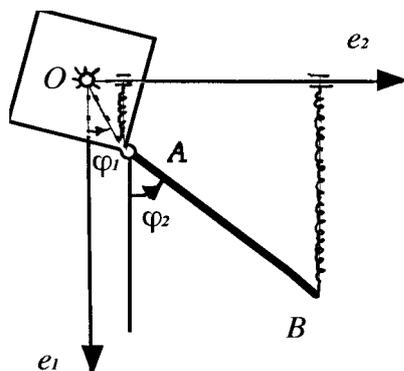


Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 13 settembre 2010

(G. Tondo)



Si consideri il modello articolato di figura, costituito da una lamina quadrata omogenea di massa m e lato l , libera di ruotare intorno al suo centro fisso O , e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2l$, incernierata sul vertice A della lamina (vincoli lisci e bilateri). Il sistema, posto in un piano **verticale**, è soggetto alle forze di richiamo \mathbf{F}_A e \mathbf{F}_B delle due molle di costante elastica, rispettivamente, c_1 e c_2 . Inoltre, è soggetto al peso proprio.

STATICA.

- 1) Verificare che la configurazione $\varphi_1 = \pi/6$ e $\varphi_2 = \pi/3$ è di equilibrio, se le costanti elastiche assumono i valori $c_1 = \frac{mg}{l} \sqrt{\frac{2}{3}}$, $c_2 = \frac{mg}{l} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Da ora in poi, assegnate alle costanti elastiche i valori suddetti:

- 2) discutere la stabilità della configurazione di equilibrio del punto 1);
- 3) calcolare le reazioni vincolari sulla lamina nei punti O e A , nella configurazione di equilibrio del punto 1).

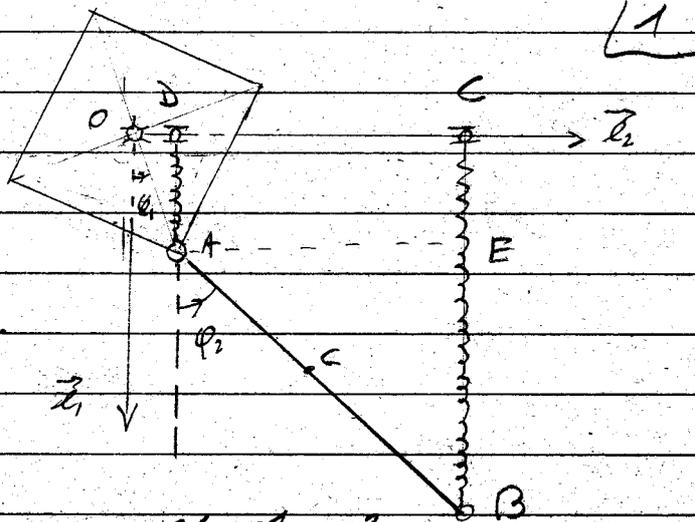
DINAMICA.

- 4) scrivere due equazioni differenziali pure di moto;
- 5) calcolare le reazioni vincolari sulla lamina nel punto O durante il moto, in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo;
- 6) scrivere le reazioni vincolari sulla lamina nel punto A durante il moto, in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo (esame da 6 CFU);
- 6a) determinare le equazioni di Lagrange linearizzate intorno alla configurazione di equilibrio del punto 1) e dire se i moti linearizzati sono oscillatori o lineari o iperbolici (esame da 9 CFU).



Tema del 13/09/2010

Il modello ha 2 g.l. come
si può verificare facilmente con
il metodo dei congelamenti successivi.
Le coordinate libere sono
 $-\bar{u} < \varphi_1 \leq \bar{u}$, $-\bar{v} < \varphi_2 \leq \bar{v}$



Quindi, lo spazio delle configurazioni $\mathcal{C}_V = S^1 \times S^1 = T^2$, cioè è
il toro bidimensionale.

