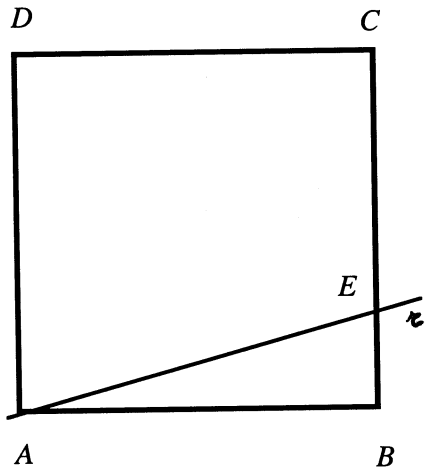
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 9 giugno 2009

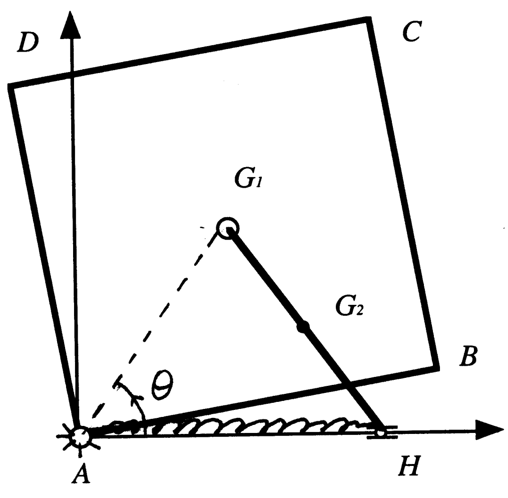
(G. Tondo)



È data una **lamina** quadrata omogenea di lato l e massa m.

1) Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto alla retta passante per il punto A e per il punto E tale che $\overline{BE} = l/4$.

STATICA.



Si vincoli la lamina in un piano **verticale** con una cerniera liscia in A e la si colleghi, con una cerniera interna fissata nel centro G_1, all' estremità di un'asta omogenea di massa m e lunghezza pari ad $\overline{AG_1}$. Si vincoli l'altra estremità H dell'asta a scorrere senza attrito su un asse orizzontale. Le forze attive sono: il peso proprio della lamina e dell'asta, la forza di richiamo della molla di costante elastica c, collegata al vertice A della lamina e all'estremo H dell'asta.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari all'equilibrio in A e in H, quando è possibile.

DINAMICA.

Inoltre si chiede di:

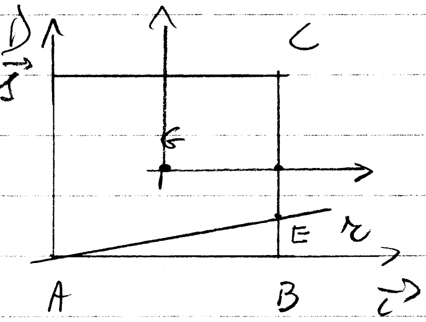
4) scrivere un' equazione differenziale pura di moto;

5) scrivere un integrale primo di moto a partire dalle condizioni iniziali $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$;

6) calcolare le reazioni vincolari in A e in H, durante il moto, in funzione della coordinate libera.

Tema d'esame del 9/06/2009

1) Calcolo di $I_r = \text{vers}(E-A) \cdot \mathbb{I}_A(\text{vers}(E-A))$



Prima calcoliamo la matrice d'inerzia I_A rispetto alla terna $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$I_A = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x + I_y \end{bmatrix} \qquad I_x = \frac{1}{3} m l^2 = I_y$$

$$I_{xy} = -\frac{m}{l^2}\int_0^l dx \int_0^l dy\, xy = -\frac{m}{l^2}\int_0^l x\,dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^l = -\frac{m\cancel{l^2}}{2\cancel{l^2}}\int_0^l x\,dx =$$

$$= -\frac{m}{2}\frac{l^2}{2} = -\frac{1}{4} m l^2$$

Quindi

$$I_A = m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{vers}(E-A) = \frac{l\left(\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}\right)}{|E-A|} = \frac{4}{\sqrt{17}}\left(\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}\right)$$

