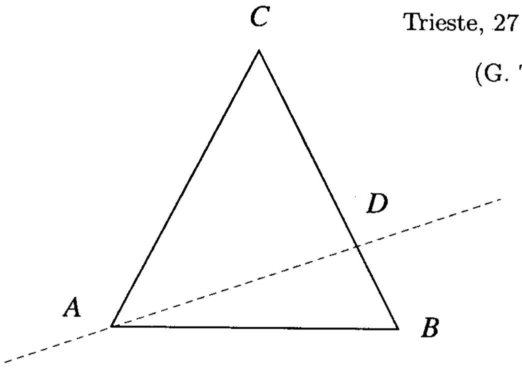
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 27 gennaio 2009

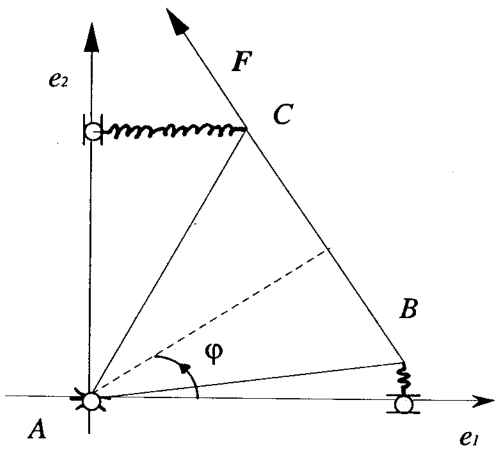
(G. Tondo)



È data una **lamina** triangolare omogenea di massa m, i cui lati sono tutti di lunghezza l.

1) Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto alla retta passante per il vertice A e per il punto D tale che $BD = l/5$.

STATICA.



Si vincoli la lamina in un piano **orizzontale** con una cerniera fissa in A. Le forze attive sono: la forza $\mathbf{F_C} = F\mathbf{vers}\,(\mathbf{C}-\mathbf{B})$ applicata in C, e le forze di richiamo delle molle di costante elastica c, che si mantengono parallele agli assi in ogni configurazione del sistema.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari in A all'equilibrio.

DINAMICA.

Inoltre si chiede di:

4) scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

5) scrivere un integrale primo di moto a partire dai dati iniziali $\varphi(0) = 0$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$;

6) calcolare le reazioni vincolari in A durante il moto in funzione della sola coordinata libera.

Tema del 27-01-09

1)

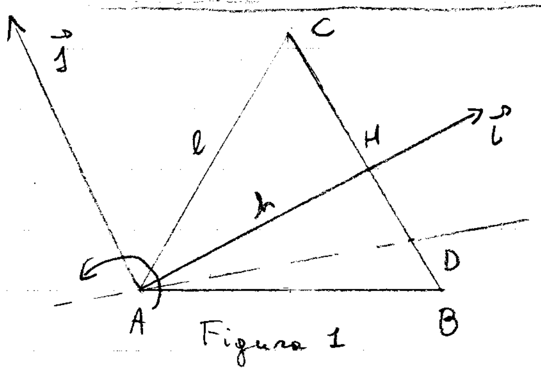


Figura 1

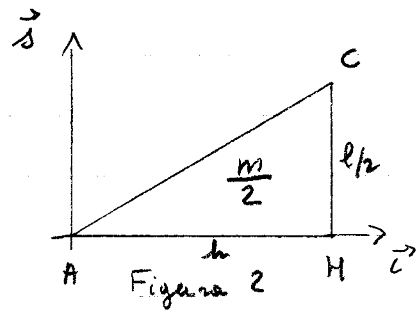


Figura 2

Determiniamo la matrice d'inerzia della lamina rispetto alla terna $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ A tale scopo, consideriamo metà lamina (Figura 2) e utilizziamo il risultato di pag. 33 delle Dispense di Meccanica Razionale [Ughi, 19]
Otteniamo che i momenti d'inerzia del triangolo rettangolo AHC sono

$$I_{11}^{(tr)} = \frac{1}{6}\frac{m}{2}\overline{CH}^2 = \frac{m}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{48} m l^2$$

$$I_{22}^{(tr)} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\overline{AH}^2 = \frac{m}{4}\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{16} m l^2$$