Statica

Le forze applicate (molle + peso) sono conservative. Quindi,
il modello ammette energia potenziale, data da

$$(1.1) \quad V(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2} c_1 \overline{AD}^2 + \frac{1}{2} c_2 \overline{BC}^2 - m\vec{g} \cdot \vec{x}_G$$

trascurando l'energia potenziale gravitazionale della lamina
che si mantiene costante.

$$(1.2) \quad \begin{aligned} AD &= AO \cos \varphi_1 = \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1, & \overline{BC} &= \overline{AB} + \overline{BE} = \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 + 2l \cos \varphi_2 \\ \vec{x}_G &= \vec{x}_A + (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = \frac{l}{\sqrt{2}} (\cos \varphi_1 \vec{e}_1 + \sin \varphi_1 \vec{e}_2) + l (\cos \varphi_2 \vec{e}_1 + \sin \varphi_2 \vec{e}_2) \\ &= l \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 \right) \vec{e}_2 \right] \end{aligned}$$

Da cui,

$$(1.3) \quad V(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2} c_1 \frac{l^2}{2} \cos^2 \varphi_1 + \frac{1}{2} c_2 \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 + 2l \cos \varphi_2 \right)^2 - mgl \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 \right)$$

Scriviamo le equazioni pure di equilibrio.

$$(1) \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = -Q_1 = c_1 \frac{l^2}{2} \cos \varphi_1 (-\sin \varphi_1) + c_2 \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 + 2l \cos \varphi_2 \right) \frac{l}{\sqrt{2}} (-\sin \varphi_1) + \frac{mgl \sin \varphi_1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sin \varphi_1 \left[-\frac{c_1 l^2}{2} \cos \varphi_1 - \frac{c_2 l}{\sqrt{2}} \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 + 2l \cos \varphi_2 \right) + \frac{mgl}{\sqrt{2}} \right]$$

$$(2) \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = -Q_2 = c_2 \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 + 2l \cos \varphi_2 \right) (-2l \sin \varphi_2) + mgl \sin \varphi_2 =$$

$$= \sin \varphi_2 \left[-2l c_2 \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 + 2l \cos \varphi_2 \right) + mgl \right]$$

Verifichiamo che, se $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, $c_1 = \frac{mg\sqrt{2}}{l\sqrt{3}}$, $c_2 = \frac{mg\sqrt{2}}{l(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}$, Q_1 e Q_2 si annullano.

$$Q_1: \frac{1}{2} \left[\frac{-mg\sqrt{2}l^2\sqrt{3}}{2} - \frac{mg\sqrt{2}l}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} + \frac{2l}{2} \right) + \frac{mgl}{\sqrt{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} mgl \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] =$$

$$= \frac{mgl}{2} \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = 0$$

$$Q_2: \frac{\sqrt{3}}{2} \left[-2l \frac{mg\sqrt{2}}{l(2\sqrt{2}+\sqrt{3})} \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} + \frac{2l}{2} \right) + mgl \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} mgl \left[-\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 \right) + 1 \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} mgl \left[-\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + 1 \right] = 0$$

N.B. Se $c_1 = \frac{mg\sqrt{2}}{l\sqrt{3}}$ e $c_2 = \frac{mg\sqrt{2}}{l(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}$, la configurazione $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ non è l'unico equilibrio del modello, come si può verificare risolvendo le equazioni pure di equilibrio $Q_1 = 0$ o $Q_2 = 0$ rispetto a φ_1 e φ_2 .

N.B. In questo caso, per prima cosa ricavare 2 eq. pure di equilibrio con un uso accorto delle \overline{II} ECS. Poiché

$$\vec{M}_O = (\vec{x}_A - \vec{x}_O) \times \vec{F}_A + (\vec{x}_G - \vec{x}_O) \times m\vec{g} + (\vec{x}_B - \vec{x}_O) \times \vec{F}_B =$$

$$(2.1) = \left[\frac{l}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 c_1 \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 - \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \sin \varphi_2 + \frac{l}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 \right) mg + \right. \\ \left. + \left(2l \sin \varphi_2 + \frac{l}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 \right) c_2 \left(2l \cos \varphi_2 + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \right) \right] \vec{e}_3,$$

la \overline{II} ECS applicata a tutto il modello fornisce

$$(2.2) \sin \varphi_1 \left[c_1 \frac{l^2}{2} \cos \varphi_1 - \frac{mgl}{\sqrt{2}} + c_2 \frac{l}{\sqrt{2}} \left(2l \cos \varphi_2 + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \right) \right] + \\ + \sin \varphi_2 \left[-mgl + 2c_2 l \left(2l \cos \varphi_2 + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \right) \right] = 0$$

