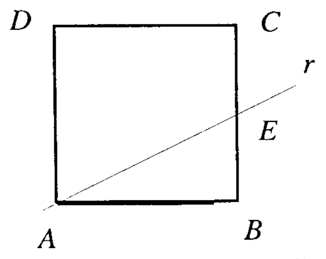
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 24 marzo 2009

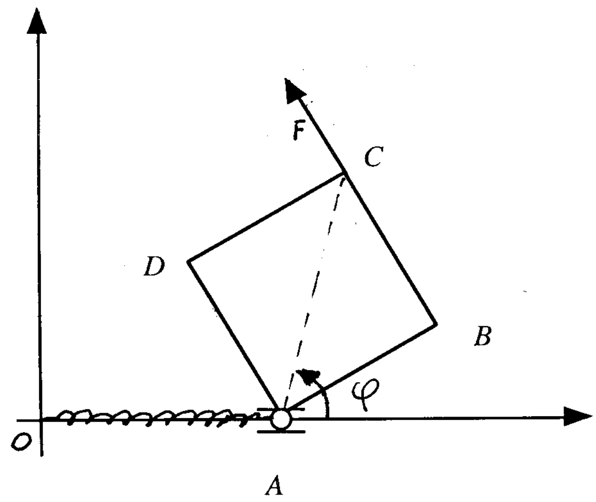
(G. Tondo)



È data una **lamina** quadrata omogenea di lato l e massa m.

1) Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto alla retta passante per il punto A e per il punto medio del lato BC.

STATICA.



Si vincoli la lamina in un piano **verticale** con una cerniera liscia in A e scorrevole su un asse orizzontale. Le forze attive sono: la forza $\mathbf{F_C}$ applicata in C e parallela al lato BC, la forza di richiamo della molla di costante elastica c e il peso proprio della lamina.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari in A all'equilibrio.

DINAMICA.

Inoltre si chiede di:

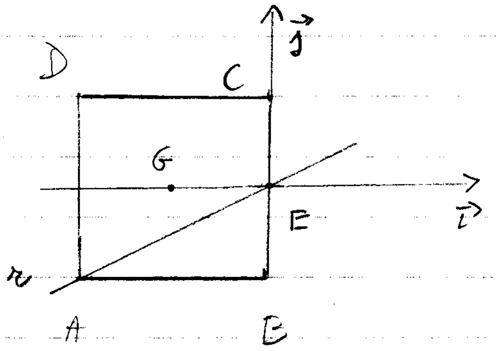
4) scrivere due equazioni differenziali pure di moto;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, determinarla;

6) calcolare le reazioni vincolari in A, durante il moto, in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo.

Tema d'esame del 24-03-09

1)



lamina quadrata omogenea di lato l e massa m

La via più semplice è determinare la matrice d'inerzia I_E rispetto alla terna di figura: per simmetria è una TPI(E). Quindi

$$I_E = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x+I_y \end{bmatrix}$$

$I_x = \frac{1}{12} m l^2$ (asse per G)

$I_y = \frac{1}{3} m l^2$ (lato del quad

$I_x + I_y = \frac{5}{12} m l^2$

Inoltre

$$\text{vers}(A-E) = \frac{-l\left(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)}{|A-E|} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

Dunque

$$I_r = \text{vers}(A-E)\, I_E\, \text{vers}(A-E) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\left[1, \frac{1}{2}, 0\right] m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{bmatrix} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

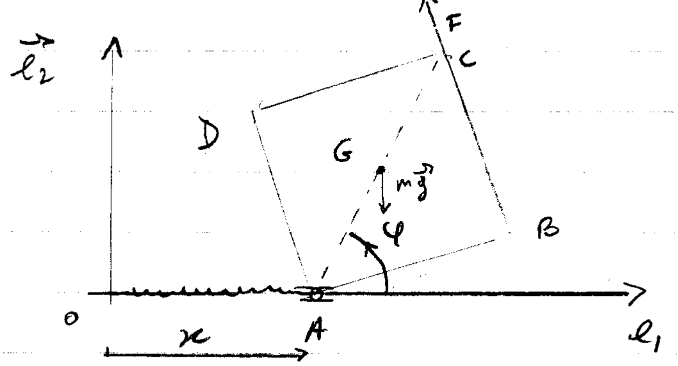
$$= \frac{4}{5} m l^2 \left[1, \frac{1}{2}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{4}{5} m l^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) - \frac{2}{15} m l^2$$

