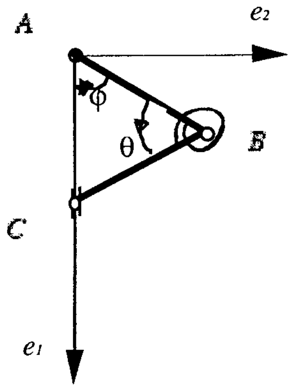
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 18 gennaio 2010

(G. Tondo)



Si consideri il sistema articolato di figura costituito dalle aste omogenee AB e BC, di lunghezza l e massa m, incernierate in B e vincolate in A e in C su un piano **verticale** (vincoli lisci e bilateri). Il sistema è soggetto al peso proprio delle aste e alla **coppia** di richiamo della molla a spirale fissata in B, di costante elastica c e modulo $|M| = c\,|\theta|$, dove θ è l'angolo in B, di apertura tra le due aste.

STATICA.

1) Dimostrare che se $-\pi < \varphi \leq \pi$, per qualunque valore del parametro $\lambda = mg\,l/c$, esiste un'unica configurazione di equilibrio φ_e, tale che $0 < \varphi_e < \pi/2$;

2) dimostrare che φ_e è sempre stabile;

3) calcolare le reazioni vincolari esterne in A e in C nella configurazione di equilibrio.

DINAMICA.

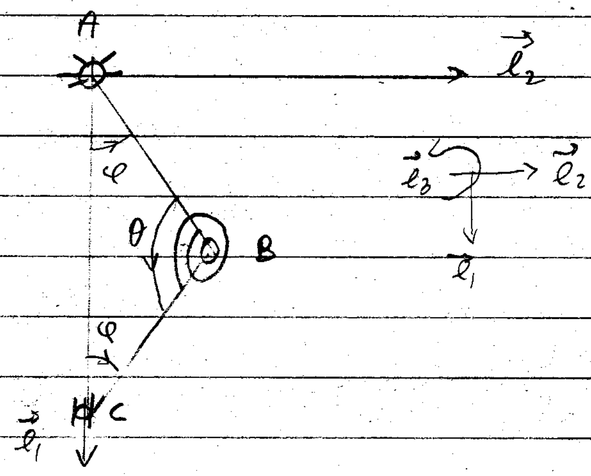
4) scrivere un' equazione differenziale pura di moto;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, calcolarla assegnate le condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$;

6) calcolare le reazioni vincolari esterne in A e in C durante il moto in funzione di φ, a partire dalle condizioni iniziali del punto **5)**.

Tema del 18/01/2010

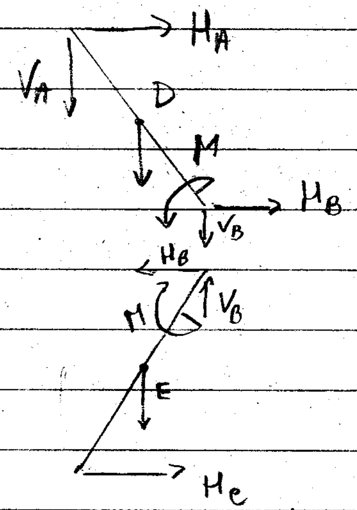
Analisi cinematica: il modello è un sistema biella-manovella, quindi ha 1 g.l. Scegliamo come coordinata libera l'angolo $-\pi < \varphi \leq \pi$



Statica

La sollecitazione esterna è dovuta al peso proprio e alle forze di reazione vincolare in A e in C. La sollecitazione interna è data dalle coppie esercitate dalla molla a spirale e dalle forze di reazione in B. Vale il seguente diagramma

Fig. 1.1



$M = c\,\theta$

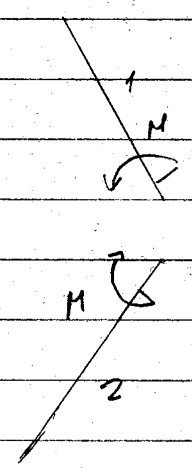
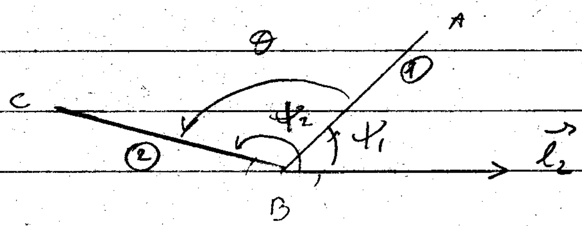


Fig. 1.2

Dimostriamo che la sollecitazione della molla a spirale è conservativa, calcolandone il lavoro virtuale.

$$LV^{(molla)} = LV^{(1)} + LV^{(2)} = \vec{M}^{(1)} \cdot \vec{\chi}^{(1)} + \vec{M}^{(2)} \cdot \vec{\chi}^{(2)} = \vec{M}^{(1)} \cdot \left(\vec{\chi}^{(1)} - \vec{\chi}^{(2)}\right)$$

poiché $\vec{M}^{(2)} = -\vec{M}^{(1)}$ per il principio di azione e reazione.



