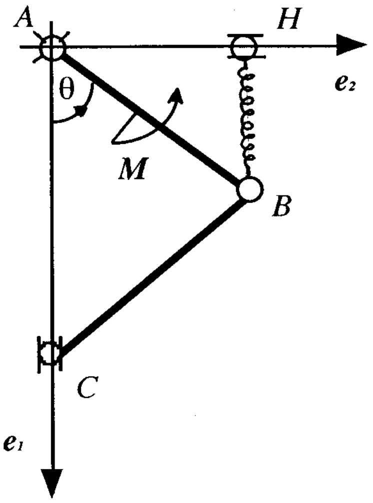
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 15 febbraio 2011

(G. Tondo)



Si consideri il sistema articolato di figura costituito dalle aste omogenee AB e BC, di lunghezza l e massa m, incernierate in B e vincolate in A e in C su un piano **verticale** (vincoli lisci e bilateri). Il sistema è soggetto al peso proprio delle aste, alla forza elastica della molla (mantenuta verticale dal carrello in H) e alla coppia uniforme di momento M applicata sulla manovella.

STATICA.

Calcolare:

1) il valore di M affinchè il modello sia in equilibrio per $\theta = \pi/3$ e discutere la stabilità della suddetta configurazione di equilibrio;

2) le reazioni vincolari esterne in A e in C, nella stessa configurazione di equilibrio;

3) le reazioni vincolari che le due aste esercitano sulla cerniera interna in B, nella stessa configurazione di equilibrio.

DINAMICA.

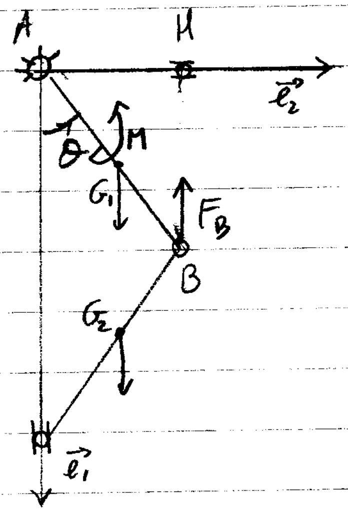
4) Scrivere un' equazione differenziale pura di moto;

5) calcolare le reazioni vincolari esterne in A e in C durante il moto in funzione di θ, a partire dalle condizioni iniziali $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$;

6) calcolare le reazioni vincolari che le due aste esercitano sulla cerniera interna in B, durante il moto (esame da 6 CFU); in funzione di θ;

6a) scrivere l'equazione di Lagrange linearizzata nelle configurazioni di equilibrio stabile e determinarne la soluzione generale (esame da 9 CFU).

Tema del 15/02/2011



Il modello è una biella - manovella
Quindi ha 1 grado di libertà.
La sollecitazione attiva è di tipo posizionale (peso proprio, forza elastica, coppia uniforme), quindi è conservativo. La sua energia potenziale sarà

$$V(\theta) = V^{(coppia)} + \frac{1}{2} c \overline{HB}^2 - m\vec{g}\cdot\vec{x}_{G_1} - m\vec{g}\cdot\vec{x}_{G_2}$$

Per determinare $V^{(coppia)}$, calcoliamo il lavoro virtuale della coppia agente sulla manovella AB.

$$LV^{(coppia)} = M\vec{e}_3 \cdot \vec{\epsilon} = M\vec{e}_3 \cdot \delta\theta\,\vec{e}_3 = M\delta\theta = \delta(M\theta)$$

Pertanto

$$V^{(coppia)} = -M\theta$$

$$\overline{HB} = l\cos\theta, \quad \vec{x}_{G_1} = \frac{l}{2}\left(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right), \quad \vec{x}_{G_2} = \frac{l}{2}\left(3\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right)$$

Allora

$$V(\theta) = -M\theta + \frac{1}{2}cl^2\cos^2\theta - mg\vec{e}_1\cdot\frac{l}{2}\left(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right) - mg\vec{e}_1\cdot\frac{l}{2}\left(3\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right)$$

$$= -M\theta + \frac{1}{2}cl^2\cos^2\theta - 2mgl\cos\theta$$

Statica

1) Scriviamo l'equazione pura di equilibrio e troviamo il valore di M che la soddisfa nella configurazione $\theta = \frac{\pi}{3}$.

