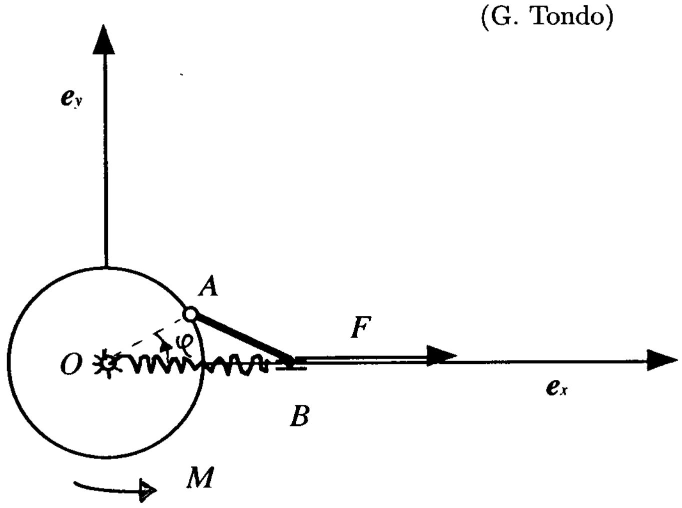
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 12 luglio 2010

(G. Tondo)



Si consideri il modello articolato di figura, posto nel piano **orizzontale**, costituito da un disco omogeneo di raggio R e massa $2m$ incernierato in O e da un'asta omogenea AB di lunghezza R e massa m, incernierata al disco in A e appoggiata in B a una guida fissa (vincoli lisci e bilateri). Sul disco agisce una coppia di momento $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$, sull'asta una forza $\mathbf{F}_B = F\mathbf{e}_x$. Inoltre una molla, di costante elastica c, è fissata al punto B dell'asta e al centro della cerniera fissa in O.

STATICA.

1) Determinare il valore di M affinché il modello stia in equilibrio per $\varphi = \pi/6$.

Da ora in poi, assegnato a M il valore su determinato:

2) discutere la stabilità della configurazione d'equilibrio $\varphi = \pi/6$;

3) calcolare le reazioni vincolari esterne in O e in B all'equilibrio $\varphi = \pi/6$.

DINAMICA.

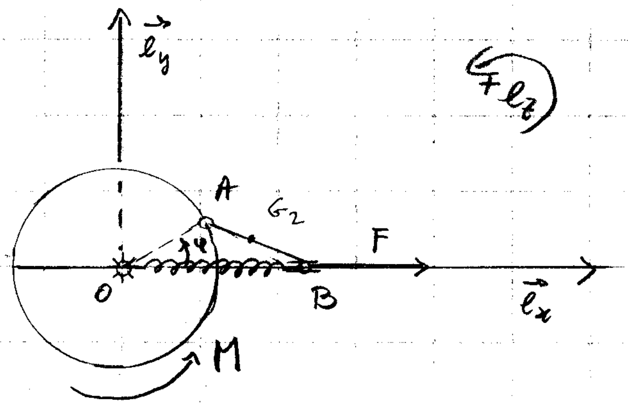
4) scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

5) calcolare le reazioni vincolari dinamiche esterne in O e in B in funzione di φ, a partire dalle condizioni iniziali $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$;

6) calcolare le reazioni vincolari dinamiche in A in funzione di φ, a partire dalle condizioni iniziali $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ (esame da 6 CFU);

6a) determinare l'equazione di Lagrange linearizzata intorno alla configurazione $\varphi = \pi/6$ e la frequenza delle piccole oscillazioni (esame da 9 CFU).

Tema del 12 luglio 2010



Il modello è un sistema articolato composto da 2 corpi rigidi: disco + asta. Ha un solo g. l., come si verifica con il metodo dei congelamenti successivi.

Scegliamo come coordinata libera l'angolo φ di figura, con $\varphi \in \mathbb{R}$.

Statica

1) Utilizziamo il PLV. Poiché i vincoli sono non dissipativi e bilateri, nella configurazione di equilibrio assegnata $\varphi = \frac{\pi}{6}$ deve necessariamente risultare che

$$(1.1) \qquad LV^{(att)}_{|\varphi=\pi/2} = 0$$

Calcoliamo il $LV^{(att)}$ in una generica configurazione φ.

