi = 0$ OR $\sin\varphi = \frac{2 \ell \sqrt{2}\, m g}{\not{2}\, c \ell^2}$

La II delle (4.5) equivale a:

(5.2) $\sin\varphi \geq \frac{c \ell \sqrt{2}}{m g} = \mu$

Quindi il sistema (4.5) equivale a

$$(5.3)\quad \begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi \geq \mu \end{cases} \quad \text{OR} \quad \begin{cases} \sin\varphi = \frac{2}{\mu} \\ \sin\varphi \geq \mu \end{cases}$$

Il II sistema (5.3) non ha soluzioni mentre il I sistema ammette l'unica soluzione

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ se $\mu \leq 1$

Dunque la configurazione di confine

$\vec{q}_e^{(4)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ è di equilibrio se $\mu \leq 1$

Osserviamo che, se $\mu = 1$, la II eq. delle (4.5) è verificata come uguaglianza e quindi $\vec{q}_e^{(4)}$ esisterebbe anche se il vincolo fosse bilatero ($\vec{\Phi}_P \cdot \vec{e}_y \in \mathbb{R}$). Invece, se $\mu < 1$ la II eq. delle (4.5) è verificata come disuguaglianza, quindi è essenziale che il vincolo sia unilatero affinchè $\vec{q}_e^{(4)}$ sia di equilibrio.

Studiamo ora l'altra configurazione di confine

$$(5.1) \qquad \rho = l\sqrt{2}\ , \quad \delta\varphi \text{ arbitrario}, \quad \delta\rho \le 0$$

Il LV per $\rho = l\sqrt{2}$ è dato da

$$(5.2) \qquad LV_{|\rho = l\sqrt{2}} = \left(Q_\varphi\,\delta\varphi + Q_\rho\,\delta\rho\right)_{|\rho = l\sqrt{2}} = \left(2cl^2\cos\varphi\sin\varphi - 3l\sqrt{2}\,mg\cos\varphi\right)\delta\varphi + \\ - mg\sin\varphi\,\delta\rho$$

le configurazioni di equilibrio sono quelle che soddisfano $LV \le 0$, quindi

$$(5.3) \quad \begin{cases} Q_\varphi = 0 \\ Q_\rho \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(2cl^2\sin\varphi - 3l\sqrt{2}\,mg\right)\cos\varphi = 0 \\ -mg\sin\varphi \ge 0 \end{cases}$$

Il sistema (5.3) equivale a

$$\begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi \le 0 \end{cases} \qquad \text{OR} \qquad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{3l\sqrt{2}\,mg}{2cl^2} \\ \sin\varphi \le 0 \end{cases}$$

Il II sistema non ha soluzioni mentre il I ha l'unica soluzione

$$\varphi_e = -\frac{\pi}{2}.$$

Dunque la configurazione di confine:

$$\vec{q}_e^{\,(5)} = \left(-\frac{\pi}{2}, l\sqrt{2}\right) \text{ è di equilibrio } \forall \mu$$

e sussiste solo in presenza del vincolo unilatero poiché la II eq. delle (5.3) è soddisfatta come disequazione.

Stabilità delle configurazioni di equilibrio

Il sistema ha 2 g.l., quindi per studiare i punti stazionari dell'energia potenziale $V = V(\rho, \varphi)$ calcoliamo la matrice Hessiana. Tenendo conto delle (2.3) e (2.4)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = c \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \rho} = mg \cos\varphi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -2c\ell^2 \cos 2\varphi - \left(\rho + 2\ell\sqrt{2}\right) mg \sin\varphi$$

