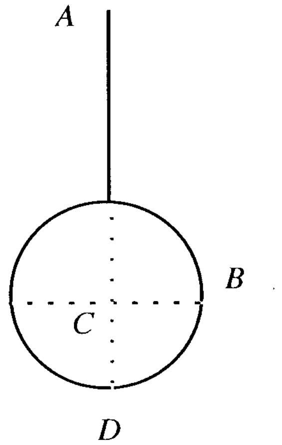
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 17 gennaio 2011

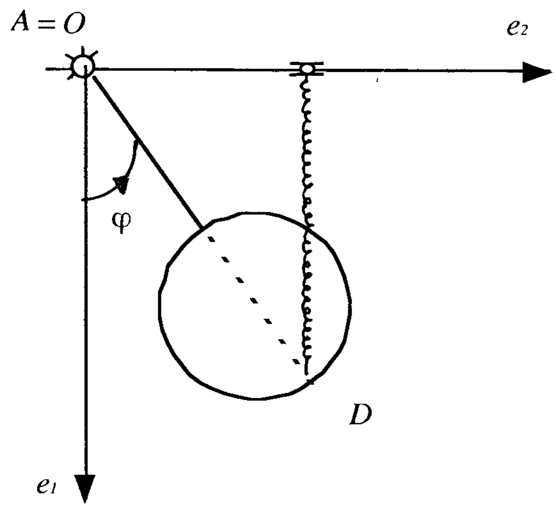
(G. Tondo)



È dato il corpo rigido di figura formato da un'asta di lunghezza $2r$ e massa m saldata ad un **lamina** circolare omogenea di massa $4m$ e di raggio r.

1) Calcolare il baricentro e il momento d'inerzia del corpo rispetto ad una retta passante per i punti A e B.

STATICA.



Si vincoli il corpo in un piano **verticale** con una cerniera liscia fissata in A e nel punto fisso O. Le forze attive sono: il peso proprio del corpo e la forza di richiamo della molla di costante elastica c, collegata al punto D della lamina e mantenuta verticale dal carrello in H.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari esterne all'equilibrio in A.

DINAMICA.

Inoltre si chiede di scrivere:

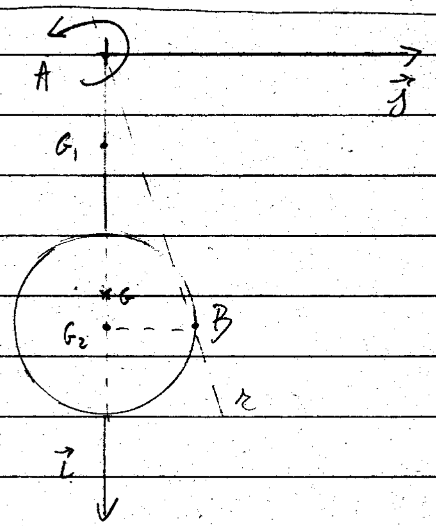
4) un'equazione differenziale pura di moto;

5) un integrale primo di moto a partire dalle condizioni iniziali $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\varphi} = 0$;

6) le reazioni vincolari in A durante il moto, in funzione della coordinate libera (esame da 6 CFU);

7) scrivere l'equazione di Lagrange linearizzata intorno alle configurazioni di equilibrio, discutere i piccoli moti ed, eventualmente, calcolare la frequenza delle piccole oscilazioni(esame da 9 CFU).

Tema d'esame del 17/01/2011



Per determinare il baricentro utilizziamo la proprietà distributiva.

$$\vec{x}_G - \vec{x}_A = \frac{m(\vec{x}_{G_1} - \vec{x}_A) + 4m(\vec{x}_{G_2} - \vec{x}_A)}{5m}$$

$$= \frac{r\vec{i} + 4 \cdot 3r\vec{i}}{5} = \frac{13}{5} r\vec{i}$$

Per calcolare I_r, determiniamo la matrice d'inerzia del rigido rispetto a un punto della retta r, in particolare il punto A. Pertanto, rispetto alla terna $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, che è una TPI per ragioni di simmetria, la matrice d'inerzia

$$I_A = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x + I_y \end{bmatrix}, \qquad I_x = \mathbb{I}_A(\vec{i}) \cdot \vec{i}$$

$$I_y = \mathbb{I}_A(\vec{j}) \cdot \vec{j}$$

dove

$$I_x = \cancel{I_x^{(a)}} + I_x^{(d)} = \frac{1}{4}(4m)r^2 = mr^2$$

$$I_y = I_y^{(a)} + I_y^{(d)} = \frac{4}{3}mr^2 + 37mr^2 = \frac{115}{3}mr^2$$

$$I_y^{(a)} = \frac{1}{3}m(2r)^2 = \frac{4}{3}mr^2$$

$$I_y^{(d)} = mr^2 + 4m(3r)^2 = 37mr^2$$

Quindi

$$I_A = mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{115}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{118}{3} \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

$$\text{vers}(B-A) = \frac{3r\vec{i} + r\vec{j}}{\sqrt{10}\, r} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Pertanto