Se indichiamo con ψ_1 e ψ_2 gli angoli formati dal versore $\vec{e}_2$ con le aste ① e ②, rispettivamente, segue che

$$\psi_2 - \psi_1 = \theta$$

$$\delta\psi_2 - \delta\psi_1 = \delta\theta$$

$$\vec{\chi}^{(1)} = \delta\psi_1 \vec{e}_3$$

$$\vec{\chi}^{(2)} = \delta\psi_2 \vec{e}_3$$

Allora

$$LV^{(molla)} = \vec{M}^{(1)} \cdot \left(\vec{\chi}^{(1)} - \vec{\chi}^{(2)}\right) = \vec{M}^{(1)} \cdot \left(\delta\psi_1 - \delta\psi_2\right)\vec{e}_3 = -\vec{M}^{(1)} \cdot \vec{e}_3\, \delta\theta$$

$$= -c\theta\, \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3\, \delta\theta = -c\theta\delta\theta = \delta\left(-\frac{c\theta^2}{2}\right)$$

Dunque, la sollecitazione della molla a spirale è conservativa ed ammette come energia potenziale

$$V(\theta) = \frac{1}{2}c\theta^2$$

θ: angolo di apertura delle 2 aste.

Pertanto, l'energia potenziale del modello è

$$V(\varphi) = V^{(peso)} + V^{(molla)} = -m\vec{g} \cdot \vec{x}_D - m\vec{g} \cdot \vec{x}_E + \frac{1}{2}c\theta^2$$

$$= -mg\vec{e}_1 \cdot \left[\left(\frac{l}{2}\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \frac{l}{2}\sin\varphi\, \vec{e}_2\right) + \left(\frac{3}{2}l\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \frac{l}{2}\sin\varphi\right)\right] + \frac{1}{2}c\theta^2$$

$$= -2mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}c\left(\pi - 2\varphi\right)^2,$$

poiché $2\varphi + \theta = \pi$

(3.1) $V'(\varphi) = 2mgl\sin\varphi - 2c(\pi - 2\varphi) = -Q_\varphi$

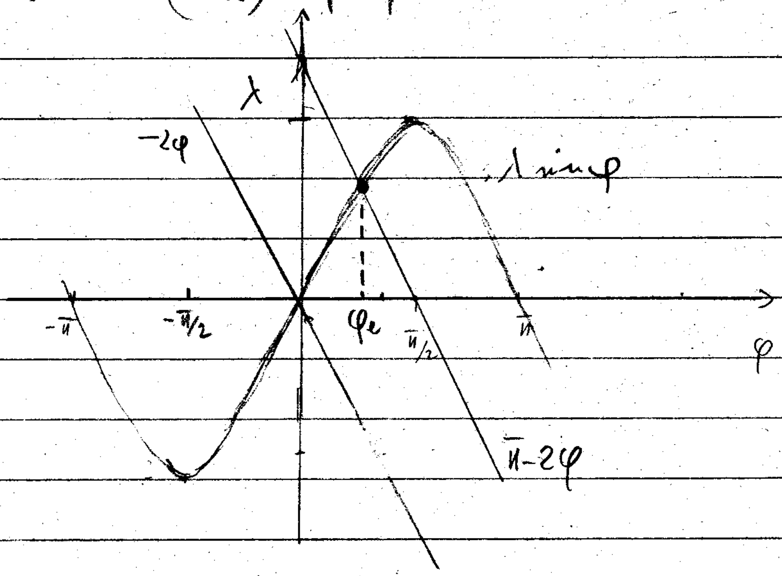
L'equazione pura di equilibrio è

$$mgl\sin\varphi - c(\pi - 2\varphi) = 0$$

Introducendo il parametro $\lambda = mgl/c$, si può scrivere

(3.2) $\lambda\sin\varphi = \pi - 2\varphi$

Studiando la (3.2) graficamente



si può concludere che ammette un'unica soluzione in $]-\pi, \pi]$ data da $0 < \varphi_e < \frac{\pi}{2}$.