Quindi

$$I_r = \frac{4}{\sqrt{17}}\left[1, \frac{1}{4}\right] m l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}}\left[1, \frac{1}{4}\right] = \frac{16}{17} m l^2 \left[1, \frac{1}{4}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{16}{17} m l^2 \left[1, \frac{1}{4}\right] \begin{bmatrix} \frac{13}{48} \\ -1/6 \end{bmatrix} = \frac{16}{17} m l^2 \left(\frac{13}{48} - \frac{1}{24}\right) = \frac{\cancel{16}^{1}}{17} m l^2 \frac{11}{\cancel{48}_3} = \frac{11}{51} m l^2$$

Analisi cinematica

Il modello è un sistema articolato costituito da 2 corpi rigidi, la lamina e l'asta, vincolati con la cerniera interna in G_1, con la cerniera a terra in A e con il carrello in H. I gradi di libertà del sistema sono pari ad 1, come si verifica con il metodo dei congelamenti successivi. Infatti, se si congela lo spostamento rotatorio della lamina intorno all'asse $\vec{e}_3$ passante per A, il modello è completamente congelato in tutte le configurazioni, tranne in quelle in cui G_1 e H sono allineati lungo l'asse $\vec{e}_2$. In tali configurazioni, l'asta ammette un campo di spostamenti virtuali (ma non ammette spostamenti finiti), quindi il modello è labile. In conclusione, prendendo come coordinata libera l'angolo θ di figura, lo spazio di configurazione del modello è

$$\mathcal{C}_V = S^1 \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2} \right\} \equiv \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Statica

1) Le forze attive sono conservative, i vincoli sono lisci, quindi la sollecitazione è conservativa e ammette l'energia potenziale

(3.1) $$V(\theta) = \frac{1}{2} c\, \overline{AH}^2 - m\vec{g}\cdot\vec{x}_{G_1} - m\vec{g}\cdot\vec{x}_{G_2}$$

$$= \frac{1}{2} c\left(2\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2 + mg\frac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta + mg\frac{l}{2\sqrt{2}}\sin\theta$$

$$= c\, l^2\cos^2\theta + \frac{3}{2\sqrt{2}} mg\, l\sin\theta$$

Calcoliamo i punti critici di $V(\theta)$.

$$V'(\theta) = -2c\, l^2\cos\theta\sin\theta + \frac{3}{2\sqrt{2}} mg\, l\cos\theta = -Q_\theta$$

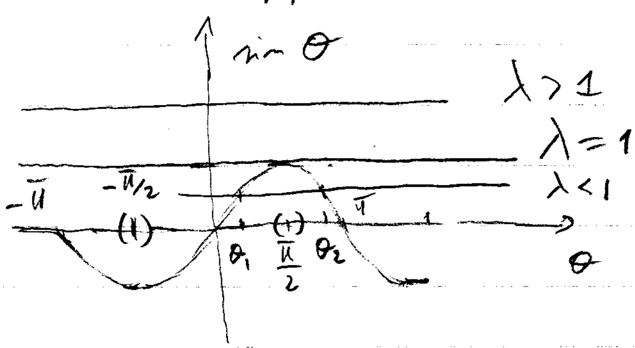
L'equazione pura di equilibrio è:

$$\cos\theta\left(-2c\, l^2\sin\theta + \frac{3}{2\sqrt{2}} mg\, l\right) = 0 ,$$

che è equivalente alle equazioni

(3.2) $\cos\theta = 0$ OR $\sin\theta = \dfrac{3}{4\sqrt{2}}\dfrac{mg}{cl} =: \lambda > 0$

Le soluzioni della I eq. (3.2) sono $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, che scartiamo poiché sono configurazioni a vincoli inefficaci.
Le soluzioni della II eq. (3.2)



se $\lambda > 1$ Nessuna soluz.

se $\lambda = 1$ $\theta_e = \pi/2$, da scartare

se $\lambda < 1$ $\theta_1 = \arcsin\lambda$

$\theta_2 = \pi - \arcsin\lambda$

Stabilità degli equilibri

Valutiamo il segno di $V''(\theta)$ nelle 2 configurazioni di equilibrio θ_1 e θ_2, che $\exists$ se $\lambda < 1$