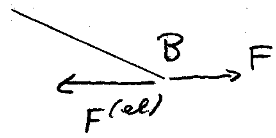
$$(1.2) \qquad LV^{(att)} = LV^{(att \to disco)} + LV^{(att \to asta)}$$

Poiché l'unica sollecitazione attiva che agisce sul disco è il momento M (la molla NON è fissata al disco ma a terra!) si ha

$$(1.3) \qquad LV^{(att,\, disco)} = \vec{M} \cdot \vec{X} = M \vec{e}_z \cdot \delta\varphi \vec{e}_z = M \delta\varphi \quad \forall \delta\varphi$$

Sull'asta agiscono due forze attive concentrate in B

(2.1) $\vec{F}_B = F\,\vec{e}_x$



(2.2) $\vec{F}_B^{(el)} = -c\,(B-O) = -2cR\cos\varphi\,\vec{e}_x$, $\delta\vec{x}_B = -2R\sin\varphi\,\delta\varphi\,\vec{e}_x$

Pertanto,

(2.3)
$$LV^{(att\to asta)} = \left(\vec{F}_B + \vec{F}_B^{(el)}\right)\cdot\delta\vec{x}_B =$$
$$= \left(F - 2cR\cos\varphi\right)\vec{e}_x \cdot \left(-2R\sin\varphi\,\delta\varphi\,\vec{e}_x\right)$$
$$= -2R\sin\varphi\,\left(F - 2cR\cos\varphi\right)\delta\varphi$$

Quindi,

(2.4)
$$LV^{(att)} = \underbrace{\left(M - 2RF\sin\varphi + 2cR^2\sin 2\varphi\right)}_{Q_\varphi}\delta\varphi$$

da cui segue che

(2.5)
$$LV^{(att)}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = M - RF + cR^2\sqrt{3}$$

Pertanto, la (1.1) è soddisfatta se e solo se

(2.6)
$$M = R\left(F - cR\sqrt{3}\right)$$

N.B. Se $F > cR\sqrt{3}$ allora $M > 0$ (senso antiorario)
se $F < cR\sqrt{3}$ allora $M < 0$ (senso orario).

2) Stabilità di $\varphi = \pi/6$

Il modello ha 1 g.l. (macchina semplice), vincoli non dissipativi, bilateri e fissi, sollecitazione posizionale. Quindi è conservativo, cioè ammette l'energia potenziale

(3.1) $$V(\varphi) = -\int Q_\varphi \, d\varphi$$

$$\overset{(2.4)}{=} -\int \left(M - 2RF\sin\varphi + 2cR^2 \sin 2\varphi\right) d\varphi$$

$$= -M\varphi - 2RF\cos\varphi + cR^2 \cos 2\varphi$$

Valutiamo $V''\left(\varphi = \frac{\pi}{6}\right)$

(3.2) $$V'(\varphi) = -M + 2RF\sin\varphi - 2cR^2 \sin 2\varphi \overset{(2.4)}{=} -Q_\varphi$$

(3.3) $$V''(\varphi) = 2RF\cos\varphi - 4cR^2 \cos 2\varphi$$

Pertanto

(3.4) $$V''\left(\varphi = \frac{\pi}{6}\right) = \cancel{2} RF\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \overset{2}{\cancel{4}}cR^2 \frac{1}{\cancel{2}} = R\left(F\sqrt{3} - 2cR\right)$$

Allora,

se $\frac{F\sqrt{3}}{2cR} > 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$ è min per $V \Rightarrow$ eq. stabile

se $\frac{F\sqrt{3}}{2cR} < 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$ è max per $V \Rightarrow$ eq. instabile

Se, invece, $\dfrac{F\sqrt{3}}{2cR} = 1 \Rightarrow V''(\varphi = \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow$ caso dubbio.

Allora, poiché

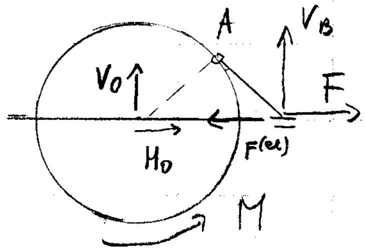
$$V'''(\varphi) = -2RF\sin\varphi + 8cR^2\sin 2\varphi \quad ,$$

segue che

$$V'''(\varphi = \tfrac{\pi}{6}) = -RF + 4cR^2\sqrt{3}\Big|_{\frac{F\sqrt{3}}{2cR}=1} = -R\frac{2cR}{\sqrt{3}} + 4cR^2\sqrt{3}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{3}}cR^2 \neq 0 \Rightarrow \text{flesso per } V \Rightarrow \text{instabilità}$$