Inoltre, poiché

$$\vec{M}_A = (\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times m\vec{g} + (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \times \vec{F}_B = \\ = \left[-l \sin \varphi_2 mg + 2l \sin \varphi_2 c_2 \left(2l \cos \varphi_2 + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \right) \right] \vec{e}_3,$$

la \overline{II} ECS applicata alla sola asta fornisce

$$(2.3) \sin \varphi_2 \left(-mgl + 2lc_2 \left(2l \cos \varphi_2 + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \right) \right) = 0$$

Si osservi che le due equazioni pure (2.2) e (2.3) sono dipendenti (ma non coincidenti) con le equazioni pure (2.1) e (2.2). Precisamente si ha

$$(2.3) \equiv -(2.2) \equiv Q_2$$

$$(2.2) \equiv -(2.1) - (2.2) \equiv Q_1 + Q_2$$

Stabilità dell'equilibrio $\vec{q}_e = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

Determiniamo che tipo di punto stazionario è \vec{q}_e per l'energia potenziale (1.1). A tale scopo, calcoliamo la matrice Hessiana.

Dalle (2.1) segue che:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} = -\frac{l^2}{4} (c_1 + c_2) 2 \cos 2\varphi_1 - c_2 l^2 \sqrt{2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \frac{mgl}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = +c_2 l^2 \sqrt{2} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} = -c_2 l^2 \sqrt{2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 - 4 l^2 c_2 \cos 2\varphi_2 + mgl \cos \varphi_2$$

Allora, all'equilibrio $\vec{q}_e = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ in ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} \Big|_{\vec{q}_e} &= -\frac{l^2}{4} (c_1 + c_2) \frac{1}{2} - c_2 l^2 \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} + \frac{mgl}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= -\frac{l^2}{4} c_1 - l^2 \left(\frac{1 + \sqrt{6}}{4}\right) c_2 + \frac{mgl}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} ; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \Big|_{\vec{q}_e} = c_2 l^2 \sqrt{2} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c_2 l^2 \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} ;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} \Big|_{\vec{q}_e} &= -c_2 l^2 \left[\sqrt{2} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \left(-\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{mgl}{2} = \\ &= -c_2 l^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - 2 \right) + \frac{mgl}{2} \end{aligned}$$

Sostituendo a c_1 e c_2 i valori assegnati

$$c_1 = \frac{mg}{l} \frac{\sqrt{2}}{3} , \quad c_2 = \frac{mg}{l} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} \Big|_{\vec{q}_e} &= -\frac{l^2}{4} \frac{mg}{l} \frac{\sqrt{2}}{3} - l^2 \left(\frac{1+\sqrt{6}}{4} \right) \frac{mg}{l} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{mg l \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ &= mgl \left(-\frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1+\sqrt{6}}{4} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{mgl}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{6})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{6} \right) \\ &= \frac{mgl}{4} \frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{3}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})} > 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \Big|_{\vec{q}_e} = \frac{mg}{l} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} - l^2 \frac{mg}{l} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = mgl \frac{\sqrt{3}}{2(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} \Big|_{\vec{q}_e} &= \frac{mgl}{2} - l^2 \frac{mg}{l} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{2}} \right) = \\ &= mgl \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-4\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})} \right) = mgl \frac{\frac{3}{6}\sqrt{2}}{2(2\sqrt{2}+\sqrt{3})} \end{aligned}$$