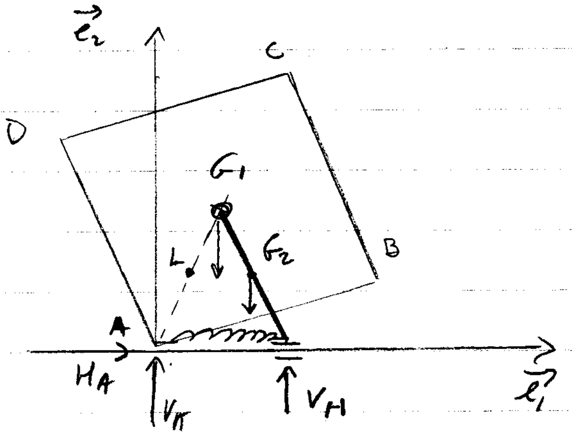
$$V''(\theta) = -2cl^2 \cos 2\theta - \frac{3}{2\sqrt{2}} mgl \sin\theta$$

Quindi

$$V''(\theta_e) = -2cl^2(1-2\lambda^2) - \frac{3}{2\sqrt{2}} mgl\lambda = -2cl^2(1-2\lambda^2+\lambda^2)$$

$$= 2cl^2(\lambda^2-1) < 0 \quad \text{se } \lambda < 1$$

Quindi $V''(\theta_e) < 0 \Rightarrow \theta_e$ punti di max. $\Rightarrow$ eq. <u>instabile</u>



5) Reazioni vincolari all'equilibrio

le reazioni incognite sono H_A, V_A, V_H. Quindi ci servono 3 equazioni. Consideriamo

$$(5.1)\begin{cases} \vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ \vec{M}^{ext}_A \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases}$$

Si noti che la molla è interna al modello, quindi la sua sollecitazione (coppia di forze a braccio nullo) non entra nelle ECS (5.1).

$$(5.2)\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_H - 2mg = 0 \\ -\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta \, mg - \frac{l}{2\sqrt{2}}\cos\theta \, mg + V_H \frac{2l}{\sqrt{2}}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

. Consideriamo l'ultima equazione

$$\frac{l\cos\theta}{\sqrt{2}}\left(-\frac{3}{2}mg + V_H 2\right) = 0$$

$\cos\theta = 0 \Leftarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}$

$\cos\theta \neq 0$: $\boxed{V_H = \frac{3}{4}mg} > 0$

N.B. Si noti che, se $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ (configurazioni labili) la reazione V_H è indeterminata. Ecco perché abbiamo scartato le suddette config.

In conclusione, sostituendo nel sistema (5.2) si trova

$$H_A = 0, \quad V_A = \frac{5}{4}mg, \quad V_H = \frac{3}{4}mg.$$

Dinamica

Scriviamo l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial K}{\partial \theta} = Q_\theta$$

A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello:

$$(6.1)\quad K = K^{(\text{lamina})} + K^{(\text{asta})}$$

$$K^{(\text{lamina})} = \frac{1}{2} I_{Az}^{(\text{lamina})} \dot\theta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} m l^2\right)\dot\theta^2 = \frac{1}{3} m l^2 \dot\theta^2$$

$$K^{(\text{asta})} = \frac{1}{2} m V_{G_2}^2 + \frac{1}{2} I_{G_2}^{(\text{asta})} \dot\theta^2 \qquad I_{G_2 z}^{(\text{asta})} = \frac{1}{12} m \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{24} m l^2$$

$$(6.2)\quad \vec{x}_{G_2} = \vec{x}_L + (\vec{x}_{G_2} - \vec{x}_L) = \frac{l}{2\sqrt{2}}\left(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right) + \frac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta\,\vec{e}_1$$

$$= \frac{l}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}\cos\theta\,\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2\right)$$

$$\vec{V}_{G_2} = \frac{l}{2\sqrt{2}}\left(-3\,\dot\theta\sin\theta\,\vec{e}_1 + \dot\theta\cos\theta\,\vec{e}_2\right)$$

$$|\vec{V}_{G_2}|^2 = \frac{l^2}{8}\left(\left(-3\,\dot\theta\sin\theta\right)^2 + \left(\dot\theta\cos\theta\right)^2\right) = \frac{l^2}{8}\dot\theta^2\left(9\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$= \frac{l^2}{8}\left(1 + 8\sin^2\theta\right)\dot\theta^2 = l^2\left(\frac{1}{8} + \sin^2\theta\right)\dot\theta^2$$

