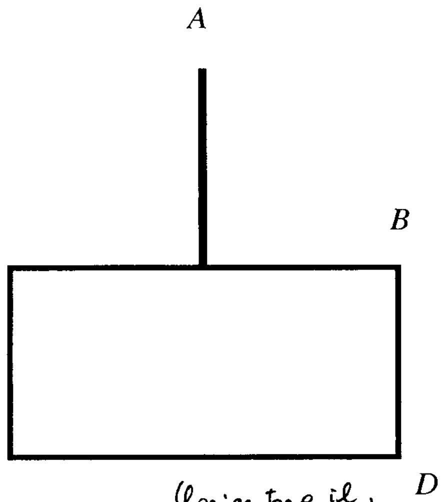
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 21 giugno 2010

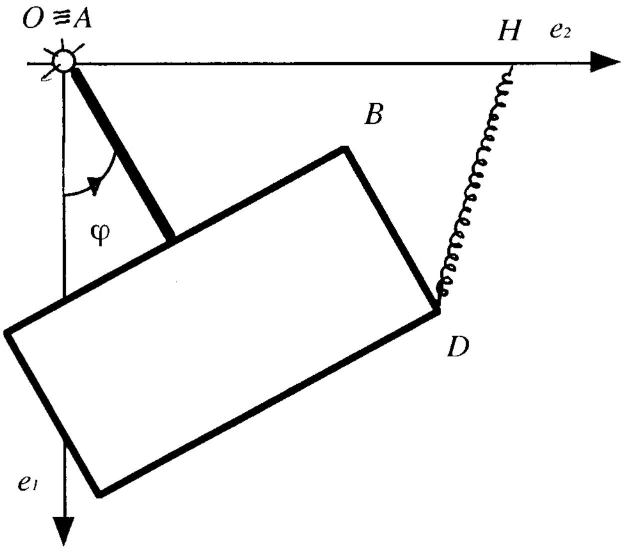
(G. Tondo)



È dato il corpo rigido di figura formato da un'asta di lunghezza l e massa m saldata a una **lamina** rettangolare omogenea di massa $3m$ e di lati l e $2l$.

1) Calcolare il (baricentro e il) momento d'inerzia del corpo rispetto ad una retta passante per i punti A e B.

STATICA.



Si vincoli il corpo in un piano **verticale** con una cerniera liscia fissata in O. Le forze attive sono: il peso proprio del corpo e la forza di richiamo della molla di costante elastica c, collegata al vertice D della lamina e al punto fisso H, posto a distanza d da O.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari esterne all'equilibrio in A.

DINAMICA.

Inoltre si chiede di scrivere:

4) un' equazione differenziale pura di moto;

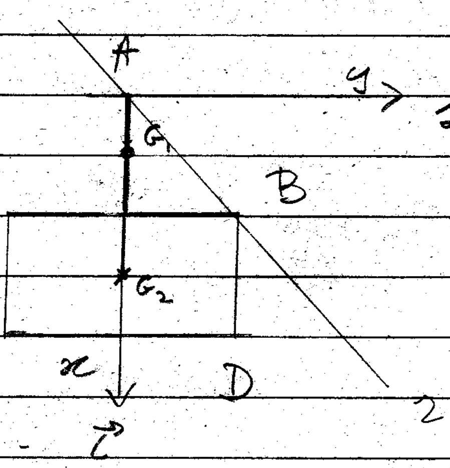
5) un integrale primo di moto a partire dalle condizioni iniziali $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ (esame da 6 CFU);

5a) l'equazione di Lagrange linearizzata intorno alle configurazioni di equilibrio e la frequenza delle piccole oscillazioni intorno a quella di equilibrio stabile (esame da 9 CFU);

6) le reazioni vincolari in A durante il moto, in funzione della coordinate libera.

Tema del 21/06/2010

Conviene scegliere la terna solidale $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.



1) Baricentro

Per la proprietà distributiva sarà un punto interno al segmento G_1G_2. Precisamente

(1.1) $$x_G = \frac{m\, x_{G_1} + 3m\, x_{G_2}}{4m} = \frac{1}{4}\left(\frac{l}{2} + \frac{3\cdot 3l}{2}\right) = \frac{5}{4}\, l$$

2) Momento d'inerzia rs. a r

Calcolo la matrice I_A rs. alla terna $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ che è un TPI(A) per simmetria materiale.