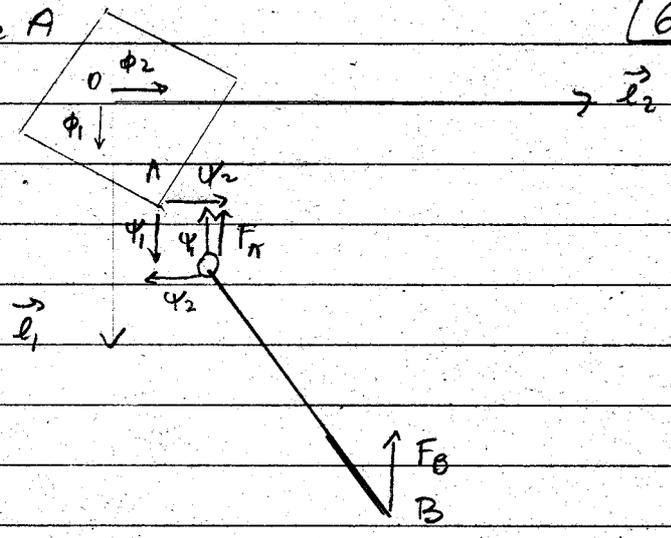
$$\begin{aligned} \det H \Big|_{\vec{q}_e} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} \Big|_{\vec{q}_e} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} \Big|_{\vec{q}_e} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \Big|_{\vec{q}_e} \right)^2 = \\ &= \frac{mgl}{4} \frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{3}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})} \cdot mgl \frac{3\sqrt{2}}{2(2\sqrt{2}+\sqrt{3})} - \left(\frac{mgl}{4} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \right)^2 = \\ &= (mgl)^2 \left[\frac{(2+\sqrt{6}) \cdot 3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} - \frac{3}{4(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} \right] \\ &= \frac{mgl^2}{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} \frac{6\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{mgl^2}{4\sqrt{3}(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} > 0 \end{aligned}$$

Dunque, la matrice Hessiana è definita positiva in (5)
 $\vec{q}_0 = \left(\frac{4}{6}, \frac{11}{3} \right)$, quindi \vec{q}_0 è un punto di minimo per

l'energia potenziale $V(q_1, q_2)$ e allora un equilibrio stabile per il modello meccanico.

Reazioni vincolari sulla lamina in O e A

Per determinare le reazioni vincolari in O applichiamo la I ECS a tutto il modello.



$$(6.1) \vec{R} = \vec{0}$$

Scomponendo lungo i due assi otteniamo:

$$(6.2) \begin{cases} \vec{R} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{R} \cdot \vec{e}_2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \phi_1 + mg + F_A \cdot \vec{e}_1 + mg + F_B \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{array} \right.$$

Poiché

$$\vec{F}_A = -c_1 (\vec{x}_A - \vec{x}_O) = -c_1 \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \phi_1^{(0)} \vec{e}_1 = -c_1 \frac{l \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \vec{e}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= -c_2 (\vec{x}_B - \vec{x}_C) = -c_2 \left(2l \cos \phi_2^{(0)} + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \phi_1^{(0)} \right) \vec{e}_1 \\ &= -c_2 l \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \vec{e}_1 \end{aligned}$$

le (6.2) diventano

$$(6.3) \left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = -2mg + c_1 \frac{l \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + c_2 l \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) \\ = -2mg + l \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{mg \sqrt{2}}{l \sqrt{3}} + l \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) \frac{mg \sqrt{2}}{l (2\sqrt{2} + \sqrt{3})} \\ = -2mg + \frac{mg}{2} + \frac{mg}{2} = -mg \\ \phi_2 = 0 \end{array} \right.$$