Quindi, considerando che per la lamina di Figura 1 i momenti d'inerzia raddoppiano per ovvie considerazioni geometriche, otteniamo che

$$J_{11} = 2 I_{11}^{tr} = \frac{1}{24} m l^2 \quad , J_{22} = 2 I_{22}^{(tr)} = \frac{3}{8} m l^2$$

Inoltre, osserviamo che $\vec{i}$ è asse di simmetria materiale ortogonale per la lamina, quindi è API(A). Dunque, la terna $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una TPI(A). Allora, la matrice d'inerzia I_A, rispetto a tale terna, è data da

$$I_A = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Poichè $\overline{DH} = \overline{BH} - \overline{BD} = \frac{l}{2} - \frac{l}{5} = \frac{3}{10} l$, si ha che

$$(\vec{x}_D - \vec{x}_A) = h\,\vec{i} - \overline{DH}\,\vec{j} = l\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} - \frac{3}{10} l\,\vec{j}$$ OK

$$|\vec{x}_D - \vec{x}_A|^2 = l^2\left(\frac{3}{4} + \frac{9}{100}\right) = l^2 \frac{21}{25}$$

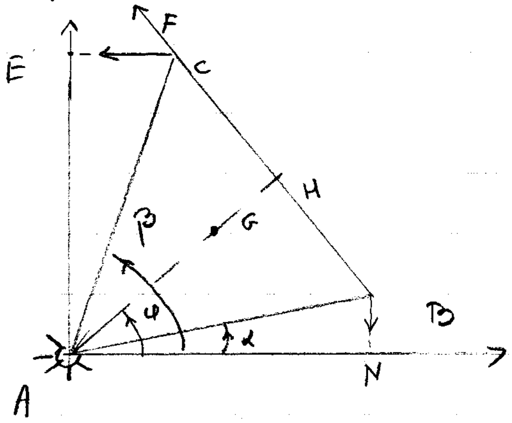
$$\text{vers}(\vec{x}_D - \vec{x}_A) = \frac{5}{\sqrt{21}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} - \frac{3}{10}\,\vec{j}\right)$$

Pertanto il momento d'inerzia rispetto alla retta per A e D è

$$I_r = \frac{5}{\sqrt{21}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{10}\right] m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{10} \end{bmatrix} =$$

$$= m l^2 \frac{25}{21}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{10}\right] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{48} \\ -\frac{9}{80} \end{bmatrix} = m l^2 \frac{25}{21}\left(\frac{3}{96} + \frac{27}{800}\right) = \frac{13}{168} m l^2$$

Il sistema ha 1 g.l. Scegliamo come coordinata libera l'angolo φ indicato in figura. Il sistema è una macchina semplice con forze posizionali e vincoli lisci e fissi. Quindi ammette energia potenziale.



Quella elastica è data da:

$$V^{el}(\varphi)=\frac{1}{2}c\left(\overline{CE}^2+\overline{BN}^2\right)$$

$\overline{CE}=l\cos\beta$, $\overline{BN}=l\sin\alpha$ $\qquad \beta=\varphi+\frac{\pi}{6}$, $\alpha=\varphi-\frac{\pi}{6}$

$$\overline{CE}^2+\overline{BN}^2=l^2\left(\cos^2\beta+\sin^2\alpha\right)=l^2\left(\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=l^2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin\varphi\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi-\frac{1}{2}\cos\varphi\right)^2\right]$$

$$=l^2\left[\frac{3}{4}\cos^2\varphi+\frac{1}{4}\sin^2\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{3}{4}\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\cos^2\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right]$$

$$=l^2\left(1-\sqrt{3}\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$$V^{el}(\varphi)=\frac{1}{2}c\,l^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi\right)$$

