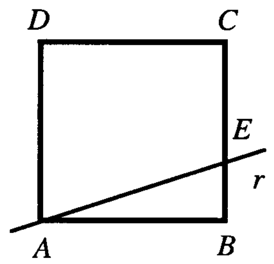
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 29 giugno 2009

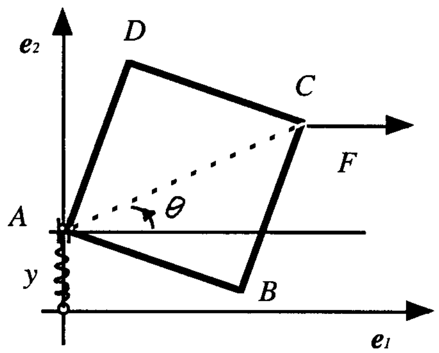
(G. Tondo)



È dato un **telaio** quadrato omogeneo i cui lati sono tutti di lunghezza l e massa m.

1) Calcolare il momento d'inerzia del telaio rispetto alla retta r passante per il vertice A e per il punto E tale che $\overline{BE} = l/3$.

STATICA.



Si vincoli il telaio in un piano **verticale** con una cerniera liscia in A e scorrevole su un asse verticale. Le forze attive sono: la forza $\mathbf{F_C} = F\mathbf{e}_1$ $(F > 0)$ applicata in C, la forza di richiamo della molla di costante elastica c e il peso proprio del telaio.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema e discuterne la stabilità;

3) calcolare la reazioni vincolare in A all'equilibrio.

DINAMICA.

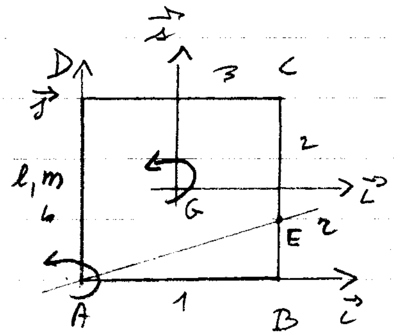
Inoltre si chiede di:

4) scrivere due equazioni differenziali pure di moto;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, determinarla a partire dai dati iniziali $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$;

6) calcolare la reazione vincolare in A durante il moto in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo.

Tema del 29/06/09



$\overline{BE} = l/3$ telaio quadrato omogeneo

1) Calcoliamo la matrice d'inerzia I_G rispetto alla terna $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e poi trasportiamola in A con il Teorema di Huygens-Steiner.

$$I_G = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x + I_y \end{bmatrix}$$

$(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una terna principale d'inerzia per motivi di simmetria materiale, quindi $I_{xy} = 0$

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)} = 2\left(I_x^{(2)} + I_x^{(4)}\right) = 2\left(\frac{1}{12} m l^2 + m \frac{l^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} m l^2$$

$$I_y = I_x$$

. Quindi

(1.1) $$I_G = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$I_A = I_G + 4m \begin{bmatrix} y_A^2 & -x_A y_A & 0 \\ -x_A y_A & x_A^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_A^2 + y_A^2 \end{bmatrix} = I_G + 4 m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= m l^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Il momento d'inerzia rispetto alla retta r si può calcolare

$$I_r = \text{vers}(E-A) \cdot \mathbb{I}_A \left(\text{vers}(E-A)\right)$$

$$\text{vers}(E-A) = \frac{E-A}{|E-A|} = \frac{\cancel{\ell}\left(\vec{i} + \frac{\vec{j}}{3}\right)}{\cancel{\ell}\ \sqrt{10}/3} = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\vec{i} + \frac{\vec{j}}{3}\right)$$

Dunque

$$I_r = \frac{3}{\sqrt{10}}\left[1, \frac{1}{3}, 0\right] I_A \frac{3}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{9}{10}\left[1, \frac{1}{3}\right] \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ -1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{16}{15} m \ell^2$$