Per determinare le reazioni in A applichiamo la IECS nella sola lamina

$$(7.1) \quad \vec{R}_A = \vec{0}$$

Scomponendo lungo i due assi si ottiene:

$$(7.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_1 + \psi_1 + mg = 0 \\ \phi_2 + \psi_2 = 0 \end{array} \right.$$

che fornisce la soluzione

$$(7.3) \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0$$

Dinamica

4) Scriviamo le due EL relative a φ_1 e φ_2 . A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$(8.1) \quad K = K^{(cin)} + K^{(rot)}$$

$$(8.2) \quad K^{(cin)} = \frac{1}{2} J_{30} \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}_1^2 \right)$$

$$(8.3) \quad K^{(rot)} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{3G} \dot{\varphi}_2^2 \quad J_{3G} = \frac{1}{12} m (2l)^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

$$(8.4) \quad \vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{G}-\vec{A}) = \vec{v}_A + \dot{\varphi}_2 \vec{e}_3 \times l (\cos \varphi_2 \vec{e}_1 + \sin \varphi_2 \vec{e}_2)$$

$$(8.5) \quad \vec{v}_A = \vec{v}_A = \frac{l}{\sqrt{2}} \left(-\sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \vec{e}_1 + \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \vec{e}_2 \right)$$

Quindi

$$(8.6) \quad \vec{v}_G = l \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \right) \vec{e}_1 + l \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \right) \vec{e}_2$$

$$v_G^2 = l^2 \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \right)^2 \right]$$

$$(8.7) \quad = l^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \sin^2 \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \cos^2 \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right] =$$

$$= l^2 \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \sqrt{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right]$$

Allora

$$(8.8) \quad K^{(rot)} = \frac{1}{2} m l^2 \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \sqrt{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right] + \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{1}{3} \dot{\varphi}_2^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{4}{3} \dot{\varphi}_2^2 + \sqrt{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right]$$

Pertanto

$$(9.1) \quad K = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{2}{3} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{4}{3} \dot{\varphi}_2^2 + \sqrt{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right)$$

Quindi,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\varphi}_1 + \frac{\sqrt{2} m l^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} \dot{\varphi}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \frac{2}{3} m l^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{\sqrt{2} m l^2}{2} \left[-\sin(\varphi_2 - \varphi_1) (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \dot{\varphi}_2 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 \right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi_1} = \frac{\sqrt{2} m l^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

Di conseguenza, l'EL relativa a φ_1 è:

$$(9.2) \quad \frac{2}{3} m l^2 \ddot{\varphi}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} m l^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} m l^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 = Q_1,$$

dove Q_1 è data dall'opposto della (2.1)

Inoltre,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi}_2 + \sqrt{2} m l^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = \frac{4}{3} m l^2 \ddot{\varphi}_2 + \sqrt{2} m l^2 \left[-\sin(\varphi_2 - \varphi_1) (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \dot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 \right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2} m l^2 \sqrt{2} \left[-\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right]$$

Di conseguenza, l'EL relativa a φ_2 è:

$$(9.3) \quad \frac{4}{3} m l^2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} m l^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} m l^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 = Q_2$$

dove Q_2 è data dall'opposto della (2.2).

5) Reazioni vincolari dinamiche nella lancia in O.

Applichiamo la I. ECD a tutto il modello.

$$(10.1) \quad \vec{R} \stackrel{(est)}{=} m \ddot{\vec{x}}_O + m \ddot{\vec{x}}_G$$

Con riferimento alla figura di pag. 6, scomponendo la (10.1) lungo i due assi si ottiene:

$$(10.2) \quad \begin{cases} \phi_1' + 2wg - c_1 \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi - c_2 \left(2l \cos \varphi_2 + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \right) = m \ddot{x}_G \cdot \vec{e}_1 \\ \phi_2' = m \ddot{x}_G \cdot \vec{e}_2 \end{cases}$$

Dalla (8.6) segue che

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \ddot{\vec{x}}_G = & l \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} (\cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1^2 + \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1^{\circ\circ}) - \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2^2 - \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2^{\circ\circ} \right) \vec{e}_1 + \\ & + l \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1^2 + \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1^{\circ\circ}) - \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2^2 + \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2^{\circ\circ} \right) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