Per la stabilità di φ_e, consideriamo

$V''(\varphi_e) = 2c\left[\lambda\cos\varphi_e + 2\right] > 0$ poiché $0 < \varphi_e < \frac{\pi}{2}$

Quindi, φ_e è un minimo di $V(\varphi)$, pertanto φ_e è una configurazione di equilibrio stabile $\forall\, \lambda > 0$.

3) Reazioni vincolari esterne in A e C.

Con riferimento alla Fig. 1.1, scriviamo le ECS applicate su tutto il modello, tenendo conto che la molla è interna.

(4.1) $\vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_1$: $V_A + 2mg = 0 \Rightarrow V_A = -2mg$

(4.2) $\vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_2$: $H_A + H_C = 0 \Rightarrow H_A = -H_C = -\frac{mg}{2} tg\,\varphi_e$

(4.3) $\vec{M}_A^{ext} \cdot \vec{e}_3$: $H_C \cancel{2}\cancel{\ell}\cos\varphi - \cancel{2}mg\frac{\cancel{\ell}}{2}\sin\varphi = 0 \Rightarrow H_C = \frac{mg}{2} tg\,\varphi_e > 0$

Dinamica

5) Scriviamo l'eq. di Lagrange relativa a φ.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad Q_\varphi \overset{(3.1)}{=} -2c\left(\lambda \sin\varphi + \ell\varphi - \bar{u}\right)$$

L'energia cinetica del modello è data da:

$$K = K^{(1)} + K^{(2)}$$

$$K^{(1)} = \frac{1}{2} I_A^{(1)} \dot\varphi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m\ell^2\right)\dot\varphi^2 \qquad I_A^{(1)} = \frac{1}{3} m\ell^2$$

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} I_E^{(2)} \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m V_E^2 \qquad I_E^{(2)} = \frac{1}{12} m\ell^2$$

$$\vec{x}_E = \frac{\ell}{2}\left(3\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2\right)$$

(5.1) $$\dot{\vec{x}}_E = \frac{\ell}{2}\left(-3\sin\varphi\, \dot\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \dot\varphi\, \vec{e}_2\right)$$

$$V_E^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(9\sin^2\varphi\, \dot\varphi^2 + \cos^2\varphi\, \dot\varphi^2\right) = \frac{\ell^2}{4}\left(8\sin^2\varphi + 1\right)\dot\varphi^2$$

Quindi,

$$K^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m\ell^2\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{4}\left(1 + 8\sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m\ell^2\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\left(2m\ell^2\sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2$$

$$= \frac{1}{2} m\ell^2\left(\frac{1}{3} + 2\sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2$$

e

$$K = \frac{1}{2} m\ell^2\left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2$$

Allora

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = 2ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = 2ml^2\left[\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\ddot\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 2ml^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2$$

Quindi, l'equazione di Lagrange è

$$2ml^2\left[\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\ddot\varphi + \sin 2\varphi\,\dot\varphi^2\right] - ml^2\sin 2\varphi\,\dot\varphi^2 = -2c\left(\lambda\sin\varphi + 2\varphi - \pi\right)$$

cioè

(6.1) $$2ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\ddot\varphi + ml^2\sin 2\varphi\,\dot\varphi^2 = -2c\left(\lambda\sin\varphi + 2\varphi - \pi\right)$$

6) Il modello ha vincoli lisci, fissi e bilateri, è soggetto a una sollecitazione conservativa, quindi ammette l'energia meccanica come integrale primo.

$$E = E|_{t=0} = K + V = ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2 + 2c\left(-\lambda\cos\varphi + \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)$$

$$E|_{t=0} = 2c\left(-\lambda + \frac{\pi^2}{4}\right)$$

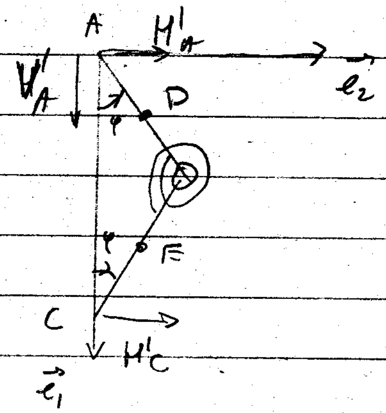
Quindi, durante il moto del modello vale che

$$ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\dot\varphi^2 + 2c\left(-\lambda\cos\varphi + \left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = 2c\left(\frac{\pi^2}{4}-\lambda\right)$$

da cui

(6.2) $$\dot\varphi^2 = \frac{2c\left(\frac{\pi^2}{4}-\lambda\right) - 2c\left(-\lambda\cos\varphi + \left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)}{ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)} = f^2(\varphi)$$

6) Calcolo delle reazioni vincolari in A e C durante il moto in funzione di φ.