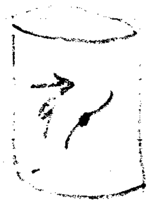
Analisi cinematica

Il modello è un rigido piano (3 gradi di libertà) vincolato con un appoggio liscio ($v=1$); quindi ha 2 gradi di libertà

$$l = g - v = 2$$

Le coordinate libere di figura (y, θ) variano nello spazio delle configurazioni

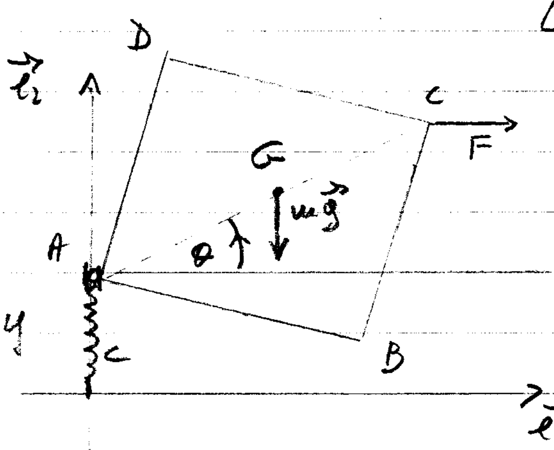
$$C_v = \mathbb{R} \times S^1.$$



$\vec{q} = (y, \theta)$

cioè $y \in \mathbb{R}$ $\quad -\pi < \theta \leq \pi$.

Statica



2) La sollecitazione attiva è conservativa poiché $\vec{F}_C$ è uniforme e $\vec{F}_A$ è elastica. Ammette, quindi, energia potenziale V

$$V(y,\theta) = \frac{1}{2} c \overline{AC}^2 - 4m\vec{g} \cdot \vec{x}_G - \vec{F}_C \cdot \vec{x}_C$$

(3.1) $$\vec{x}_C = \vec{x}_A + (\vec{x}_C - \vec{x}_A) = y\vec{e}_2 + \ell\sqrt{2}(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2)$$
$$= \ell\sqrt{2}\cos\theta\, \vec{e}_1 + (y + \ell\sqrt{2}\sin\theta)\vec{e}_2$$

Analogamente

(3.2) $$\vec{x}_G = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\cos\theta\, \vec{e}_1 + \left(y + \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\vec{e}_2$$

Quindi

$$V(y,\theta) = \frac{1}{2}cy^2 + 4mg\,\vec{e}_2 \cdot \vec{x}_G - F\vec{e}_1 \cdot \vec{x}_C =$$

(3.3) $$= \frac{1}{2}cy^2 + 4mg\left(y + \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right) - \ell\sqrt{2}F\cos\theta$$
$$= \frac{1}{2}cy^2 + 4mgy + \ell\sqrt{2}(2mg\sin\theta - F\cos\theta)$$

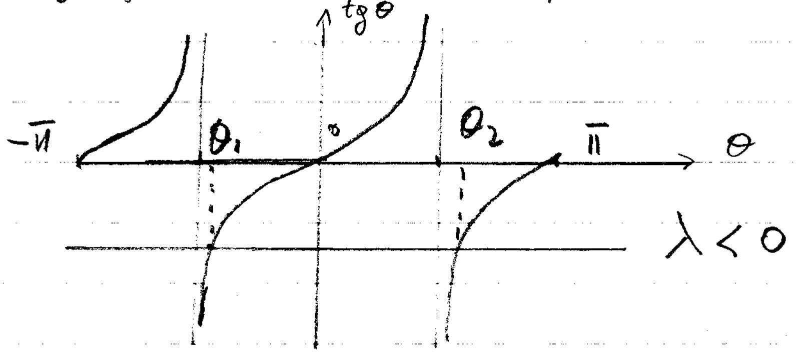
Cerchiamo i punti stazionari di $V(y,\theta)$:

(3.4) $$\frac{\partial V}{\partial y} = -Q_y = cy + 4mg$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -Q_\theta = \ell\sqrt{2}(2mg\cos\theta + F\sin\theta)$$