$$I_x = \cancel{I_x^{(a)}} + I_x^{(e)} = \frac{1}{12}(3m)(2l)^2 = m l^2$$

$$I_y = I_y^{(a)} + I_y^{(e)} \qquad I_y^{(a)} = \frac{1}{3} m l^2$$

$$I_y^{(e)} = I_{G_2 y} + 3m\,\overline{AG_2}^2 = \frac{1}{12}(3m)\, l^2 + 3m\left(\frac{3l}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m l^2 + \frac{27}{4} m l^2 = 7 m l^2$$

$$I_y = \frac{1}{3} m l^2 + 7 m l^2 = \frac{22}{3} m l^2$$

Quindi,

(1.2) $$I_A = m l^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{22}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{3} \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \text{vers}(B-A) \cdot \mathbb{I}_A \left(\text{vers}(B-A)\right)$$

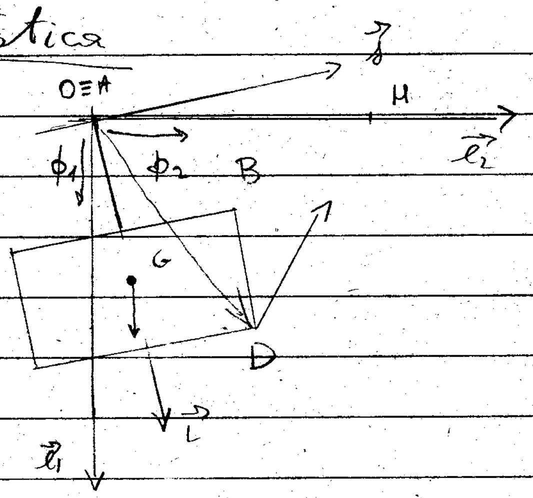
$$\text{vers}(B-A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$

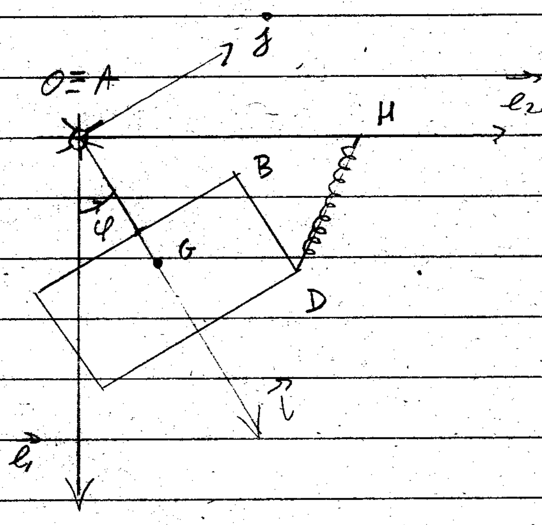
Pertanto

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1]\, m l^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{22}{3} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} m l^2 [1, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{22}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \left(1 + \frac{22}{3}\right) = \frac{25}{6} m l^2$$

Statica





Il modello è una macchina semplice a vincoli olonomi, non dissipativi e forze posizionali. Pertanto è conservativo, cioè ammette energia potenziale, data da

(3.1) $V(\varphi) = -4m\vec{g}\cdot\vec{x}_G + \frac{1}{2} c\, \overline{DH}^2$

Determiniamo il vettore

(3.2) $D - H = (D - O) + (O - H)$

Per determinare il vettore $(D-O)$ osserviamo che esso, rispetto alla terna solidale $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ha componenti

(3.3) $D - O = 2l\,\vec{i} + l\,\vec{j}$

Per calcolarne le componenti nella terna fissa $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ basta tener conto che

(3.4) $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\, R_\varphi$

dove

(3.5) $R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Allora, dalla (3.4)(3.5) segue che

$$(3.6)\quad [\vec{i}, \vec{j}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = [\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, e_2, -\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2]$$

Pertanto, sostituendolo nella (3.3) si trova

$$(3.7)\quad (D-O) = 2l(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2) + l(-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2)$$

$$= l\left[(2\cos\varphi - \sin\varphi)\vec{e}_1 + (2\sin\varphi + \cos\varphi)\vec{e}_2\right]$$

Quindi,

$$(3.8)\quad (D-H) = (2l\cos\varphi - l\sin\varphi)\vec{e}_1 + (2l\sin\varphi + l\cos\varphi - d)\vec{e}_2$$

e

$$\overline{DH}^2 = (2l\cos\varphi - l\sin\varphi)^2 + (2l\sin\varphi + l\cos\varphi - d)^2 =$$

$$= 4l^2\cos^2\varphi + l^2\sin^2\varphi - 4l^2 \cancel{\sin\varphi\cos\varphi} +$$
$$+ 4l^2\sin^2\varphi + l^2\cos^2\varphi + d^2 +$$
$$- 4ld\sin\varphi + 4ld\cancel{\sin\varphi\cos\varphi} - 2ld\cos\varphi$$

$$= 5l^2 + d^2 - 2ld(2\sin\varphi + \cos\varphi)$$

Pertanto, l'energia potenziale del modello è

$$V(\varphi) = -\cancel{4}mg\,\vec{e}_1 \cdot \frac{5}{\cancel{4}}l(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2) + \frac{1}{2}c\left[-2ld(2\sin\varphi + \cos\varphi)\right]$$

$$= -5mgl\cos\varphi - cld(2\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$$= -l(5mg + cd)\cos\varphi - 2cld\sin\varphi$$