Scriviamo le ECD su tutto il modello

$$(7.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{ext} = m\ddot{\vec{x}}_D + m\ddot{\vec{x}}_E \\ \vec{M}_A^{ext} = \dfrac{d\vec{L}_A}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{x}_D = \frac{l}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right), \quad \dot{\vec{x}}_D = \frac{l}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$\ddot{\vec{x}}_D = \frac{l}{2}\left[\left(-\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - \sin\varphi\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(-\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_2\right]$$

$$\ddot{\vec{x}}_E \overset{(5.1)}{=} \frac{l}{2}\left[\left(-3\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - 3\sin\varphi\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(-\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_2\right]$$

Quindi, proiettando la I ECD lungo i versori $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ si ha:

$$(7.2)\quad V'_A + 2mg = \frac{ml}{\cancel{2}}\left(-\cancel{4}^{2}\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - \cancel{4}^{2}\sin\varphi\,\ddot\varphi\right)$$

$$(7.3)\quad H'_A + H'_C = \frac{ml}{\cancel{2}}\cancel{2}\left(-\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi\right)$$

Calcoliamo $\vec{L}_A$.

$$\vec{L}_A = \vec{L}_A^{(1)} + \vec{L}_A^{(2)} \qquad \vec{L}_A^{(1)} = I_A^{(1)}\dot\varphi\,\vec{e}_3 = \frac{1}{3}ml^2\dot\varphi\,\vec{e}_3$$

$$\vec{L}_A^{(2)} = \vec{L}_E^{(2)} + (\vec{x}_E - \vec{x}_A)\times m\vec{V}_E \qquad \vec{L}_E^{(2)} = -I_E^{(2)}\dot\varphi\,\vec{e}_3 = -\frac{1}{12}ml^2\dot\varphi\,\vec{e}_3$$

$$(\vec{x}_E - \vec{x}_A)\times m\vec{v}_E = \frac{l}{2}\left(3\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)\times\frac{ml}{2}\left(-3\sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$= \frac{ml^2}{4}\left(3\cos^2\varphi\,\dot\varphi + 3\sin^2\varphi\,\dot\varphi\right)\vec{e}_3 = \frac{3}{4}ml^2\dot\varphi\,\vec{e}_3$$

$$\vec{L}_A^{(2)} = -\frac{1}{12}ml^2\dot\varphi\,\vec{e}_3 + \frac{3}{4}ml^2\,\vec{e}_3 = \frac{2}{3}ml^2\dot\varphi\,\vec{e}_3$$

$$\vec{L}_A = \frac{1}{3}ml^2\dot\varphi\,\vec{e}_3 + \frac{2}{3}ml^2\dot\varphi\,\vec{e}_3 = ml^2\dot\varphi\,\vec{e}_3$$

Pertanto, la II ECD si scrive, tenendo conto della (6.3),

$$H'_C \, 2l\cos\varphi - mgl\sin\varphi = ml^2\ddot{\varphi}$$

Quindi

$$H'_C = \frac{ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi}{2l\cos\varphi}$$

Allora, il sistema (7.1) diventa

$$(8.1) \quad \begin{cases} V'_A = -2mg - 2ml\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \\ H'_A = ml\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right) - \dfrac{ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi}{2l\cos\varphi} \\ H'_C = \dfrac{ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi}{2l\cos\varphi} \end{cases}$$

Sostituendo la (6.2) nella (6.1) si può ricavare $\ddot{\varphi}$ in funzione di φ:

$$(8.2) \quad \ddot{\varphi} = \frac{-ml^2\sin 2\varphi\, f^2(\varphi) - 2c\left(\lambda\sin\varphi + 2\varphi - \pi\right)}{2ml^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\varphi\right)}$$

Infine, sostituendo la (6.2) e la (8.2) in (8.1) si ottiene la risposta.