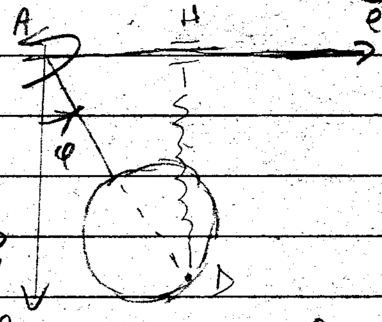
$$I_r = \text{vers}(B-A) \cdot I_A\left(\text{vers}(B-A)\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}[3, 1]\, mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{115}{3} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{mr^2}{10}[3, 1] \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{115}{3} \end{bmatrix} = \frac{mr^2}{10}\left(9 + \frac{115}{3}\right) = \frac{142}{30} mr^2 = \frac{71}{15} mr^2$$

Analisi cinematica

Il modello è un rigido piano con punto fisso A: quindi ha 1 g.l.. Prendiamo come coordinata libera

$$\varphi \in \,]-\pi, \pi]$$



Statica

Il modello ha 1 g.l., vincoli fissi e forze posizionali. Quindi è (localmente) conservativo. Determiniamo l'energia potenziale $V(\varphi)$

$$V(\varphi) = V^{(peso)} + V^{(molla)} = -5m\vec{g} \cdot \vec{x}_G + \frac{1}{2} c\, \overline{DH}^2$$

Scomponendo i vettori sulla terna fissa $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ si trova

$$V(\varphi) = -5mg\vec{e}_1 \cdot \frac{13r}{5}\left(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2\right) + \frac{1}{2} c \left(4r\cos\varphi\right)^2$$

$$= -13\, mgr\cos\varphi + 8cr^2\cos^2\varphi$$

le configurazioni di equilibrio sono i punti stazionari dell'energia potenziale. Quindi

$$V'(\varphi) = +13\, m g r \sin\varphi - 16 c r^2 \cos\varphi \sin\varphi =$$

$$= r \sin\varphi \left(13 m g - 16 c r \cos\varphi\right) = -Q_\varphi$$

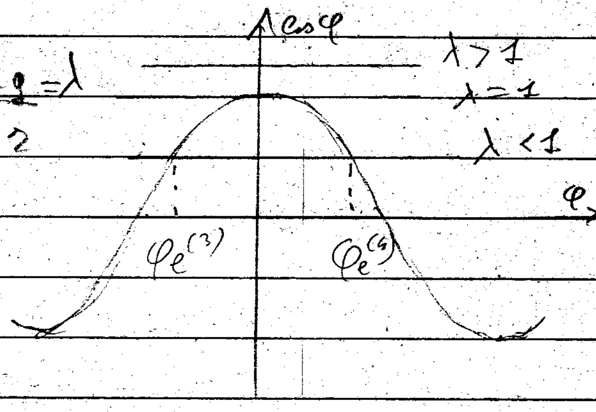
I punti stazionari di V sono le soluzioni dell'equazione

$$\sin\varphi = 0 \quad \text{OR} \quad \cos\varphi = \frac{13 m g}{16 c r} = \lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_e^{(1)} = 0,\ \varphi_e^{(2)} = \pi \quad \cup \quad \varphi_e^{(3)} = -\varphi_e^{(4)}$$

$\varphi_e^{(4)} = \arccos\lambda$
se $\lambda < 1$



Pertanto, le configurazioni di equilibrio sono

$$\varphi_e^{(1)} = 0, \quad \varphi_e^{(2)} = \pi \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_e^{(3)} = -\varphi_e^{(4)}, \quad \varphi_e^{(4)} = \arccos\lambda \qquad \text{se} \quad \lambda < 1.$$

Per studiarne la stabilità, determiniamo se i punti stazionari sono minimi o altro. A tale scopo, valutiamo le derivate successive di V.