Cerchiamo i punti stazionari di $V(\varphi)$.

(5.1) $V'(\varphi) = + l(5mg+cd)\sin\varphi - 2cld\cos\varphi = -Q_\varphi$

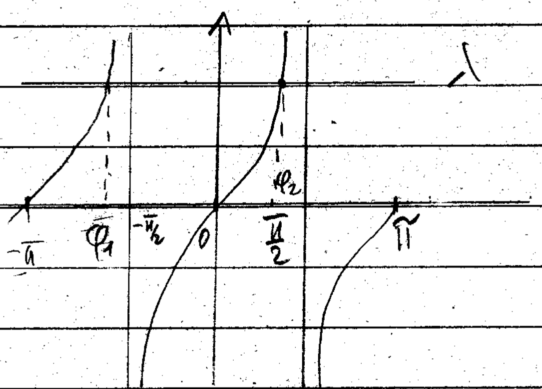
L'eq. pura di equilibrio è

(5.2) $(5mg+cd)\sin\varphi - 2c\,d\cos\varphi = 0$

Poichè $\cos\varphi = 0$ non è soluzione di (5.2), possiamo scrivere la (5.2) come

(5.3) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2cd}{5mg+cd} = \dfrac{2}{1+5\frac{mg}{cd}} = \lambda > 0$

Risolvendo l'eq. (5.3) graficamente, si trova



(5.4)
$\varphi_1 = \varphi_2 - \pi$; $\sin\varphi_1 = \dfrac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, $\cos\varphi_1 = \dfrac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\lambda$ $0<\varphi_2<\frac{\pi}{2}$; $\sin\varphi_2 = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, $\cos\varphi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

Per determinare la stabilità di φ_1 e φ_2, calcoliamo

(5.5) $V''(\varphi) = l(5mg+cd)\cos\varphi + 2cld\sin\varphi = l(5mg+cd)\left[\cos\varphi + \lambda\sin\varphi\right]$

$V''(\varphi_1) = l(5mg+cd)\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} - \dfrac{\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) < 0 \Rightarrow$ max $\Rightarrow$ eq. instabile

$V''(\varphi_2) = l(5mg+cd)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} + \dfrac{\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) > 0 \Rightarrow$ min $\Rightarrow$ eq. stabile

3) Reazioni statiche in A

Dalla I ECS,

$$\begin{cases} \Phi_1 + 4mg + \vec{F}_D \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \Phi_2 + \vec{F}_D \cdot \vec{e}_2 = 0 \end{cases}$$

tenendo conto che

$$\vec{F}_D = -c\,(D-H)$$

e che $(D-H)$ è dato dalla (3.8), si ricava

$$\begin{cases} \Phi_1 = -4mg + c\,(2l\cos\varphi_e - l\sin\varphi_e) \\ \Phi_2 = c\,(2l\sin\varphi_e + l\cos\varphi_e - d) \end{cases}$$

Pertanto, utilizzando le (5.4) si ottiene

$$\begin{cases} \Phi_1|_{\varphi_1} = -4mg + cl\left(\frac{-2}{\sqrt{1+\lambda^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) = -4mg - cl\left(\frac{2-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) < 0 \\ \Phi_2|_{\varphi_1} = cl\left(\frac{-2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} - d\right) = -cl\left(\frac{2\lambda+1}{\sqrt{1+\lambda^2}} + d\right) < 0 \end{cases}$$

mentre

$$\begin{cases} \Phi_1|_{\varphi_2} = -4mg + cl\left(\frac{2}{\sqrt{1+\lambda^2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) = -4mg + cl\,\frac{2-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \Phi_2|_{\varphi_2} = c\left(\frac{2\lambda l}{\sqrt{1+\lambda^2}} + \frac{l}{\sqrt{1+\lambda^2}} - d\right) = c\left(\frac{l(2\lambda+1)}{\sqrt{1+\lambda^2}} - d\right) \end{cases}$$