Allora, le equazioni pure di equilibrio sono

$$(3.5)\begin{cases} c\,y + 4\,mg = 0 \\ 2\,mg\cos\theta + F\sin\theta = 0 \end{cases} \quad \overset{\cos\theta\neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} y_e = -\dfrac{4\,mg}{c} \\ \mathrm{tg}\,\theta_e = -\dfrac{2\,mg}{F} = \lambda < 0 \end{cases}$$

Risolviamo graficamente la II eq. delle (3.5)



Poiché $\lambda < 0$, le soluzioni sono

$$\theta_1 = \mathrm{arctg}\,\lambda \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta_1 < 0$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \pi \qquad \frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi$$

Quindi, poiché $\cos\theta = 0$ non è soluzione di (3.5), le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(-\frac{4\,mg}{c},\ \mathrm{arctg}\,\lambda\right) \quad ; \quad \vec{q}_e^{\,(2)} = \left(-\frac{4\,mg}{c},\ \mathrm{arctg}\,\lambda + \pi\right)$$

	θ_e	$\mathrm{tg}\,\theta_e$	$\sin\theta_e = \pm\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}$	$\cos\theta_e = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}$	$\vec{q}_e$	
$\vec{q}_e^{\,(1)}$	θ_1	λ	$\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$	min	stabile
$\vec{q}_e^{\,(2)}$	θ_2	λ	$-\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$	sella	instabile

Stabilità dell'equilibrio

Determiniamo se le configurazioni di equilibrio sono o non sono punti di minimo per l'energia potenziale $V(y,\theta)$.
A tale scopo, calcoliamo la matrice Hessiana.
Dalle (3.4) segue che

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = c \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = l\sqrt{2}\left(F\cos\theta - 2mg\sin\theta\right)$$

Quindi

$$\mathcal{H}(y,\theta) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & l\sqrt{2}\left(F\cos\theta - 2mg\sin\theta\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{11} = c > 0 \quad \forall \theta$$

$$\det(\mathcal{H}) = c\, l\sqrt{2}\left(F\cos\theta - 2mg\sin\theta\right)$$

Valutiamo $\det(\mathcal{H})$ nelle configurazioni di equilibrio.

$$\det(\mathcal{H})_{|\vec{q}_e^{(1)}} = c\, l\sqrt{2}\left(\frac{F}{\sqrt{1+\lambda^2}} - 2mg\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$$

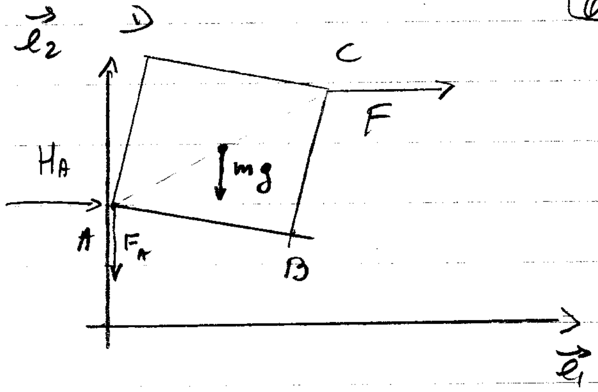
$$= \frac{c\, l\sqrt{2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left(F - 2mg\lambda\right) > 0 \quad \forall \lambda < 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{q}_e^{(1)} \text{ è min} \Rightarrow \text{stabile}$$

$$\det(\mathcal{H})_{|\vec{q}_e^{(2)}} = c\, l\sqrt{2}\left(\frac{-F}{\sqrt{1-\lambda^2}} + 2mg\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) < 0 \quad \forall \lambda < 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{q}_e^{(2)} \text{ è sella} \Rightarrow \text{instabile}$$