(2.1) $V'(\theta) = -M - c\,l^2 \sin\theta\cos\theta + 2mgl\sin\theta$
$= -M - c\frac{l^2}{2}\sin 2\theta + 2mgl\sin\theta = -Q_\theta$

L'eq. pura d'equilibrio valutata in $\theta = \frac{\pi}{3}$ è

$$-M - c\frac{l^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + 2mgl\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

e risolta rispetto a M fornisce

(2.2) $$M = \sqrt{3}\,l\left(mg - c\frac{l}{4}\right)$$

Per determinare la stabilità della configurazione $\theta = \frac{\pi}{3}$, calcoliamo la derivata seconda di V

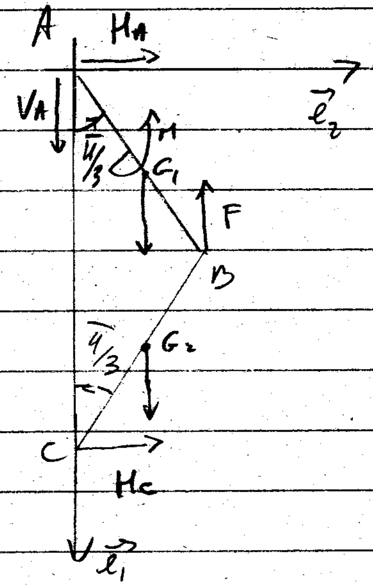
$$V''(\theta) = -c\,l^2\cos 2\theta + 2mgl\cos\theta$$

e valutiamola in $\theta = \frac{\pi}{3}$

(2.3) $V''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -c\,l^2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2mgl\frac{1}{2} = \frac{c\,l^2}{2} + mgl > 0 \Rightarrow \min \Rightarrow$ stab

Quindi, la configurazione $\theta = \frac{\pi}{3}$ è di equilibrio stabile se e solo se $M = \sqrt{3}\,l\left(mg - c\frac{l}{4}\right)$.

2) Reazioni vincolari esterne in A e in C



Le reazioni incognite dei vincoli esterni nel modello sono (H_A, V_A, H_C).
Per calcolarle, scriviamo le I ECS su tutto il modello e la II ECS sulla biella denotata con (2)

$$\begin{cases} \vec{R}^{(ext)} = \vec{0} \\ \vec{M}_B^{(ext\to 2)} = \vec{0} \end{cases}$$

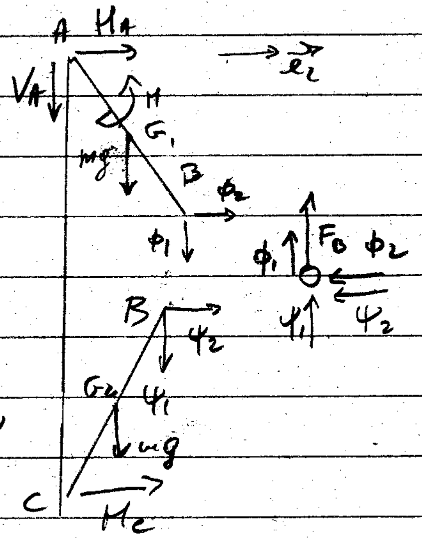
Proiettando lungo i versori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, si trova

$\vec{R}^{(ext)}\cdot\vec{e}_1$: $\quad V_A + 2mg - cl\cos\frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{cl}{2} - 2mg$

$\vec{R}^{(ext)}\cdot\vec{e}_2$: $\quad H_A + H_C = 0 \quad \Rightarrow H_A = \frac{mg}{2}\sqrt{3}$

$\vec{M}_B^{(ext\to 2)}\cdot\vec{e}_3$: $\quad H_C\, l\cos\frac{\pi}{3} + mg\frac{l}{2}\sin\frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow H_C = -\frac{mg}{2}\,tg\frac{\pi}{3} = -\frac{mg\sqrt{3}}{2}$

3) Reazioni vincolari interne sulla cerniera B.
Le incognite sono 4: $(\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)$.