$$V''(\varphi) = 13 m g r \cos\varphi - 16 c r^2 \cos 2\varphi$$

$$V''(0) = 13 m g r - 16 c r^2 = 16 c r^2 (\lambda - 1)$$

$\lambda > 1$ $> 0 \Rightarrow$ min $\Rightarrow$ stabile
$\lambda = 1$ $= 0 \Rightarrow$ caso dubbio
$\lambda < 1$ $< 0 \Rightarrow$ max $\Rightarrow$ instabile

$$V''(\pi) = -13 m g r - 16 c r^2 < 0 \Rightarrow \text{max} \Rightarrow \text{instabile}$$

$$= -16 c r^2 (\lambda + 1)$$

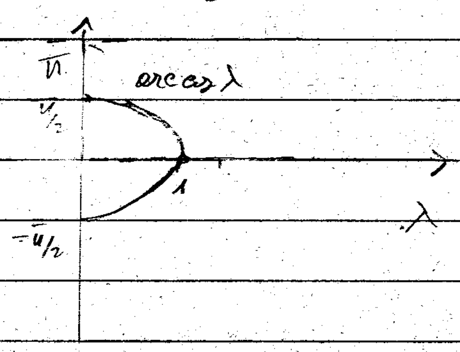
Utilizzando l'identità

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$$

calcoliamo

$$V''(\varphi_e^{(3)}) = V(\varphi_e^{(4)}) = 13mgr\lambda - 16cr^2(2\lambda^2-1)$$
$$= 16cr^2(\lambda^2 - 2\lambda^2 + 1) = 16cr^2(1-\lambda^2) > 0 \quad \text{se } \lambda < 1$$

Quindi, le configurazioni $\varphi_e^{(3)}$ e $\varphi_e^{(4)}$ (che $\exists$ solo se $\lambda < 1$) sono sempre stabili. Possiamo riassumere la situazione nel seguente diagramma di biforcazione



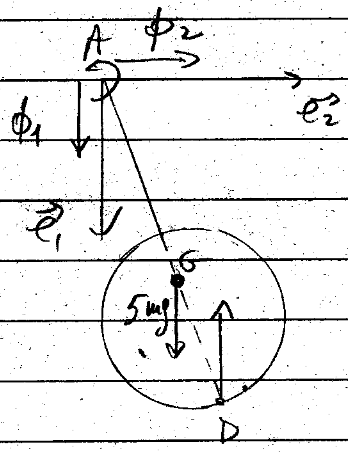
. Rimane da determinare la stabilità di $\varphi_e^{(1)} = 0$ per $\lambda = 1 \Leftrightarrow \frac{13mgr}{16cr}$ caso in cui la $V''(\varphi_e^{(1)}) = 0$. Calcoliamo le derivate successive.

$$V'''(\varphi) = -13mgr\sin\varphi + 32cr^2\sin 2\varphi \Rightarrow V'''(0) = 0$$

$$V^{IV}(\varphi) = -13mgr\cos\varphi + 64cr^2\cos 2\varphi \Rightarrow V^{(IV)}(0) = -13mgr + 64cr^2$$
$$= -16cr^2 + 64cr^2$$
$$= 48cr^2 > 0$$
$$\Downarrow$$
min $\Rightarrow$ stabile

3) Reazioni in A all'equilibrio

Scomponiamo la I ECS sugli assi $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$



$$\begin{cases} \phi_1 + 5mg - 4er\cos\varphi_e = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{cases}$$

Pertanto $\phi_2 = 0 \quad \forall \varphi_e$ e

$$\phi_1|_{\varphi_e^{(1)}} = 4er - 5mg$$

$$\phi_1|_{\varphi_e^{(2)}} = -4er - 5mg < 0$$

$$\phi_1|_{\varphi_e^{(3)}} = \phi_1|_{\varphi_e^{(4)}} = 4er\lambda - 5mg = \cancel{4er}\frac{13mg}{16\cancel{er}} - 5mg = -\frac{7}{4}mg < 0$$

Dinamica

4) Scriviamo l'eq. di Lagrange relativa a φ. Calcolo l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} I_{A3} \dot{\varphi}^2 \qquad I_{A3} \overset{(11)}{=} \frac{118}{3} m r^2 = I_{Az}$$

Uso la forma non conservativa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = Q_\varphi$$

$$\frac{118}{3} m r^2 \ddot{\varphi} = r \sin\varphi \left(16 c r \cos\varphi - 13 m g\right)$$

$$(6.1) \qquad \ddot{\varphi} = \frac{3}{118\, m r} \sin\varphi \left(16 c r \cos\varphi - 13 m g\right) = f(\varphi)$$

5) Il modello è localmente conservativo, i vincoli sono fissi e bilateri; quindi l'energia totale si conserva.