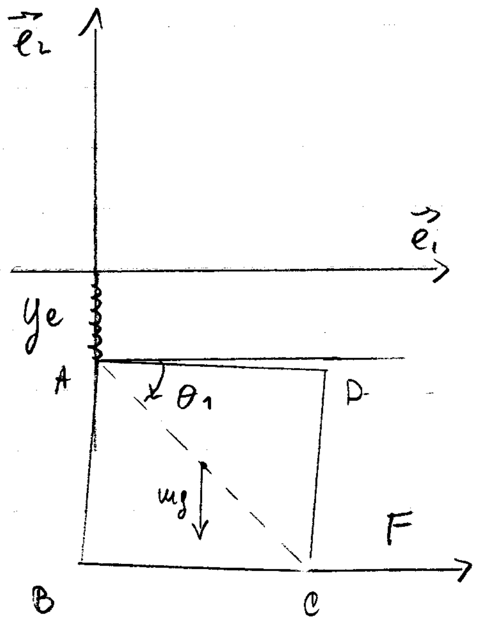
3) Reazioni in statica



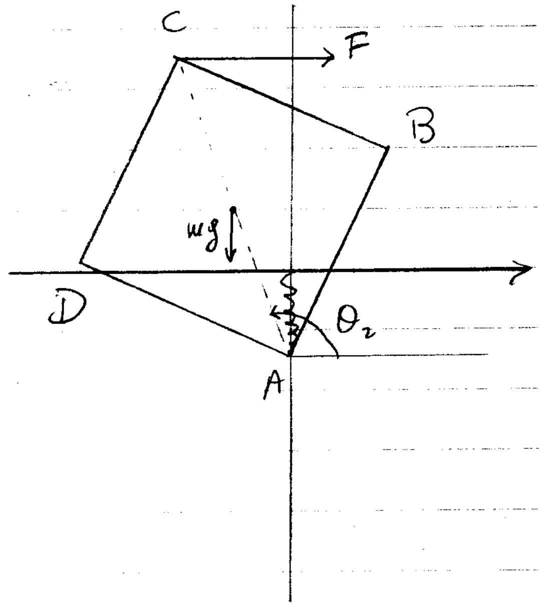
Il vincolo di appoggio liscio in A esercita una reazione $\perp$ all'asse $\vec{e}_2$, cioè diretta come $\vec{e}_1$. Per calcolarla utilizziamo la I ECS proiettata lungo $\vec{e}_1$.

$$\vec{R}^{\,est}\cdot\vec{e}_1 = 0 \qquad H_A + F = 0 \iff \boxed{H_A = -F}$$

Ricapitolando, le configurazioni di equilibrio sono



stabile



instabile

4) Scriviamo le equazioni di Lagrange in forma non conservativa. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello. Poichè il telaio non ha punti fissi utilizziamo la formula

(7.1) $$K = \frac{1}{2}(4m)\vec{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2} I_{Gz} \dot{\theta}^2$$

Dalla (3.2) si ottiene che

(7.2) $$\dot{\vec{x}}_G = \frac{l}{\sqrt{2}}\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_1 + \left(\dot{y} + \frac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_2$$

Quindi

$$\vec{v}_G^{\,2} = \left(-\frac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(\dot{y} + \frac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta\,\dot{\theta}\right)^2 =$$

$$= \frac{l^2}{2}\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + \frac{l^2}{2}\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{2l}{\sqrt{2}}\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{y}$$

$$= \frac{l^2}{2}\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + l\sqrt{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{y}$$

Poichè dalla (1.1) $I_{Gz} = \frac{4}{3} m l^2$, l'energia cinetica è

(7.3) $$K = 2m\left(\frac{l^2}{2}\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + l\sqrt{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{y}\right) + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{5}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 + 2m\dot{y}^2 + 2\sqrt{2}\, l\, m \cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{y}$$

Scriviamo le eq. di Lagrange.

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{y}} = 4m\dot{y} + 2\sqrt{2}\, l\, m \cos\theta\, \dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}\right) = 4m\ddot{y} + 2\sqrt{2}\, l\, m \left(\cos\theta\, \ddot{\theta} - \sin\theta\, \dot{\theta}^2\right)$$

Quindi, l'EL relativo alla coordinata y è:

$$(8.1) \quad 4m\ddot{y} + 2\sqrt{2}\, m\, l \left(\cos\theta\, \ddot{\theta} - \sin\theta\, \dot{\theta}^2\right) \overset{(3.4a)}{=} -\left(c y + 4mg\right)$$