Scriviamo la I ECS sul punto B e sulla biella BC denotate con (2).

$\vec{R}^{(ext\to B)}\cdot\vec{e}_1$ $\quad -\phi_1 - \psi_1 - cl\cos\frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \phi_1 = -\psi_1 - \frac{cl}{2} = mg - \frac{cl}{2}$

$\vec{R}^{(ext\to B)}\cdot\vec{e}_2$ $\quad -\phi_2 - \psi_2 = 0 \quad \phi_2 = -\psi_2 = -\frac{mg}{2}\sqrt{3}$

$\vec{R}^{(ext\to 2)}\cdot\vec{e}_1$ $\quad H_C + \psi_2 = 0 \quad \psi_2 = -H_C = \frac{mg}{2}\sqrt{3}$

$\vec{R}^{(ext\to 2)}\cdot\vec{e}_2$ $\quad \psi_1 + mg = 0 \Rightarrow \psi_1 = -mg$

4) Scriviamo l'eq. di Lagrange relativa a θ. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello, denotando con (1) la manovella e con (2) la biella.

$$K = K^{(1)} + K^{(2)}$$

$$K^{(1)} = \frac{1}{2} J_{31} \omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m l^2\right)\dot{\theta}^2 \qquad \vec{\omega}_1 = \dot{\theta}\,\vec{e}_3$$

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_{3G_2} \omega_2^2 \qquad \vec{\omega}_2 = -\dot{\theta}\,\vec{e}_3$$

$$J_{3G_2} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\vec{v}_{G_2} = \dot{\vec{x}}_{G_2} = \frac{l}{2}\left(-3\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_2\right)$$

$$v_{G_2}^2 = \frac{l^2}{4}\left[\left(-3\sin\theta\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(\cos\theta\,\dot{\theta}\right)^2\right] = \frac{l^2}{4}\left(9\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\right) =$$

$$= \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2\left(8\sin^2\theta + 1\right)$$

Quindi,

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{4}\left(8\sin^2\theta + 1\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m l^2\left(2\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)\dot{\theta}^2,$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l^2\left(2\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)\dot{\theta}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m l^2\left(2\sin^2\theta + \frac{2}{3}\right)\dot{\theta}^2 = m l^2\left(\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = 2 m l^2\left(\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2 m l^2\left(\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)\ddot{\theta} + 2 m l^2\, 2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = 2 m l^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2$$

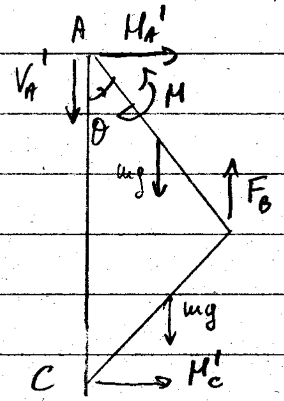
Pertanto, l'eq. di Lagrange è data da

$$2ml^2\left(\sin^2\theta+\frac{1}{3}\right)\ddot{\theta}+\left(2ml^2\sin 2\theta-ml^2\sin 2\theta\right)\dot{\theta}^2=M+\frac{cl^2}{2}\sin 2\theta+$$
$$-2mgl\sin\theta$$

cioè

$$(5.1)\quad ml^2\left[2\left(\sin^2\theta+\frac{1}{3}\right)\ddot{\theta}+\sin 2\theta\,\dot{\theta}^2\right]=M+\frac{cl^2}{2}\sin 2\theta-2mgl\sin\theta$$