Quindi

$$(6.3)\quad K^{(\text{asta})} = \frac{1}{2\cdot 24} m l^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{1}{8} + \sin^2\theta\right)\dot\theta^2 = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{1}{6} + \sin^2\theta\right)\dot\theta^2$$

Allora

$$K = K^{(lamina)} + K^{(asta)} = \frac{1}{3} m l^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{1}{6} + \sin^2\theta\right)\dot\theta^2$$
$$= \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{5}{6} + \sin^2\theta\right)\dot\theta^2$$

Dunque

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = m l^2 \left(\frac{5}{6} + \sin^2\theta\right)\dot\theta \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = m l^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = m l^2 \left(\frac{5}{6} + \sin^2\theta\right)\ddot\theta + 2 m l^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot\theta^2$$

In conclusione, l'eq. di Lagrange si scrive

$$m l^2 \left(\frac{5}{6} + \sin^2\theta\right)\ddot\theta + m l^2 \sin 2\theta\,\dot\theta^2 - m l^2 \frac{\sin 2\theta}{2}\dot\theta^2 = c l^2 \sin 2\theta - \frac{3mgl\cos\theta}{2\sqrt2}$$

cioè

$$(7.1)\quad m l^2 \left(\frac{5}{6} + \sin^2\theta\right)\ddot\theta + \frac{m l^2}{2}\sin 2\theta\,\dot\theta^2 = c l^2 \sin 2\theta - \frac{3mgl}{2\sqrt2}\cos\theta$$

Abbiamo già visto in statica che il modello è conservativo, i vincoli sono lisci e fissi, quindi si conserva l'energia meccanica. Quindi

$$E(t=0) = E(t) = K + V = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{5}{6} + \sin^2\theta\right)\dot\theta^2 + c l^2 \cos^2\theta + \frac{3mgl}{2\sqrt2}\sin\theta$$

$E(t=0) = c l^2$, perciò

$$(7.2)\quad c l^2 = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{5}{6} + \sin^2\theta\right)\dot\theta^2 + c l^2 \cos^2\theta + \frac{3mgl}{2\sqrt2}\sin\theta$$

Reazioni dinamiche

Utilizziamo le ECD applicate a tutto il modello

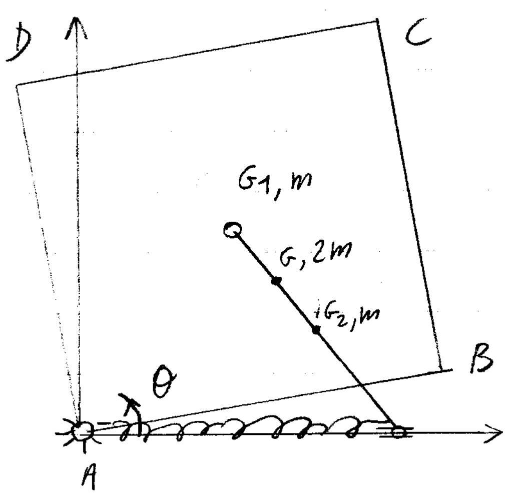
$$(8.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_1 = 2m\, \ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_2 = 2m\, \ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{M}^{est}_A \cdot \vec{e}_3 = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{L}_A \cdot \vec{e}_3\right) \end{cases}$$

Calcoliamo il centro di massa G del modello

$$(8.2)\quad \vec{x}_G = \frac{m\,\vec{x}_{G_1} + m\,\vec{x}_{G_2}}{2m} \overset{(6.2)}{=} \frac{1}{2}\,\frac{l}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right) + \frac{1}{2}\frac{l}{\sqrt{2}\,2}\left(3\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right)$$

$$= \frac{l}{2\sqrt{2}}\left(\frac{5}{2}\cos\theta\,\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2\right) = \frac{l}{4\sqrt{2}}\left(5\cos\theta\,\vec{e}_1 + 3\sin\theta\,\vec{e}_2\right)$$

N.B. Applicando la proprietà distributiva, il punto G si può calcolare graficamente