Riscriviamo tali derivate in termini del parametro $\mu = \frac{c\ell\sqrt{2}}{mg}$.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \frac{mg}{\ell\sqrt{2}} \left(\frac{c\ell\sqrt{2}}{mg}\right) = mg \frac{\mu}{\ell\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \rho} = mg \cos\varphi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \rho} = -mg \left[\frac{2c\ell^2}{mg} \cos 2\varphi + \ell\sqrt{2} \left(\frac{\rho}{\ell\sqrt{2}} + 2 \right) \sin\varphi \right] =$$

$$= -mg \left[\ell\sqrt{2}\, \mu \cos 2\varphi + \ell\sqrt{2} \left(\frac{\rho}{\ell\sqrt{2}} + 2 \right) \sin\varphi \right]$$

$$= -mg\,\ell\sqrt{2} \left[\mu \cos 2\varphi + \left(\frac{\rho}{\ell\sqrt{2}} + 2 \right) \sin\varphi \right]$$

Quindi la matrice Hessiana è:

$$\mathcal{H} = mg \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\ell\sqrt{2}} & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\ell\sqrt{2} \left[\mu \cos 2\varphi + \left(\frac{\rho}{\ell\sqrt{2}} + 2 \right) \sin\varphi \right] \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathcal{H}_{11}}{mg} = \frac{\mu}{\ell\sqrt{2}} > 0 \qquad \forall\ \vec{q}_e$$

Il suo determinante è dato da:

$$\det \mathcal{H} = mg\left(-\frac{\mu}{\cancel{\ell\sqrt{2}}}\cancel{\ell\sqrt{2}}\left[\mu\cos 2\varphi+\left(\frac{\rho}{\ell\sqrt{2}}+2\right)\sin\varphi\right]-\cos^2\varphi\right)=$$

$$=-mg\left[\mu^2\cos 2\varphi+\mu\left(\frac{\rho}{\ell\sqrt{2}}+2\right)\sin\varphi+\cos^2\varphi\right]=$$

$$=-mg\left[\left(1+2\mu^2\right)\cos^2\varphi+\mu\left(\frac{\rho}{\ell\sqrt{2}}+2\right)\sin\varphi-\mu^2\right]=$$

Calcoliamo il $\det\mathcal{H}$ in ogni configurazione di equilibrio ordinaria

$$\det\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(2)}}=-mg\left[\mu\left(3-\frac{1}{\mu}\right)-\mu^2\right]=-mg\left[3\mu-1-\mu^2\right]=mg\left(\mu^2-3\mu+1\right)$$

$$\det\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(1)}}=-mg\left[\left(1+2\mu^2\right)\left(1-\lambda^2\right)+\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\lambda-\mu^2\right]$$

$$=-mg\left[\left(1+2\mu^2\right)\left(1-\lambda^2\right)+\left(3\mu-\lambda\right)\lambda-\mu^2\right]$$

$$=-mg\left(1-\lambda^2+2\mu^2-2\lambda^2\mu^2+3\lambda\mu-\lambda^2-\mu^2\right)$$

$$=-mg\left(1-2\lambda^2+\mu^2-2\lambda^2\mu^2+3\lambda\mu\right)=$$

$$=-mg\left(1+\mu^2-2\lambda^2\left(1+\mu^2\right)+3\mu\lambda\right)=$$

$$=-mg\left(\left(1+\mu^2\right)\left(1-2\frac{(3\mu)^2}{(1+\mu^2)^2}\right)+3\mu\frac{3\mu}{1+\mu^2}\right)=$$

$$=-mg\left(1+\mu^2-\frac{18\mu^2}{1+\mu^2}+\frac{9\mu^2}{1+\mu^2}\right)=$$

$$=-mg\left(1+\mu^2-\frac{9\mu^2}{1+\mu^2}\right)=$$

$$=-mg\,\frac{(1+\mu^2)^2-9\mu^2}{1+\mu^2}=-mg\,\frac{\left(1+\mu^2-3\mu\right)\left(1+\mu^2+3\mu\right)}{1+\mu^2}$$

Studiamo il segno del $\det \mathcal{H}|_{\vec{q}_e^{(2)}}$:

$$\det \mathcal{H}|_{\vec{q}_e^{(2)}} = mg\left(\mu^2 - 3\mu + 1\right) > 0 \quad \text{se} \quad \mu < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ OR } \mu > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Quindi, tenendo conto che $\vec{q}_e^{(2)}$ $\exists$ se $\mu > 1$, si ha che

se $1 < \mu < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\quad \vec{q}_e^{(2)}$ è instabile;

se $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < \mu$ $\quad \vec{q}_e^{(2)}$ è stabile.