Inoltre

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = \frac{10}{3} m l^2 \dot{\theta} + 2\sqrt{2}\, m l \cos\theta\, \dot{y} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 2\sqrt{2}\, m l \left(-\sin\theta\right) \dot{\theta} \dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{10}{3} m l^2 \ddot{\theta} + 2\sqrt{2}\, m l \left(\cos\theta\, \ddot{y} - \sin\theta\, \dot{\theta}\, \dot{y}\right)$$

Dunque, l'EL relativo alla coordinata θ è:

$$(8.2) \quad \frac{10}{3} m l^2 \ddot{\theta} + 2\sqrt{2}\, m l \left(\cos\theta\, \ddot{y} - \cancel{\sin\theta\, \dot{\theta}\, \dot{y}}\right) + \cancel{2\sqrt{2}\, m l \sin\theta\, \dot{\theta}\, \dot{y}} =$$

$$\overset{(3.4b)}{=} - l\sqrt{2}\left(2mg\cos\theta + F\sin\theta\right)$$

Il modello è conservativo, come abbiamo già visto in statica. Inoltre, è soggetto a vincoli fissi e bilateri. Quindi, per il teorema di conservazione dell'energia meccanica, ammette l'energia come integrale primo di moto. Quindi

$$E(t) = K + V = E_{|t=0}$$

cioè, dalla (7.3) e (3.3),

(9.1) $$E_{|t=0} = \frac{5}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 + 2m\dot{y}^2 + 2\sqrt{2}\, m l \cos\theta\, \dot{y}\dot{\theta} + \frac{1}{2} c y^2 + 4mgy + l\sqrt{2}\,(2mg\sin\theta - F\cos\theta)$$

La costante dell'energia lungo il moto con condizioni iniziali

$$y(0)=0\,,\quad \dot{y}(0)=0\,,\quad \theta(0)=0\,,\quad \dot{\theta}(0)=0$$

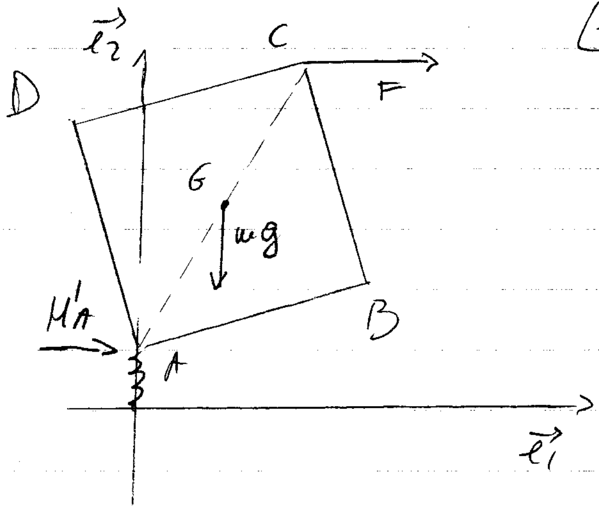
vale

(9.2) $$E_{t=0} = -F l \sqrt{2}$$

6) Reazioni dinamiche

10

Per calcolare H'_A utilizziamo la I ECD proiettata lungo l'asse $\vec{e}_1$.



$$\vec{R}^{\,ext} \cdot \vec{e}_1 = 4m \, \ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_1$$

Dalla (7.2) ricaviamo che

$$(10.1) \quad \ddot{\vec{x}}_G = \frac{l}{\sqrt{2}} \left(-\sin\theta\,\ddot{\theta} - \cos\theta\,\dot{\theta}^2 \right) \vec{e}_1 + \left(\ddot{y} + \frac{l}{\sqrt{2}} \left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2 \right) \right) \vec{e}_2$$

Quindi,

$$H'_A + F = 4m \frac{l}{\sqrt{2}} \left(-\sin\theta\,\ddot{\theta} - \cos\theta\,\dot{\theta}^2 \right)$$

cioè

$$(10.2) \quad H'_A = -2\sqrt{2}\, m l \left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2 \right) - F$$

■