Per calcolare l'energia potenziale del carico follower, valutiamone il lavoro virtuale.

$$LV^{foll} = \vec{F}_C \cdot \delta \vec{x}_C = \cancel{\vec{F}_C \cdot \delta \vec{x}_A} + \vec{M}_A^{foll} \cdot \delta\varphi \, \vec{e}_3 = F h \, \delta\varphi = F \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \delta\varphi$$

Dunque

$$V^{foll}(\varphi) = -\int F \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \, d\varphi = -\frac{F\ell\sqrt{3}}{2} \varphi$$

Pertanto, l'energia potenziale totale è data da:

$$(4.1) \quad V(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{4} c \, \ell^2 \sin 2\varphi - F\ell \frac{\sqrt{3}}{2} \varphi \, ,$$

trascurando le costanti additive.

Troviamo i punti stazionari di $V(\varphi)$ calcolandone la derivata prima:

$$(4.2) \quad V'(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} c \, \ell^2 \cos 2\varphi - F\ell \frac{\sqrt{3}}{2} = -Q_\varphi$$

Quindi risolviamo l'equazione

$$V'(\varphi) = 0 \iff \cos 2\varphi = -\frac{F}{c\ell} = \lambda < 0$$

con il metodo grafico.

Inoltre, valutiamo la stabilità degli equilibri calcolando

$$V''(\varphi_e) = \sqrt{3} c \, \ell^2 \sin 2\varphi_e \quad e \quad V'''(\varphi_e) = 2\sqrt{3} \, c \, \ell^2 \cos 2\varphi_e .$$