Pertanto, la (10.2) fornisce

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \phi_1' = & 2wg + c_1 \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi + c_2 \left(2l \cos \varphi_2 + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \right) - ml \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1^2 + \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1^{\circ\circ}) + \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2^2 + \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2^{\circ\circ} \right] \\ \phi_2' = & m l \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1^2 + \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1^{\circ\circ}) - \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2^2 + \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2^{\circ\circ} \right] \end{aligned}$$

La risposta alle domande 5) si ottiene sostituendo nella (10.4)

$$c_1 = \frac{mg \sqrt{2}}{l \cdot 3}, \quad c_2 = \frac{mg \sqrt{2}}{l \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

6) Reazioni vincolari dinamiche sulla lamina in A

Per determinare le reazioni in A applichiamo la I ECD sulla sola lamina

$$(11.1) \quad \overset{\rightarrow(\text{ext, lam})}{R} = m \overset{\circ\circ}{x}_0$$

Poichè in questo caso il centro di massa della lamina è fisso, $\overset{\circ\circ}{x}_0 = \vec{0}$, dunque

$$(11.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_1' + \psi_1' + mg = 0 \\ \phi_2' + \psi_2' = 0 \end{array} \right.$$

Quindi, tenendo conto delle (10.4), si ottiene

$$(11.3) \quad \begin{aligned} \psi_1' &= -3mg - c_1 \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \phi_1 - c_2 \left(2l \cos \phi_2 + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \phi_1 \right) - ml \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \phi_1 \ddot{\phi}_1 + \sin \phi_1 \ddot{\phi}_1) + \cos \phi_2 \ddot{\phi}_2 + \sin \phi_2 \ddot{\phi}_2 \right] \\ \psi_2' &= -ml \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \phi_1 \ddot{\phi}_1 + \cos \phi_1 \ddot{\phi}_1) - \sin \phi_2 \ddot{\phi}_2 + \cos \phi_2 \ddot{\phi}_2 \right] \end{aligned}$$

Pertanto, la risposta alla domanda 6) si ottiene sostituendo nelle (11.3) $c_1 = \frac{m g}{l} \frac{\sqrt{2}}{3}$, $c_2 = \frac{m g}{l} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

6a) Eq di Lagrange linearizzate intorno a $\vec{q}_e = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Poiché il modello è conservativo, sappiamo che le eq. di Lagrange linearizzate intorno a una configurazione di equilibrio \vec{q}_e si scrivono

$$(12.1) \quad A(\vec{q}_e) \ddot{\vec{x}} + H_v(\vec{q}_e) \dot{\vec{x}} = 0,$$

dove $A(\vec{q}_e)$ è la matrice dell'energia cinetica valutata in \vec{q}_e , $H_v(\vec{q}_e)$ è la matrice Hessiana valutata in \vec{q}_e , \vec{x} è il vettore degli scarti $\vec{x}(t) = \vec{q}(t) - \vec{q}_e$.
Allora, dalla (9.1) segue che

$$(12.2) \quad A = ml^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & 4 \end{bmatrix}$$

quindi

$$(12.3) \quad A(\vec{q}_e) = ml^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

Inoltre,

$$(12.4) \quad H_v(\vec{q}_e) = \frac{mgl}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4\sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Pertanto, le eq. di Lagrange linearizzate si scrivano

$$(13.1) \begin{cases} m l^2 \frac{2}{3} \ddot{\varphi}_1 + m l^2 \frac{\sqrt{6}}{4} \ddot{\varphi}_2 + \frac{m g l}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} \left[\frac{2 + \sqrt{6}}{4\sqrt{3}} \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\varphi_2 - \frac{\pi}{3} \right) \right] = 0 \\ m l^2 \frac{\sqrt{6}}{4} \ddot{\varphi}_1 + m l^2 \frac{4}{3} \ddot{\varphi}_2 + \frac{m g l}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{6} \right) + 3\sqrt{2} \left(\varphi_2 - \frac{\pi}{3} \right) \right] = 0 \end{cases}$$

Tali equazioni hanno soluzioni oscillanti poiché la configurazione di equilibrio $\vec{q}_e = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right)$ è stabile, come è stato dimostrato a pag. 5.