Quindi, in questo caso, G coincide con il punto medio del segmento $G_1 G_2$

Derivando rispetto al tempo la (8.2)

$$\dot{\vec{x}}_G = \frac{l}{4\sqrt{2}}\left(-5\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_1 + 3\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_2\right)$$

$$(9.1)\quad \ddot{\vec{x}}_G = \frac{l}{4\sqrt{2}}\left(-5\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_1 + 3\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_2\right)$$

Quindi

$$(9.2)\quad H'_A = \frac{\cancel{2}\,m\,l}{\cancel{2}\,4\sqrt{2}}\left(-5\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\right)$$

$$(9.3)\quad V'_A + V'_H - 2mg = \frac{m\,l}{2\sqrt{2}}\,3\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)$$

Calcoliamo ora $\vec{L}_A$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_A^{(lamina)} + \vec{L}_A^{(asta)}$$

$$\vec{L}_A^{(lamina)} = I_{Az}^{(lamina)}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_3 = \frac{2}{3}\,m\,l^2\,\dot{\theta}\,\vec{e}_3$$

$$\vec{L}_A^{(asta)} = I_{G_2 z}^{(asta)}\left(-\dot{\theta}\right)\vec{e}_3 + \left(\vec{x}_{G_2} - \vec{x}_A\right)\times m\,\vec{V}_{G_2}$$

$$= -\frac{1}{24}\,m\,l^2\,\dot{\theta}\,\vec{e}_3 + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{l}{2\sqrt{2}}\,3\cos\theta & \frac{l}{2\sqrt{2}}\sin\theta & 0 \\ \frac{l}{2\sqrt{2}}\left(-3\dot{\theta}\sin\theta\right) & \frac{l}{2\sqrt{2}}\,\dot{\theta}\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{m\,l^2}{24}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_3 + \vec{e}_3\,\frac{l^2}{8}\left(\dot{\theta}\,3\cos^2\theta + 3\dot{\theta}\sin^2\theta\right) = m\,l^2\,\dot{\theta}\left(-\frac{1}{24} + \frac{3}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,m\,l^2\,\dot{\theta}$$

Quindi

(10.1) $\vec{L}_A = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}\, \vec{e}_3 + \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}\, \vec{e}_3 = m l^2 \dot{\theta}\, \vec{e}_3$

Dunque, la III eq. del sistema (8.1) diventa

$$-\frac{3mgl}{2\sqrt{2}} \cos\theta + \frac{2l\cos\theta}{\sqrt{2}} V_H' = m l^2 \ddot{\theta}$$

da cui

(10.2)
$$\begin{cases} V_H' = \dfrac{m l^2 \ddot{\theta} + \dfrac{3mgl\cos\theta}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{2l}{\sqrt{2}}\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{2}\, m l^{\cancel{2}} \ddot{\theta}}{2\cancel{l}\cos\theta} + \dfrac{3mg}{4} \\[2ex] V_A' = 2mg + \dfrac{3ml}{2\sqrt{2}}\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right) - \dfrac{ml}{\sqrt{2}\cos\theta}\ddot{\theta} + \dfrac{3mg}{4} \\[2ex] H_A' = -\dfrac{3ml}{2\sqrt{2}}\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) \end{cases}$$

Ora, dalla eq. dell'energia meccanica (7.2) ricaviamo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{c l^2 (1-\cos^2\theta) - \dfrac{3mgl}{2\sqrt{2}}\sin\theta}{\dfrac{1}{2} m l^2 \left(\dfrac{5}{6} + \sin^2\theta\right)} = f^2(\theta),$$

che, sostituita nell'eq. di Lagrange (7.1), fornisce

$$\ddot{\theta} = -\frac{ml^2}{2}\sin 2\theta \; \frac{c l^2 (1-\cos^2\theta) - \dfrac{3mgl}{2\sqrt{2}}\sin\theta}{\dfrac{1}{2}\left(m l^2\left(\dfrac{5}{6}+\sin^2\theta\right)\right)^2} + \frac{c l^2 \sin 2\theta - \dfrac{3mgl}{2\sqrt{2}}\cos\theta}{m l^2\left(\dfrac{5}{6}+\sin^2\theta\right)} = g(\theta)$$

Sostituendo la $f^2(\theta)$ e la $g(\theta)$ nel sistema (10.2) si ottiene il risultato cercato.