N.B. $I_{Gz} = 2 I_x = \frac{1}{6} m l^2$

Analisi cinematica: il modello è un rigido piano soggetto a un vincolo semplice, liscio e bilatero. Quindi, con il metodo del bilancio si ottiene

$$l = g - v = 3 - 1 = 2$$

Come coordinate libere scegliamo quelle di figura:



$$-\pi < \varphi \le \pi$$

$$x \in \mathbb{R}$$

2) Per determinare le eventuali configurazioni di equilibrio, risolviamo le equazioni pure di equilibrio. A questo scopo, determiniamo le forze generalizzate calcolando il lavoro virtuale della sollecitazione attiva, tenendo conto che il modello è un rigido.

$$LV = \vec{R}^{att} \cdot \delta \vec{x}_A + \vec{M}_A^{att} \cdot \vec{\chi} \qquad \delta \vec{x}_A = \delta x \, \vec{e}_1 \qquad \vec{\chi} = \delta\varphi \, \vec{e}_3$$

dove

$$\vec{R}^{att} = \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_C \qquad \vec{F}_A = -c x \, \vec{e}_1$$

$$\vec{M}_A = (\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times m\vec{g} + (\vec{x}_C - \vec{x}_A) \times \vec{F}_C \qquad m\vec{g} = -mg \, \vec{e}_2$$

$$= \left(-mg \frac{l}{\sqrt{2}} \cos\varphi + F l\right) \vec{e}_3$$

$$\vec{F}_C = F \, \vec{e}_3 \times (\vec{x}_B - \vec{x}_A) =$$

$$= F \, \vec{e}_3 \times \left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_1 + \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_2\right] =$$

$$= F \left[-\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_2\right]$$

N.B. Abbiamo calcolato $\vec{M}_A$ per via geometrica. Il calcolo per via algebrica è più lungo.

$$\vec{M}_A = (\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times m\vec{g} + (\vec{x}_C - \vec{x}_A) \times \vec{F}_C =$$

$$= \frac{l}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\cancel{\vec{e}_2}\right) \times \left(-mg\,\vec{e}_2\right) +$$

$$+ l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) \times F\left(-\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_2\right) =$$

$$= \frac{l}{\sqrt{2}}\left(-mg\cos\varphi\right)\vec{e}_3 +$$

$$+ l\sqrt{2}\,F\left(\cos\varphi\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\varphi\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= -\frac{mgl}{\sqrt{2}}\cos\varphi\,\vec{e}_3 + Fl\sqrt{2}\cos\left(\cancel{\varphi} - \cancel{\varphi} + \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_3 =$$

$$= -\frac{mgl}{\sqrt{2}}\cos\varphi\,\vec{e}_3 + Fl\cancel{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\,\vec{e}_3$$

$$= \left(Fl - \frac{mgl}{\sqrt{2}}\cos\varphi\right)\vec{e}_3$$

Allora, il lavoro virtuale vale

$$LV = \left(-cx\,\vec{e}_1 - \cancel{mg\,\vec{e}_2} + F\left(-\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_1 + \cancel{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_2}\right)\right)\cdot \delta x\,\vec{e}_1 +$$

$$+\left(Fl - \frac{mg\,l}{\sqrt{2}}\cos\varphi\right)\vec{e}_3 \cdot \delta\varphi\,\vec{e}_3$$

$$= \left(-cx - F\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right)\delta x + \left(Fl - \frac{mg\,l}{\sqrt{2}}\cos\varphi\right)\delta\varphi$$

Dunque, le forze generalizzate sono

$$(4.1)\quad \begin{cases} Q_\varphi = Fl - \dfrac{mg\,l}{\sqrt{2}}\cos\varphi \\ Q_x = -cx - F\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

N.B. In questo caso $Q_x = \vec{R}^{\,est}\cdot\vec{e}_1$, $Q_\varphi = \vec{M}_A^{\,est}\cdot\vec{e}_3$