5) Reazioni vincolari esterne in A e in C durante il moto.
Conviene scrivere le due ECS su tutto il modello.



$$\begin{cases}\vec{R}^{(ext)}=m\ddot{\vec{x}}_{G_1}+m\ddot{\vec{x}}_{G_2}\\ \vec{M}_A^{(ext)}=\dfrac{d\vec{L}_A}{dt}\end{cases}$$

$$\ddot{\vec{x}}_{G_1}=\frac{d}{dt}\left[\frac{l}{2}\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_1+\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_2\right)\right]=\frac{l}{2}\left[-\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2+\sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_1+\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2+\cos\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_2\right]$$

$$\ddot{\vec{x}}_{G_2}=\frac{l}{2}\left[\left(-3\cos\theta\,\dot{\theta}^2-3\sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_1+\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2+\cos\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_2\right]$$

$$\vec{L}_A=\vec{L}_A^{(1)}+\vec{L}_A^{(2)}$$

$$\vec{L}_A^{(1)}=J_{3A}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_3\quad,\quad \vec{L}_A^{(2)}=\vec{L}_{G_2}+\vec{x}_{G_2}\times m\vec{V}_{G_2}$$

$$\vec{L}_{G_2}=J_{3G_2}\vec{\omega}_2=-\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}\,\vec{e}_3$$

$$\vec{x}_{G_2}\times m\vec{V}_{G_2}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \frac{l}{2}3\cos\theta & \frac{l}{2}\sin\theta & 0\\ -\frac{lm}{2}3\sin\theta\,\dot{\theta} & m\frac{l}{2}\cos\theta\,\dot{\theta} & 0\end{vmatrix}=\vec{e}_3\left(\frac{3l^2}{4}\cos^2\theta\,\dot{\theta}+\frac{3l^2}{4}\sin^2\theta\,\dot{\theta}\right)=$$
$$=\frac{3}{4}ml^2\dot{\theta}\,\vec{e}_3$$

Pertanto,

$$\vec L_A^{(2)} = -\frac{1}{12} m l^2 \dot\theta\, \vec e_3 + \frac{3}{4} m l^2 \dot\theta\, \vec e_3 = \frac{2}{3} m l^2 \dot\theta\, \vec e_3$$

$$\vec L_A = \frac{1}{3} m l^2 \dot\theta\, \vec e_3 + \frac{2}{3} m l^2 \dot\theta\, \vec e_3 = m l^2 \dot\theta\, \vec e_3$$

$$\vec M_A^{(est)} = (G_1-A)\times m\vec g + (B-A)\times \vec F_B + (G_2-A)\times m\vec g + (C-A)\times H'_C\, \vec e_2 + M\vec e_3$$

$$= \left(-mg\frac{l}{2}\sin\theta + cl\cos\theta\, l\sin\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta + H'_C\, 2l\cos\theta + M\right)\vec e_3$$

$$= \left(-mgl\sin\theta + cl^2\sin\theta\cos\theta + H'_C\, 2l\cos\theta + M\right)\vec e_3$$

Dunque, le 2 ECS proiettate lungo i versori $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$

$$\begin{cases} \vec e_1: & V'_A + 2mg - cl\cos\theta = m\left[\frac{l}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) + \frac{l}{2}\left(+3\cos\theta\,\dot\theta^2 + 3\sin\theta\,\ddot\theta\right)\right] \\ \vec e_2: & H'_A + H'_C = m\left[\frac{l}{2}\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right) + \frac{l}{2}\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right)\right] \\ \vec e_3: & -mg\cancel{l}\sin\theta + cl^{\cancel{2}}\sin\theta\cos\theta + H'_C\, 2\cancel{l}\cos\theta + \frac{M}{l} = ml^{\cancel{2}}\ddot\theta \end{cases}$$