3) Reazioni vincolari in O e B all'equilibrio $\varphi = \frac{\pi}{6}$



$$M = R\left(F - cR\sqrt{3}\right)$$

Se il modello è in equilibrio per $\varphi = \frac{\pi}{6}$, devono essere soddisfatte le ECS

$$(5.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{(est)} = \vec{0} \\ \vec{M}_0^{(est)} = 0 \end{cases} \qquad (5.2)\quad \begin{cases} H_0 + F - 2cR\cos\varphi_e = 0 \\ V_0 + V_B = 0 \\ R\left(F - cR\sqrt{3}\right) + V_B\, 2R\cos\varphi_e = 0 \end{cases}$$

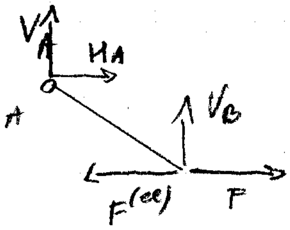
La soluzione di (5.2) valutata in $\varphi = \frac{\pi}{6}$ è

$$(5.6)\quad \begin{cases} V_B = \dfrac{-\cancel{R}\left(F - cR\sqrt{3}\right)}{2\cancel{R}\cos\frac{\pi}{6}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(F - cR\sqrt{3}\right) \\ V_0 = -V_B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(F - cR\sqrt{3}\right) \\ H_0 = cR\sqrt{3} - F \end{cases}$$

N.B. Il punto 1) può essere risolto utilizzando solo le ECS. Infatti, se al sistema (5.1) con M incognito

$$(5.7)\quad \begin{cases} H_0 + F - 2cR\cos\varphi_e = 0 \\ V_0 + V_B = 0 \\ M + V_B\, 2R\cos\varphi_e = 0 \end{cases}$$

aggiungiamo la II ECS applicata alla sola asta



$$(6.1) \quad \vec{M}_A^{(est, \to asta)} = 0$$

otteniamo

incognite: (H_0, V_0, V_B, M)

$$(6.2) \quad \begin{cases} H_0 = -F + 2cR\cos\varphi_e \\ V_0 = -V_B \\ V_B = -M/(2R\cos\varphi_e) \\ V_B\, R\cos\varphi_e + (F - 2cR\cos\varphi)\, R\sin\varphi_e = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che, per ottenere un'equazione pura di equilibrio, possiamo sostituire la III delle (6.2) nella (IV), trovando

$$-\frac{M}{2\cancel{R\cos\varphi_e}}\cancel{R\cos\varphi_e} + (F - 2cR\cos\varphi_e)\cancel{R}\sin\varphi_e = 0$$

Quindi

$$(6.3) \quad \begin{aligned} M &= 2R\sin\varphi_e\,(F - 2cR\cos\varphi_e) \\ &= R\,(F - cR\sqrt{3}) \end{aligned}$$

come in (7.6). Le altre eq. (6.2) danno le reazioni vincolari in O e B (5.6).

Dinamica

4) Scriviamo l'eq. di Lagrange

$$(7.1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad Q_\varphi \overset{(2.4),(6.3)}{=} R\left(F - cR\sqrt{3}\right) + - 2RF\sin\varphi + 2cR^2\sin 2\varphi$$

A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello:

$$K = K^{(disco)} + K^{(asta)}$$

$$K^{(disco)} = \frac{1}{2} J_{Oz}^{(disco)} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2m) R^2\right) = \frac{1}{2} m R^2$$

$$K^{(asta)} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{Gz}^{(asta)} \dot{\varphi}^2 \quad , \quad J_G^{(asta)} = \frac{1}{12} m R^2 ,$$

Calcoliamo $\vec{v}_G$, dove G è il c.m. dell'asta

$$(G - O) = \frac{R}{2}\left(3\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y\right)$$

$$(7.2) \qquad \vec{v}_G = \frac{d}{dt}(G_2 - O) = \frac{R}{2}\left(-3\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y\right)$$

$$v_G^2 = \frac{R^2}{4}\left[\left(3\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{R^2}{4}\left(9\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{R^2}{4}\left(8\sin^2\varphi + 1\right)\dot{\varphi}^2$$

Allora,

$$K^{(asta)} = \frac{1}{2} m R^2\left(2\sin^2\varphi + \frac{1}{4}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{12} m R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m R^2\left(2\sin^2\varphi + \frac{1}{3}\right)\dot{\varphi}^2$$

Pertanto,

$$(8.1)\quad K = \frac{1}{2} m R^2 \left(2 \sin^2 \varphi + \frac{4}{3} \right) \dot{\varphi}^2$$