Le equazioni pure di equilibrio sono, quindi,

$$(4.2)\quad \begin{cases} Fl - mg\dfrac{l}{\sqrt{2}}\cos\varphi = 0 \\ -cx - F\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}F}{mg} = \lambda > 0 \\ x = -\dfrac{F}{c}\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

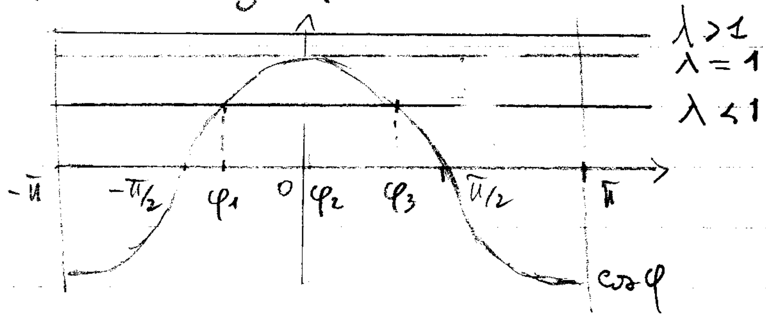
Risolviamo la I delle (4.2) per via grafica

se $\lambda > 1$ Nessuna soluzione

se $\lambda = 1$ $\varphi_e = \varphi_2$

se $\lambda < 1$ $\varphi_e = \varphi_1 = -\varphi_3$

$\varphi_e = \varphi_3 := \arccos\lambda$



La II delle (4.2) fornisce

$$x_e = -\frac{F}{c}\sin\left(\varphi_e-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{F}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\varphi_e - \cos\varphi_e\right) = \frac{F}{c\sqrt{2}}\left(\lambda - \sin\varphi_e\right)$$

Quindi, le configurazioni di equilibrio sono:

se $\lambda = 1$ $\quad \vec{q}_e^{(2)} = \left(\varphi_e^{(2)}, x_e^{(2)}\right) = \left(0, \frac{F}{c\sqrt{2}}\right)$

se $\lambda < 1$ $\quad \vec{q}_e^{(1)} = \left(\varphi_e^{(1)}, x_e^{(1)}\right) = \left(-\arccos\lambda, \frac{F}{c\sqrt{2}}\left(\lambda + \sqrt{1-\lambda^2}\right)\right)$

$\quad \vec{q}_e^{(3)} = \left(\varphi_e^{(3)}, x_e^{(3)}\right) = \left(\arccos\lambda, \frac{F}{c\sqrt{2}}\left(\lambda - \sqrt{1-\lambda^2}\right)\right)$

3) Reazioni vincolari in A all'equilibrio

Poichè il vincolo in A è liscio, esso esercita una reazione vincolare $\vec{\phi}_A = V_A \vec{e}_2$. Quindi, dalla I ECS si ha

$$\vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_2 = 0 \qquad V_A - mg + \vec{F}_c \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$$V_A = mg - F\cos\left(\varphi_e - \frac{\pi}{4}\right) = mg - \frac{F}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi_e + \sin\varphi_e\right) = mg - \frac{F}{\sqrt{2}}\left(\lambda + \sin\varphi_e\right)$$

Quindi

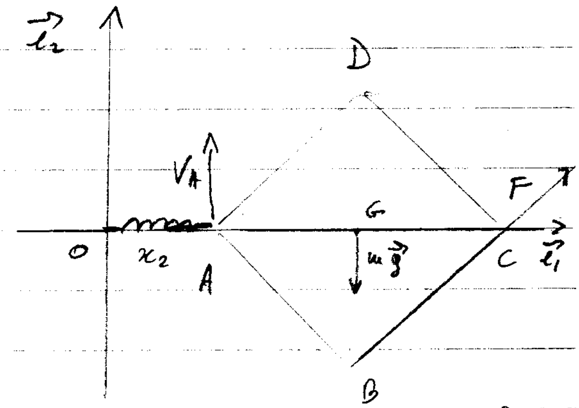
se $\lambda = 1$ $\quad \vec{q}_e^{(2)} = \left(0, \frac{F}{c\sqrt{2}}\right), \quad V_A = mg - \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{2}$

se $\lambda < 1$ $\quad \vec{q}_e^{(1)} = \left(-\arccos\lambda, \frac{F}{c\sqrt{2}}\left(\lambda + \sqrt{1-\lambda^2}\right)\right), \quad V_A = mg - \frac{F}{\sqrt{2}}\left(\lambda - \sqrt{1-\lambda^2}\right)$