Studiamo ora il segno del $\det \mathcal{H}|_{\vec{q}_e^{(1)}} = \det \mathcal{H}|_{\vec{q}_e^{(3)}}$:

$$\det \mathcal{H}|_{\vec{q}_e^{(1)}} > 0 \iff \left(\mu^2 - 3\mu + 1\right)\left(\mu^2 + 3\mu + 1\right) < 0 .$$

Tenendo conto che ci interessano solo i valori $\mu > 0$ possiamo dire che

$$\det \mathcal{H}|_{\vec{q}_e^{(1)}} > 0 \iff \mu^2 - 3\mu + 1 < 0 \iff \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \mu < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Quindi, tenuto conto che per la (4.2) $\vec{q}_e^{(1)}$ e $\vec{q}_e^{(3)}$ esistono se $\mu > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, si ha che

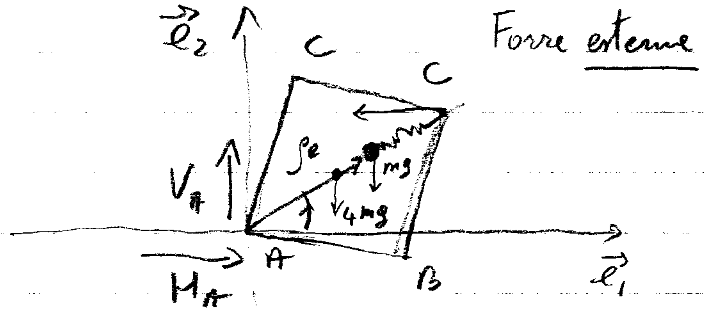
$$\det \mathcal{H}|_{\vec{q}_e^{(1)}} < 0$$

e quindi le configurazioni

$\vec{q}_e^{(1)}$ e $\vec{q}_e^{(3)}$ sono <u>instabili</u>.

Reazioni vincolari all'equilibrio

Per calcolare le reazioni esterne nel telaio, applichiamo la IECS a tutto il modello.



$$\vec{R}^{\,ext \to B} \cdot \vec{e}_1 = 0$$

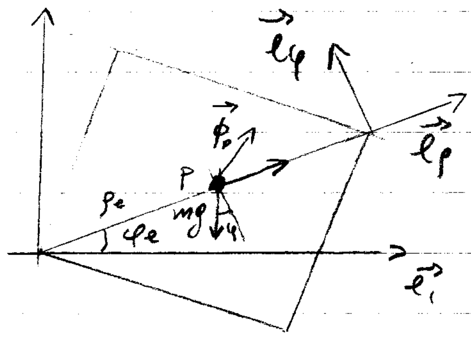
$$\vec{R}^{\,ext \to B} \cdot \vec{e}_2 = 0$$

Quindi le reazioni in A sono date da

$$(10.1)\quad \begin{cases} H_A - c\,l\sqrt{2}\cos\varphi_e = 0 \\ V_A - 5mg = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} H_A = c\,l\sqrt{2}\cos\varphi_e \\ V_A = 5mg \end{array}$$

Calcoliamo ora la reazione vincolare nel punto P, cioè la reazione vincolare interna che tiene il punto P sulla diagonale del telaio, senza fare alcuna ipotesi a-priori sulla sua direzione.