Quindi,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \left(2 \sin^2 \varphi + \frac{4}{3} \right) \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 2 m R^2 \sin\varphi \cos\varphi \, \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m R^2 \left(4 \sin\varphi \cos\varphi \, \dot{\varphi}^2 + \left(2 \sin^2\varphi + \frac{4}{3} \right) \ddot{\varphi} \right)$$

Allora, l'eq. di Lagrange risulta

$$m R^2 \left(2 \sin^2 \varphi + \frac{4}{3} \right) \ddot{\varphi} + 2 m R^2 \sin 2\varphi \, \dot{\varphi}^2 - m R^2 \sin 2\varphi \, \dot{\varphi}^2 = Q_\varphi ,$$

cioè

$$(8.2)\quad 2 m R^2 \left(\sin^2 \varphi + \frac{2}{3} \right) \ddot{\varphi} + m R^2 \sin 2\varphi \, \dot{\varphi}^2 = R\left(F - c R \sqrt{3}\right) - 2 R F \sin\varphi + 2 c R^2 \sin 2\varphi$$

5) Reazioni dinamiche in O e in B in funzione di φ

Scriviamo le ECD per tutto il modello.

$$(9.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{ext} = \cancel{2m\ddot{\vec{x}}_0} + m\ddot{\vec{x}}_G \\ \vec{M}_0^{ext} = \dfrac{d\vec{L}_0}{dt} \end{cases}$$

Dalla (7.2) ricaviamo

$$(9.2)\quad \ddot{\vec{x}}_G = \frac{R}{2}\left[-3\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_x + \left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_y\right]$$

Calcoliamo $\vec{L}_0$.

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_0^{(disco)} + \vec{L}_0^{(asta)}$$

$$\vec{L}_0^{(disco)} = \mathbb{I}_0\left(\vec{\omega}^{(disco)}\right) = J_{0z}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z = mR^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{L}_0^{(asta)} = \vec{L}_G^{(asta)} + \left(\vec{x}_G - \vec{x}_0\right)\times m\vec{V}_G =$$

$$= \mathbb{I}_G\left(\vec{\omega}^{(asta)}\right) + m\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{3}{2}R\cos\varphi & \frac{R}{2}\sin\varphi & 0 \\ -\frac{3}{2}R\sin\varphi\,\dot{\varphi} & \frac{R}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -J_{3G}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + m\,\vec{e}_z\left(\frac{3}{4}R^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} + \frac{3}{4}R^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{12}mR^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z =$$

$$= \frac{2}{3}mR^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

Pertanto,

$$\vec{L}_O = mR^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \frac{2}{3}mR^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z = \frac{5}{3}mR^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \tag{10.1}$$

Allora, le (9.1) si scrivono

$$\begin{cases} H'_O + F - 2cR\cos\varphi = -\frac{3}{2}mR\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \\ V'_O + V'_B = m\frac{R}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \\ R\left(F - cR\sqrt{3}\right) + V'_B\,2R\cos\varphi = \frac{5}{3}mR^2\ddot{\varphi} \end{cases} \tag{10.2}$$

che risolte risp. alle incognite (H'_O, V'_O, V'_B) forniscono

$$\begin{cases} H'_O = -F + 2cR\cos\varphi - \frac{3}{2}mR\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \\ V'_O = -\dfrac{\frac{5}{3}mR\ddot{\varphi} - \left(F - cR\sqrt{3}\right)}{2\cos\varphi} + m\frac{R}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \\ V'_B = \dfrac{\frac{5}{3}mR^{\cancel{2}}\ddot{\varphi} - \cancel{R}\left(F - cR\sqrt{3}\right)}{2\cancel{R}\cos\varphi} \end{cases} \tag{10.3}$$

Per rispondere alla domanda 5) dobbiamo sostituire, nel lato destro delle (10.3), $\dot{\varphi}^2$ e $\ddot{\varphi}$ in termini della coordinata libera φ. A tale scopo, utilizziamo l'integrale primo dell'energia meccanica, che si conserva poiché il modello è una macchina semplice conservativa con vincoli non dissipativi, bilateri e fissi.