Dinamica

Il modello è un rigido con punto fisso: A. Quindi, la sua energia cinetica è data da

$$K = \frac{1}{2} J_{3A} \dot{\varphi}^2 \qquad J_{3A} \overset{(1.2)}{=} \frac{25}{3} m l^2$$

$$(7.1) \qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2\right)$$

4) L'eq. di Lagrange è

$$(7.2) \qquad \frac{25}{3} m l^2 \ddot{\varphi} \overset{(5.1)}{=} -l(5mg+cd)(\sin\varphi - \lambda\cos\varphi), \text{ da cui}$$

$$(7.3) \qquad \ddot{\varphi} = \frac{3}{25 m l}(5mg+cd)(\sin\varphi - \lambda\cos\varphi) = f(\varphi)$$

5) Vale il teorema di conservazione dell'energia meccanica. Pertanto,

$$(7.3) \qquad E = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2\right) - (5mgl + cld)(\cos\varphi + \lambda\sin\varphi)$$

$$E(0) = -(5mgl + cld)$$

Allora,

$$(7.4) \qquad \dot{\varphi}^2 = \frac{6}{25 m l^2}\left[(5mgl + cld)(-1 + \cos\varphi + \lambda\sin\varphi)\right] = g(\varphi)$$

3a) Poichè il modello è conservativo ed ha 1 g.l., l'eq. di Lagrange linearizzata, nell'intorno di una configurazione di equilibrio, è data da

$$(8.1) \quad a(q_e)\ddot{x} + V''(q_e)\, x = 0$$

dove $a(q)$ e x sono definite da

$$(8.2) \quad K = \frac{1}{2} a(q)\dot{q}^2 \quad , \quad x = q - q_e$$

Per il seguente modello, tenendo conto di (7.1) e (5.5) si ha

$$(8.3) \quad \frac{25}{3} m l^2 \ddot{x} + l(5mg+cd)(\cos\varphi_e + \lambda \sin\varphi_e)\, x = 0$$

Pertanto, l'eq. linearizzata nell'intorno di

$$(8.4) \quad \varphi_1 : \quad \frac{25}{3} m l^2 \ddot{x} - l(5mg+cd)\sqrt{1+\lambda^2}\, x = 0$$

$$(8.5) \quad \varphi_2 : \quad \frac{25}{3} m l^2 \ddot{x} + l(5mg+cd)\sqrt{1+\lambda^2}\, x = 0$$

La (8.4) ha soluzioni esponenziali reali in t (iperboliche) mentre la (8.5) ha soluzioni armoniche di frequenza angolare

$$\nu = \sqrt{\frac{3}{25 m l}(5mg+cd)\sqrt{1+\lambda^2}}$$

c) Reazioni dinamiche in A in funzione di φ

Dalla I ECD segue che

$$(9.1)\quad \begin{cases} \Phi_1' + 4mg + \vec{F}_D \cdot \vec{e}_1 = 4m\, \vec{a}_G \cdot \vec{e}_1 \\ \Phi_2' + \vec{F}_D \cdot \vec{e}_2 = 4m\, \vec{a}_G \cdot \vec{e}_2 \end{cases}$$

Dalla (1.1)

$$G - O = \frac{5}{4} l\, \vec{i} \overset{(3.6)}{=} \frac{5}{4} l \left(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2 \right)$$

Quindi, derivando rispetto al tempo si ottiene

$$(9.2)\quad \begin{aligned} \vec{v}_G &= \frac{5}{4} l \left(-\sin\varphi\, \dot\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \dot\varphi\, \vec{e}_2 \right) \\ \vec{a}_G &= \frac{5}{4} l \left[\left(-\sin\varphi\, \ddot\varphi - \cos\varphi\, \dot\varphi^2 \right) \vec{e}_1 + \left(\cos\varphi\, \ddot\varphi - \sin\varphi\, \dot\varphi^2 \right) \vec{e}_2 \right] \end{aligned}$$

Pertanto, sostituendo nella (9.1) si ottiene

$$(9.3)\quad \begin{cases} \Phi_1' = -4mg + c\left(2l\cos\varphi + l\sin\varphi\right) - 4m \frac{5}{4} l \left(\sin\varphi\, \ddot\varphi + \cos\varphi\, \dot\varphi^2 \right) \\ \Phi_2' = c\left(2l\sin\varphi + l\cos\varphi - d\right) + 4m \frac{5}{4} l \left(\cos\varphi\, \ddot\varphi - \sin\varphi\, \dot\varphi^2 \right) \end{cases}$$

Sostituendo in (9.3) la (7.4) e la (7.3) si ottiene la risposta