Consideriamo la figura sotto e applichiamo al punto P l'equazione della statica del punto.



$$\vec{R}^{\,,P} = \vec{0}$$

$$(10.2)\quad \begin{cases} \vec{R}^{\,,P} \cdot \vec{e}_\rho = 0 \\ \vec{R}^{\,,P} \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi_\rho + c\left(l\sqrt{2} - \rho_e\right) - mg\sin\varphi_e = 0 \\ \phi_\varphi - mg\cos\varphi_e = 0 \end{cases}$$

Nelle configurazioni ordinarie in cui valgono le equazioni (2.5) si ottiene che

$$(10.3)\quad \begin{cases} \phi_\rho = 0 \\ \phi_\varphi = mg\cos\varphi_e \end{cases} \iff \vec{\phi}_P = mg\cos\varphi_e\,\vec{e}_\varphi$$

Invece, nelle configurazioni di confine il sistema (10.2) diventa rispettivamente:

$\vec{q}_e^{\,(4)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \mu \le 1$

$$\begin{cases} \phi_\rho = mg - c\ell\sqrt{2} \\ \phi_\varphi = 0 \end{cases} \iff \vec{\phi}_P = mg(1-\mu)\,\vec{e}_\rho$$

$\vec{q}_e^{\,(5)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \ell\sqrt{2}\right)$

$$\begin{cases} \phi_\rho = -mg \\ \phi_\varphi = 0 \end{cases} \iff \vec{\phi}_P = -mg\,\vec{e}_\rho$$

Ricapitolando, si ha la situazione seguente.

Configurazioni ordinarie

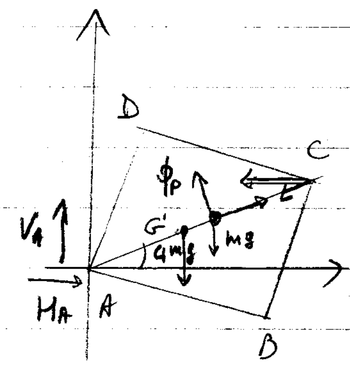
$$\vec{q}_e^{(1)} = \left(\varphi_1,\ l\sqrt{2}\left(1-\frac{3}{1+\mu^2}\right)\right)$$

$\mu > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ instabile

$$H_A = c\,l\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{3\mu}{1+\mu^2}\right)^2}$$

$$V_A = 5mg$$

$$\vec{\phi}_p = mg\sqrt{1-\left(\frac{3\mu}{1+\mu^2}\right)^2}\,\vec{e}_\varphi$$



$$\vec{q}_e^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2},\ l\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right)$$

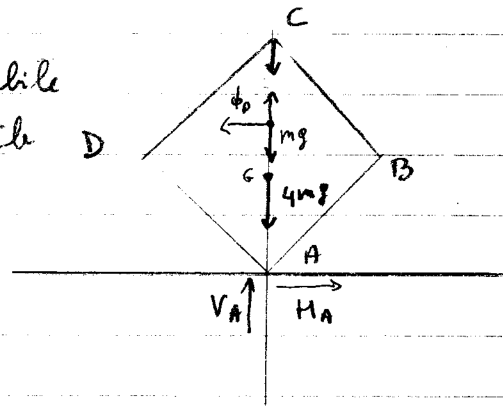
$1 < \mu < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ instabile

$\mu > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ stabile

$$H_A = 0$$

$$V_A = 5mg$$

$$\vec{\phi}_p = 0$$



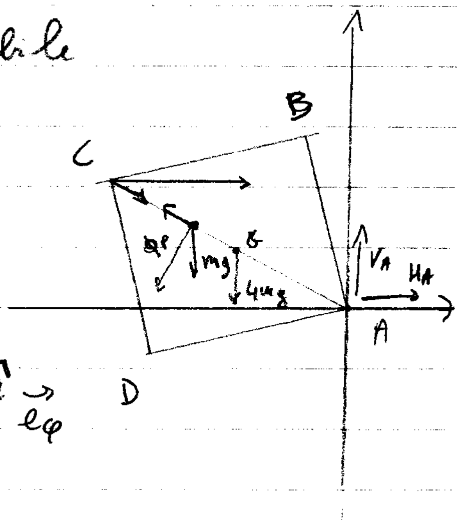
$$\vec{q}_e^{(3)} = \left(\varphi_2,\ l\sqrt{2}\left(1-\frac{3}{1+\mu^2}\right)\right)$$