■ $y = \cos 2x$

■ $y = \sin 2x$

■ $y = \cos x$

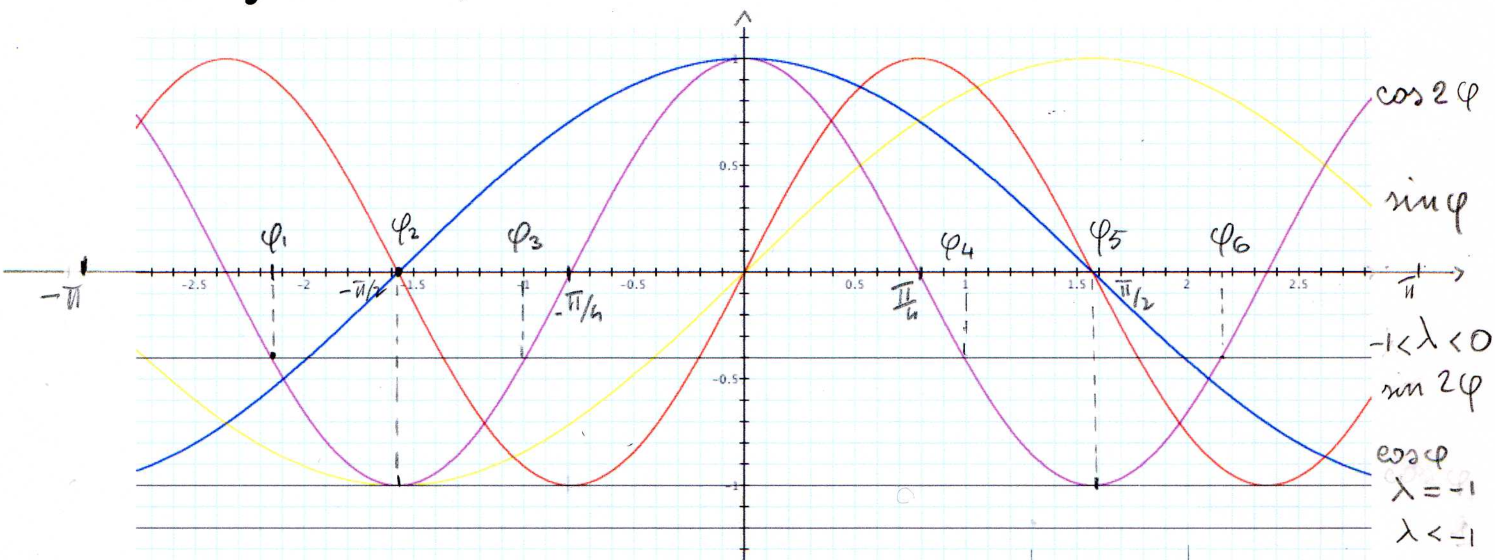
■ $y = \sin x$

■ $y = -0{,}4$

■ $y = -1$

■ $y = -1{,}2$

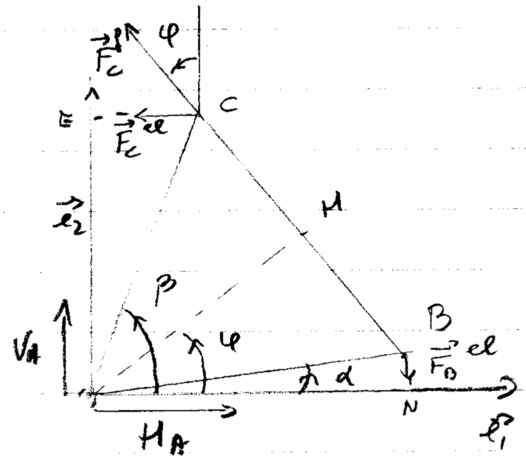
$x \mapsto \varphi$



se $\lambda=-1$	φ_e	$V''(\varphi_e)$	$V'''(\varphi_e)$	staz.	stab.	$\sin\varphi_e$	$\cos\varphi_e$
	$\varphi_2=-\pi/2$	0	<0	sella	instab.	-1	0
	$\varphi_5=\pi/2$	0	<0	sella	instab.	1	0
se $-1<\lambda<0$	$\varphi_1=-\pi+\varphi_4$	>0		min.	stab.	$-\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}$
	$\varphi_3=-\varphi_4$	<0		max	instab.	$-\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}$	$\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}$
	$\varphi_4=\frac{1}{2}\arccos\lambda$	>0		min.	stab.	$\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}$	$\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}$
	$\varphi_6=\pi-\varphi_4$	<0		max.	instab.	$\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}$

N.B. La forza generalizzata Q_φ coincide con il momento risultante delle forze rispetto al polo A:

$$\vec{M}_A = (\vec{x}_C - \vec{x}_A) \times \left(\vec{F}_C^{\,foll} + \vec{F}_C^{\,el}\right) + (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \times \vec{F}_B^{\,el} = Q_\varphi$$



3) Reazioni in A

$$\vec{F}_C^{\,foll} = F\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$\vec{F}_C^{\,el} = -c\,\overline{CE}\,\vec{e}_1 = -c\,l\cos\beta\,\vec{e}_1$$

$$\vec{F}_B^{\,el} = -c\,\overline{BN}\,\vec{e}_2 = -c\,l\sin\alpha\,\vec{e}_2$$

Proiettando la I ECS lungo i versori $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ si ha

$$H_A - c\,l\cos\beta - F\sin\varphi = 0 \qquad \cos\beta = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi$$

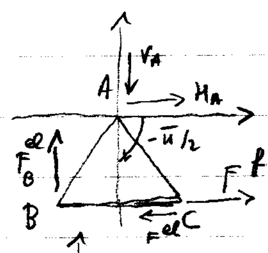
$$V_A - c\,l\sin\alpha + F\cos\varphi = 0 \qquad \sin\alpha = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi$$

cioè

$$H_A = c\,l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi_e - \frac{1}{2}\sin\varphi_e\right) + F\sin\varphi_e = c\,l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi_e - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\sin\varphi_e\right)$$