Quindi, le reazioni dinamiche sono date da

$$(6.1)\quad \begin{cases} V'_A = cl\cos\theta - 2mg - 2ml\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) \\ H'_A = -\dfrac{mg\sin\theta - c\frac{l}{2}\sin 2\theta - \frac{M}{l} + ml\ddot\theta}{2\cos\theta} + ml\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right) \\ H'_C = \dfrac{mg\sin\theta - c\frac{l}{2}\sin 2\theta - \frac{M}{l} + ml\ddot\theta}{2\cos\theta} \end{cases},$$

in funzione della coordinata libera θ e delle sue derivate $\dot\theta^2$ e $\ddot\theta$. Per eliminare tali derivate dalle (6.1), ricorriamo alle 2 equazioni date dall'eq. di Lagrange (5.1) e dall'integrale primo dell'energia meccanica che determiniamo ora. Infatti, il modello ha 1 grado di libertà, vincoli fissi e non dissipativi e sollecitazione posizionale (quindi conservativa). Pertanto, durante ogni moto con $\theta \in \mathbb{R}$, l'energia meccanica si conserva, quindi

$$K + V = E_{|t=0}$$

cioè

$$ml^2\left(\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)\dot\theta^2 - M\theta + \frac{1}{2}cl^2\cos^2\theta - 2mgl\cos\theta = -M\frac{\pi}{2}$$

Allora

$$(7.1) \qquad \dot\theta^2 = \frac{M\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{cl^2}{2}\cos^2\theta + 2mgl\cos\theta}{ml^2\left(\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)} = f(\theta)$$

Inoltre, dalla (5.1) si ottiene

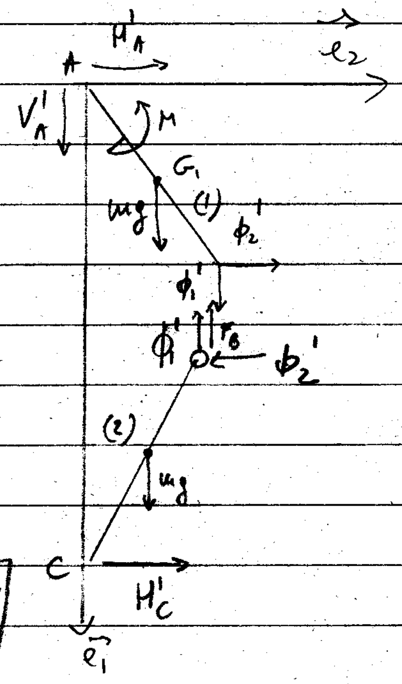
$$(7.2) \quad \ddot\theta = \frac{M + \frac{cl^2}{2}\sin 2\theta - 2mgl\sin\theta - ml^2\sin 2\theta\,\dot\theta^2}{2ml^2\left(\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)}$$

Sostituendo la (7.1) nella (7.2) si ottiene la funzione

$$(7.3) \qquad \ddot\theta = g(\theta).$$

Pertanto, sostituendo la (7.1) e la (7.3) nella (6.1) si ottiene la risposta 5).

6) reazioni dinamiche che la 2 asta esercitano sulla cerniera B.



Scriviamo la I ECD nel sistema dato dalla biella BC con la cerniera B.
A tale scopo, calcoliamo

$$\ddot{\vec{x}}_B = \dot{\vec{v}}_B = \frac{d^2}{dt^2}\, l\left(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right)$$

$$(8.1) \qquad = \frac{d}{dt}\left[l\left(-\sin\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_2\right)\right]$$

$$= l\left[\left(-\cos\theta\,\dot\theta^2 - \sin\theta\,\ddot\theta\right)\vec{e}_1 + \left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right)\vec{e}_2\right]$$