$\mu > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ instabile

$$H_A = -c\,l\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{3\mu}{1+\mu^2}\right)^2}$$

$$V_A = 5mg$$

$$\vec{\phi}_p = -mg\sqrt{1-\left(\frac{3\mu}{1+\mu^2}\right)^2}\,\vec{e}_\varphi$$

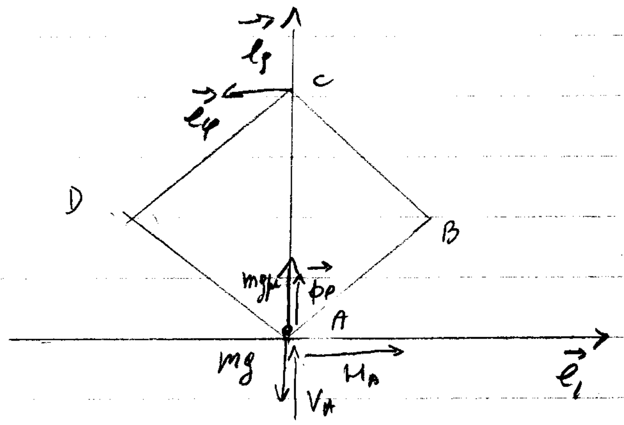


Configurazioni di confine

$\vec{q}_e^{(4)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\mu \leq 1$

$H_A = 0$
$V_A = 5mg$
$\vec{\phi}_p = mg(1-\mu)\vec{e}_\rho$

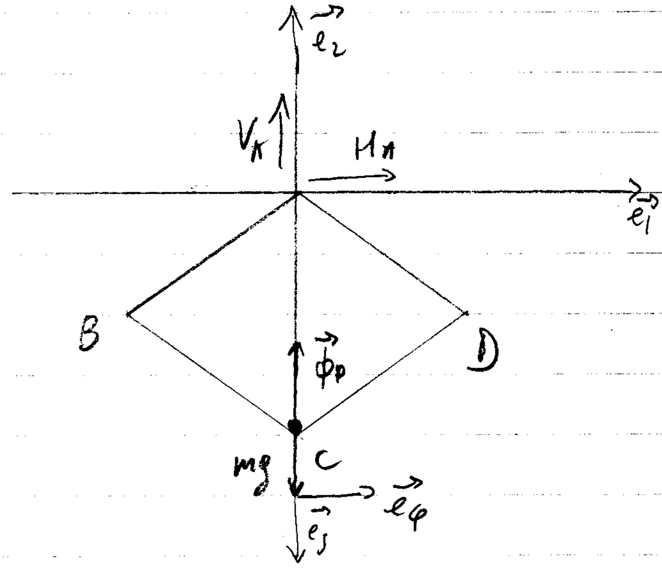


$\vec{q}_e^{(5)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \ell\sqrt{2}\right)$

$\forall \mu$

$H_A = 0$
$V_A = 5mg$

$\vec{\phi}_p = -mg\vec{e}_\rho$



4) Scriviamo le eq. di Lagrange in forma non conservativa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k \qquad k=1,2$$

Calcolo dell'energia cinetica K

$$K^{(B)} = K^{(telaio)} + K^{(P)}$$

$$K^{(telaio)} = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 \qquad I_A \overset{(1.1)}{=} \frac{10}{3} m l^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m v_P^2 \qquad \vec{x}_P = \rho \vec{e}_\rho$$

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{x}}_P = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$v_P^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$K^{(B)} = \frac{1}{2}\left(I_A + m\rho^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} m l^2 + m\rho^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2$$