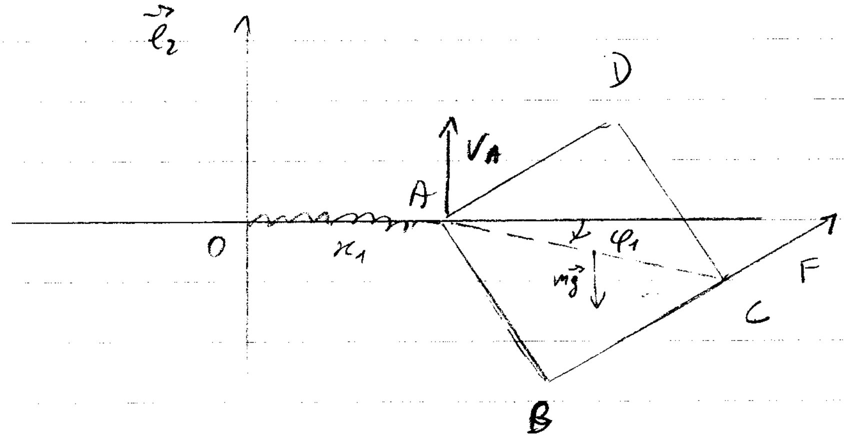
$\quad \vec{q}_e^{(3)} = \left(\arccos\lambda, \frac{F}{c\sqrt{2}}\left(\lambda - \sqrt{1-\lambda^2}\right)\right), \quad V_A = mg - \frac{F}{\sqrt{2}}\left(\lambda + \sqrt{1-\lambda^2}\right)$

Ricapitolando:

se $\lambda = 1$, $\vec{q}_e^{(2)} = \left(0, \frac{F}{c\sqrt{2}}\right)$, $V_A = mg - \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{2}$



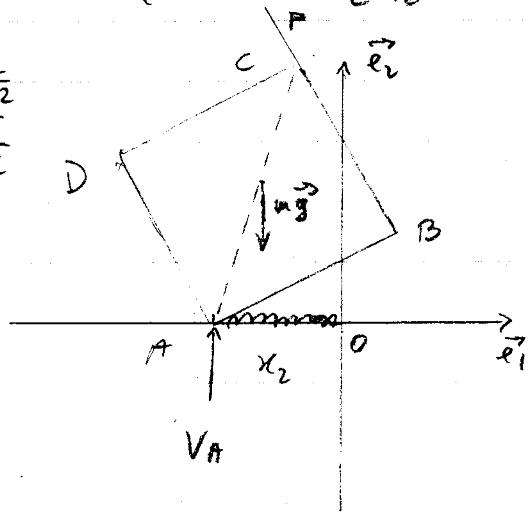
se $\lambda < 1$, $\vec{q}_e^{(1)} = \left(-\arccos\lambda, \frac{F}{c\sqrt{2}}\left(\lambda + \sqrt{1-\lambda^2}\right)\right)$, $V_A = mg - \frac{F}{\sqrt{2}}\left(\lambda - \sqrt{1-\lambda^2}\right)$



se $\lambda < 1$, $\vec{q}_e^{(2)} = \left(\arccos\lambda, \frac{F}{c\sqrt{2}}\left(\lambda - \sqrt{1-\lambda^2}\right)\right)$; $V_A = mg - \frac{F}{\sqrt{2}}\left(\lambda + \sqrt{1-\lambda^2}\right)$