Quindi,

$$E = K + V = E_{|t=0} \tag{11.1}$$

cioè

$$mR^2\left(\sin^2\varphi + \frac{2}{3}\right)\dot{\varphi}^2 - R\left(F - cR\sqrt{3}\right)\varphi - 2RF\cos\varphi + cR^2\cos 2\varphi = E_{|t=0}$$

Pertanto, con le condizioni iniziali $\varphi(0)=0$, $\dot{\varphi}(0)=0$ si ha che durante il moto

$$mR^2\left(\sin^2\varphi + \frac{2}{3}\right)\dot{\varphi}^2 - R\left(F - cR\sqrt{3}\right)\varphi - 2RF\cos\varphi + cR^2\cos 2\varphi = \tag{11.2}$$
$$= cR^2 - 2RF$$

Allora, durante il moto

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\cancel{R}\left(F - cR\sqrt{3}\right)\varphi + 2\cancel{R}F\cos\varphi - cR^{\cancel{2}}\cos 2\varphi + cR^{\cancel{2}} - 2\cancel{R}F}{mR^{\cancel{2}}\left(\sin^2\varphi + \frac{2}{3}\right)} = \tag{11.3}$$
$$= g(\varphi)$$

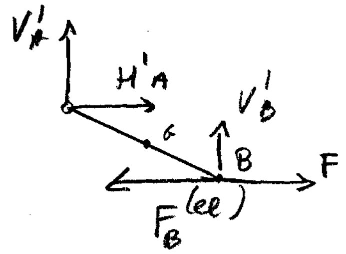
Inoltre, dall' eq. di Lagrange (8.2) si trova

$$\ddot{\varphi} = \frac{-mR^{\cancel{2}}\sin 2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cancel{R}\left(F - cR\sqrt{3}\right) - 2\cancel{R}F\sin\varphi + 2cR^{\cancel{2}}\sin 2\varphi}{2mR^{\cancel{2}}\left(\sin^2\varphi + \frac{2}{3}\right)}$$
$$= \frac{-mR\sin 2\varphi\, g(\varphi) + \left(F - cR\sqrt{3}\right) - 2F\sin\varphi + 2cR\sin 2\varphi}{2mR\left(\sin^2\varphi + \frac{2}{3}\right)} \tag{11.4}$$

Sostituendo la (11.3) e (11.4) in (10.3) si ottiene la risposta alla domanda 5).

6) Reazione dinamiche in A in funzione di φ

Applichiamo la IECD alla sola asta:



$$(12.1) \qquad \vec{R}^{\,est \to asta} = m\,\ddot{\vec{x}}_G \,, \qquad \ddot{\vec{x}}_G = (9.2)$$

che proiettata lungo gli assi fornisce

$$(12.2) \qquad \begin{cases} \vec{e}_x: & H'_A + F - 2cR\cos\varphi = -\dfrac{3}{2}mR\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \\ \vec{e}_y: & V'_A + V'_B = \dfrac{mR}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \end{cases}$$

Risolvendo la prima rs. a H'_A e la seconda rs. a V'_A, dopo avervi sostituito la V'_B calcolata in (10.3), si trova

$$(12.3) \qquad \begin{cases} H'_A = -F + 2cR\cos\varphi - \dfrac{3}{2}mR\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \\ V'_A = -\dfrac{\frac{5}{3}mR\,\ddot{\varphi} + \left(F - cR\sqrt{3}\right)}{2\cos\varphi} + \dfrac{mR}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \end{cases}$$

Sostituendo a $\dot{\varphi}^2$ la (11.3) e a $\ddot{\varphi}$ la (11.4), si ottiene la risposta.

6a) Eq. di Lagrange linearizzata intorno alla configurazione $\varphi = \frac{\pi}{6}$ e frequenza delle piccole oscillazioni.

Introdotta la variabile scarto $x = \varphi - \frac{\pi}{6}$, l'eq. di Lagrange linearizzata nel caso conservativo è data da

(13.1) $$a(q_e)\,\ddot{x} + V''(q_e)\,x = 0,$$

dove $a(q)$ è la funzione t.c.

(13.2) $$K = \frac{1}{2}\,a(q)\,\dot{q}^2$$

e $V''(q)$ è la derivata seconda dell'energia potenziale. Nel nostro caso,

(13.3) $$a(q_e) = 2m\,R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\right) = 2m\,R^2\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{11}{6}\,m\,R^2,$$

mentre $V''(q_e)$ è data dalla (3.4).

Pertanto, l'eq. di Lagrange linearizzata intorno a $\varphi = \frac{\pi}{6}$ è

(13.4) $$\frac{11}{6}\,m\,R\,\ddot{x} + \left(F\sqrt{3} - 2cR\right)x = 0$$

e la frequenza delle piccole oscillazioni è

(13.5) $$\nu = \sqrt{\frac{6R\,(F\sqrt{3} - 2cR)}{11\,m\,R^2}}$$ se $F\sqrt{3} > 2cR \Rightarrow$ moti oscillatori