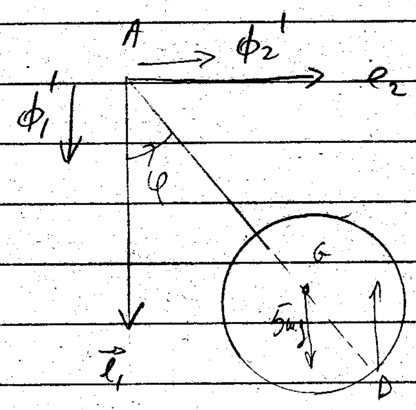
$$E|_{t=0} = K + V = \frac{59}{3} m r^2 \dot{\varphi}^2 + 8 c r^2 \cos^2\varphi - 13 m g r \cos\varphi$$

Dalle condizioni iniziali $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ segue

$E|_{t=0} = 0$. Pertanto vale che

$$(6.2) \qquad \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{59\, m r^2}\left(13 m g r \cos\varphi - 8 c r^2 \cos^2\varphi\right) = g(\varphi)$$

6) Reazioni dinamiche in A



Scomponendo la I ECD lungo gli assi $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ si trova

$$\begin{cases} \Phi_1' + 5mg - 4cr\cos\varphi = 5m\,\ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_1 \\ \Phi_2' = 5m\,\ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_2 \end{cases}$$

Poiché

$$\vec{x}_G = \frac{13}{5} r \left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$\dot{\vec{x}}_G = \frac{13}{5} r \left(-\sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$\ddot{\vec{x}}_G = \frac{13}{5} r \left[\left(-\sin\varphi\,\ddot\varphi - \cos\varphi\,\dot\varphi^2\right)\vec{e}_1 + \left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right)\vec{e}_2\right]$$

risulta

$$\Phi_1' = 4cr\cos\varphi - 5mg - 13mr\left(\sin\varphi\,\ddot\varphi + \cos\varphi\,\dot\varphi^2\right)$$

$$\Phi_2' = 13mr\left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right)$$

Sostituendo nelle 2 eq. precedenti la (6.1) e la (6.2) al posto di $\ddot\varphi$ e $\dot\varphi^2$ rispettivamente, si ottiene le risposte.

7) Eq. di Lagrange linearizzata nell'intorno delle configurazioni di equilibrio.

Poichè il modello ha 1 g.l. ed è conservativo, l'eq. linearizzata si scrive

$$a(\varphi_e)\,\ddot{\eta} + V''(\varphi_e)\,\eta = 0 \qquad \eta = \varphi - \varphi_e$$

dove $a(\varphi) = \frac{d^2 K}{d\varphi^2} = I_{A_3} = \frac{118}{3} m r^2$

Allora, l'eq. linearizzata nelle config. di equilibrio diventa:

$$\varphi_e^{(1)} = 0 \quad \frac{118}{3} m r^2 \ddot{\varphi} + 16 c r^2 (\lambda - 1)\,\varphi = 0 \qquad \lambda \in R^+$$

$$\varphi_e^{(2)} = \pi \quad \frac{118}{3} m r^2 \ddot{\varphi} - 16 c r^2 (\lambda + 1)(\varphi - \pi) = 0 \qquad \lambda \in R^+$$

$$\varphi_e^{(3)}, \varphi_e^{(4)} \quad \frac{118}{3} m r^2 \ddot{\varphi} + 16 c r^2 (1 - \lambda^2)(\varphi - \varphi_e^{(3),(4)}) = 0 \quad \alpha\lambda < 1$$

Osserviamo che la I eq. ha come soluzioni

se $\lambda < 1$ moti iperbolici

se $\lambda > 1$ moti oscillatori di frequenza $\nu = \sqrt{\frac{3 \cdot 16 c \cancel{r^2} (\lambda - 1)}{\underset{59}{\cancel{118}}\, m \cancel{r^2}}}$

se $\lambda = 1$ moti uniformi

La II eq. fornisce sempre dei moti iperbolici, mentre la III eq. sempre dei moti oscillatori di frequenza (poichè $\lambda < 1$)

$$\nu = \sqrt{\frac{3 \cdot 16 c \cancel{r^2} (1 - \lambda^2)}{118\, m \cancel{r^2}}} = \sqrt{\frac{24}{59} \frac{c}{m} (1 - \lambda^2)}$$