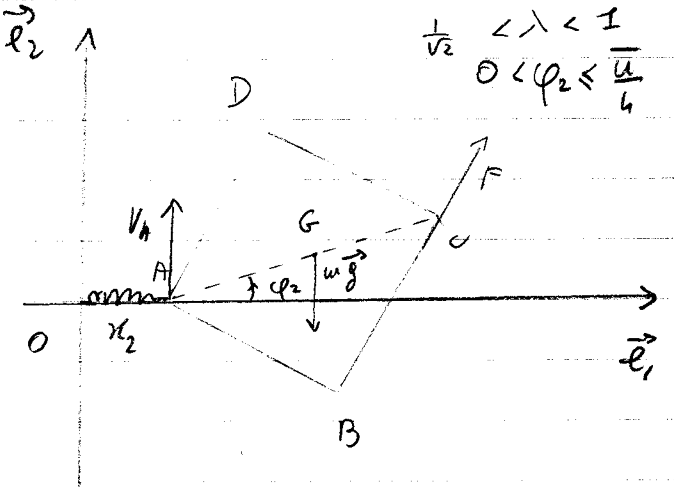
$0 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{4} < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$



$\frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda < 1$

$0 < \varphi_2 \leq \frac{\pi}{4}$



4) Scriviamo le equazioni di Lagrange non conservative poichè, in questo caso, quelle conservative non esistono!

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1,\ 2 \tag{7.1}$$

Basta calcolare l'energia cinetica K del modello. Poichè il rigido non ha punti fissi, utilizziamo

$$K = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}\dot{\varphi}^2 \qquad I_{Gz} = \frac{1}{6} m l^2 \tag{7.2}$$

Calcoliamo la velocità di G con la formula di Poisson

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = \dot{x}\,\vec{e}_1 + \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \frac{l}{\sqrt{2}}(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2) \tag{7.3}$$

$$= \dot{x}\,\vec{e}_1 + \frac{l}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2)$$

$$= \left(\dot{x} - \frac{l}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\vec{e}_1 + \frac{l}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_2$$

$$v_G^2 = \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G = \left(\dot{x} - \frac{l}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 =$$

$$= \dot{x}^2 - l\sqrt{2}\,\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{l^2}{2}\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \frac{l^2}{2}\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi =$$

$$= \dot{x}^2 + \frac{l^2}{2}\dot{\varphi}^2 - l\sqrt{2}\,\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Quindi

$$K = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{2}\dot{\varphi}^2 - l\sqrt{2}\,\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} m l^2\right)\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \frac{2}{3} l^2\dot{\varphi}^2 - l\sqrt{2}\,\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)$$

Scriviamo le eq. di Lagrange (7.1)

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{ml}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} - \frac{ml}{\sqrt{2}}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0$$

I EL: $$m\ddot{x} - \frac{ml}{\sqrt{2}}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = -cx - F\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi} - \frac{ml}{\sqrt{2}}\dot{x}\sin\varphi \ ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{2}{3}ml^2\ddot{\varphi} - \frac{ml}{\sqrt{2}}\left(\ddot{x}\sin\varphi + \dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = -\frac{ml}{\sqrt{2}}\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

II EL: $$\frac{2}{3}ml^2\ddot{\varphi} - \frac{ml}{\sqrt{2}}\left(\ddot{x}\sin\varphi + \cancel{\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi}\right) + \cancel{\frac{ml}{\sqrt{2}}\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi} = Fl - \frac{mgl\cos\varphi}{\sqrt{2}}$$

Dunque, le EL sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} - \frac{ml}{\sqrt{2}}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = -cx - F\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{2}{3}ml^2\ddot{\varphi} - \frac{ml}{\sqrt{2}}\ddot{x}\sin\varphi = Fl - \frac{mgl}{\sqrt{2}}\cos\varphi \end{cases}$$

c) Reazioni vincolari dinamiche in A

Utilizzando la I ECS proiettata lungo $\vec{e}_2$ si ha

$$\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_2 = m \, \ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_2$$

Calcoliamo l'accelerazione del centro di massa G:

$$\ddot{\vec{x}}_G = \frac{d}{dt} \vec{v}_G \overset{(7.3)}{=} \left[\ddot{x} - \frac{l}{\sqrt{2}}\left(\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi\right)\right]\vec{e}_1 + \frac{l}{\sqrt{2}}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right)\vec{e}_2$$

Quindi

$$V'_A - mg + F\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{ml}{\sqrt{2}}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right)$$

$$V'_A = mg - \frac{F}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) + \frac{ml}{\sqrt{2}}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right)$$