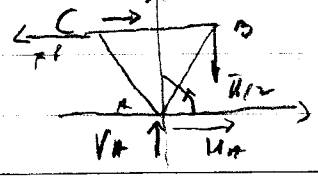
$$V_A = c\,l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi_e - \frac{1}{2}\cos\varphi_e\right) - F\cos\varphi_e = c\,l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi_e - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\cos\varphi_e\right)$$

Quindi, se $\lambda = -1$



$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad H_A = -\frac{1}{2}c\,l, \quad V_A = -c\,l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi_5 = \frac{\pi}{2}, \quad H_A = \frac{1}{2}c\,l, \quad V_A = c\,l\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Infine, se $-1<\lambda<0$

$$\varphi_1 = -\pi + \varphi_4 , \quad H_A = c\ell\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}} + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}\right)$$

$$V_A = c\ell\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}} + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}\right)$$

$$\varphi_3 = -\varphi_4 , \quad H_A = c\ell\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}} + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}\right)$$

$$V_A = c\ell\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}} - \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}\right)$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{2}\arccos\lambda , \quad H_A = c\ell\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}} - \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}\right)$$

$$V_A = c\ell\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}} - \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}\right)$$

$$\varphi_6 = \pi - \varphi_4 , \quad H_A = c\ell\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}} - \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}\right)$$

$$V_A = c\ell\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}} + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}\right)$$

4) Dato che nella (4.2) abbiamo Q_φ, conviene scrivere l'equazione di Lagrange non conservativa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \left(\frac{\partial K}{\partial \varphi}\right) = Q_\varphi$$

dove

$$K = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2 \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{5}{12} m l^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{5}{24} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

Quindi un'equazione pura di moto è data da

$$\frac{5}{12} m l^2 \ddot{\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} l \left(F + c\, l \cos 2\varphi\right)$$

che posso scrivere

(8.1) $$\ddot{\varphi} = \frac{6\sqrt{3}}{5 m l}\left(F + c\, l \cos 2\varphi\right) = g(\varphi)$$

5) Abbiamo già visto in Statica che il sistema è conservativo. Inoltre, è soggetto a vincoli fissi, bilateri e non dissipativi. Quindi vale il Teo. di conservazione dell'energia meccanica. Pertanto

$$E = K + V = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} l \left(F\varphi + \frac{cl}{2} \sin 2\varphi \right)$$

è un integrale primo di moto. Calcoliamo la costante dell'energia

$$E_{|t=0} = K_{|t=0} + V_{|t=0} = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2(0) - \frac{\sqrt{3}}{2} l \left(F\varphi(0) + \frac{cl}{2} \sin 2\varphi(0) \right) = 0$$

Pertanto, l'equazione dell'energia meccanica è

$$\frac{5}{24} m l^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} l \left(F\varphi + c\frac{l}{2} \sin 2\varphi \right) = 0$$

che posso scrivere come

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{12\sqrt{3}}{5ml} \left(F\varphi + c\frac{l}{2} \sin 2\varphi \right) = f^2(\varphi) \qquad (9.1)$$

c) Reazioni dinamiche in A

Dalla I ECD otteniamo

$$H'_A - c\,l\cos\beta - F\sin\varphi = m\,\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_1$$

$$V'_A - c\,l\sin\alpha + F\cos\varphi = m\,\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_2$$

$$\vec{x}_G = \frac{2}{3}h\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) = \frac{l}{\sqrt{3}}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$\dot{\vec{x}}_G = \frac{l}{\sqrt{3}}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_2\right)$$

$$\ddot{\vec{x}}_G = \frac{l}{\sqrt{3}}\left[\left(-\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_1 + \left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_2\right]$$

Dunque,

$$H'_A = c\,l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sin\varphi\right) - \frac{m\,l}{\sqrt{3}}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)$$

$$V'_A = c\,l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi - \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\cos\varphi\right) + \frac{m\,l}{\sqrt{3}}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right)$$

Sostituendo nelle equazioni precedenti la (8.1) e la (9.1) al posto di $\ddot{\varphi}$ e $\dot{\varphi}^2$ si ottiene la risposta.