I EL

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{10}{3} m l^2 + m\rho^2\right)\dot{\varphi} \ ; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left(\frac{10}{3} m l^2 + m\rho^2\right)\ddot{\varphi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}$$

$$\left(\frac{10}{3} m l^2 + m\rho^2\right)\ddot{\varphi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} \overset{(2.3)}{=} \cos\varphi\left(2 c l^2 \sin\varphi - mg\left(\rho + 2l\sqrt{2}\right)\right)$$

II EL

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\rho} = m\dot\rho \; ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\rho}\right) = m\ddot\rho \; ; \quad \frac{\partial K}{\partial \rho} = m\rho\dot\varphi^2$$

$$m\left(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\right) \overset{(2.4)}{=} c\left(l\sqrt{2} - \rho\right) - mg\sin\varphi$$

5) Sappiamo già che il sistema è conservativo, i vincoli sono non dissipativi, fissi e bilateri. Quindi l'energia meccanica si conserva. Calcoliamone il valore a partire dai dati iniziali.

$$E = K + V = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}ml^2 + m\rho^2\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\dot\rho^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}c\left(l\sqrt{2} - \rho\right)^2 + c\,l^2\cos^2\varphi + mg\sin\varphi\left(\rho + 2l\sqrt{2}\right)$$

$$E(t=0) = c\,l^2$$

Quindi, durante il moto vale che:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}ml^2 + m\rho^2\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}c\left(l\sqrt{2} - \rho\right)^2 + c\,l^2\cos^2\varphi + mg\sin\varphi\left(\rho + 2l\sqrt{2}\right) = c\,l^2$$

6) Reazioni vincolari in dinamica

I ECD: $\vec{R}^{\,est,\mathcal{B}} = 4m\ddot{\vec{x}}_G + m\ddot{\vec{x}}_P$

$$\vec{x}_G = \frac{l\sqrt{2}}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) \quad ; \quad \vec{x}_P = \rho\,\vec{e}_\rho = \rho\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$\dot{\vec{x}}_G = \frac{l}{\sqrt{2}}\left(-\sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_2\right) \quad ; \quad \dot{\vec{x}}_P = \left(\dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(\dot\rho\sin\varphi + \rho\dot\varphi\cos\varphi\right)\vec{e}_2$$

$$\ddot{\vec{x}}_G = \frac{l}{\sqrt{2}}\left[\left(-\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - \sin\varphi\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(-\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_2\right] \quad ;$$

$$\ddot{\vec{x}}_P = \left(\ddot\rho\cos\varphi - 2\dot\rho\dot\varphi\sin\varphi - \rho\ddot\varphi\sin\varphi - \rho\dot\varphi^2\cos\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(\ddot\rho\sin\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi\cos\varphi + \rho\ddot\varphi\cos\varphi - \rho\dot\varphi^2\sin\varphi\right)\vec{e}_2$$

Quindi:

$$H_A' - c\,l\sqrt{2}\cos\varphi = 2l\sqrt{2}\,m\left(-\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - \sin\varphi\,\ddot\varphi\right) + m\left[\left(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\right)\cos\varphi - \left(2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi\right)\sin\varphi\right]$$

$$V_A' - 5mg = 2l\sqrt{2}\,m\left(-\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi\right) + m\left[\left(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\right)\sin\varphi + \left(2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi\right)\cos\varphi\right]$$

Cioè:

$$H_A' = \left[c\,l\sqrt{2} - 2l\sqrt{2}\,m\,\dot\varphi^2 + m\left(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\right)\right]\cos\varphi - m\left(2l\sqrt{2}\,\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi\right)\sin\varphi$$

$$V_A' = 5mg + m\left(2l\sqrt{2}\,\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi\right)\cos\varphi + m\left(-2l\sqrt{2}\,\dot\varphi^2 + \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\right)\sin\varphi$$