Allora,

$$(8.2) \qquad \vec{B}^{(est\to 2\cup B)} = m\,\ddot{\vec{x}}_{G_2}$$

che, proiettata lungo $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, fornisce

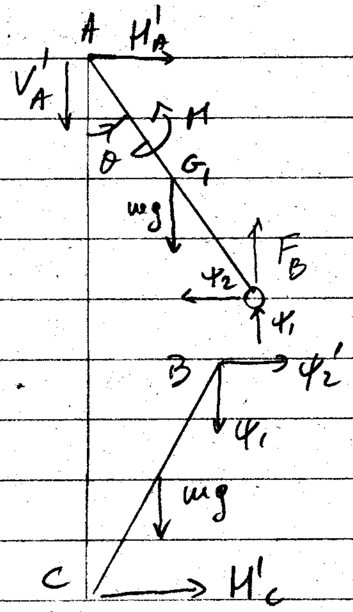
$$\begin{cases} mg - cl\cos\theta - \phi'_1 = m\,\dfrac{l\,3}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) \\ H'_C - \phi'_2 = m\,\dfrac{l}{2}\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right) \end{cases}$$

cioè

$$(8.3) \qquad \begin{aligned} \phi'_1 &= mg - cl\cos\theta + \frac{3}{2}ml\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) \\ \phi'_2 &= H'_C - \frac{ml}{2}\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right) \end{aligned}$$

Sostituendo nella (8.3) la (6.1c), (7.1) e (7.3) si ottengono le reazioni dinamiche dell'asta (1) sulla cerniera B.

Per calcolare le azioni dell'asta (2) sulla cerniera B, consideriamo la seguente scomposizione e scriviamo le I ECD sull'asta (2).



(9.1) $$\vec{R}^{(ext-2)} = m\ddot{\vec{x}}_{G_2}$$

che, proiettata lungo $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, fornisce

$$\begin{cases} mg + \Psi_1' = -\frac{3}{2}ml\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) \\ H'_C + \Psi_2' = m\frac{l}{2}\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right) \end{cases}$$

Quindi,

(9.2) $$\begin{cases} \Psi_1' = -mg - \frac{3}{2}ml\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) \\ \Psi_2' = -H'_C + m\frac{l}{2}\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right) \end{cases}$$

Sostituendo nelle (9.2) le (6.1c), (7.1) e (7.3), si ottiene la risposta.

6a) Linearizziamo l'eq. di Lagrange (5.1) intorno alla configurazione di equilibrio $\theta_e = \frac{\pi}{3}$.
Poiché il modello è conservativo, possiamo utilizzare la forma

$$(6.1) \qquad a(\theta_e)\,\ddot{x} + V''(\theta_e)\,x = 0,$$

dove $a(\theta_e) = \left.\dfrac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta}^2}\right|_{\theta_e = \frac{\pi}{3}}$ e $V''(\theta_e)$ è data dalla (2.3)

Quindi,

$$a\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2ml^2\left(\sin^2\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\right) = 2ml^2\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{6}ml^2$$

e l'eq. linearizzata si scrive

$$(6.2) \qquad \frac{13}{6}ml^2\,\ddot{x} + \left(c\frac{l^2}{2} + mgl\right)x = 0.$$

Il suo integrale generale è dato da

$$x(t) = x_0 \cos \nu t + \frac{v_0}{\nu}\sin \nu t \qquad x_0 := x(0),\ v_0 := \dot{x}(0)$$

dove la pulsazione delle piccole oscillazioni è

$$\nu = \sqrt{\left(c\frac{l^2}{2} + mgl\right)\frac{6}{13ml^2}}$$

Dunque, le soluzioni delle piccole oscillazioni sono

$$\theta(t) = \frac{\pi}{3} + \left(\theta_0 - \frac{\pi}{3}\right)\cos \nu t + \frac{w_0}{\nu}\sin \nu t,$$

dove $\theta_0 = \theta(0)$ e $w_0 = \dot{\theta}(0)$.