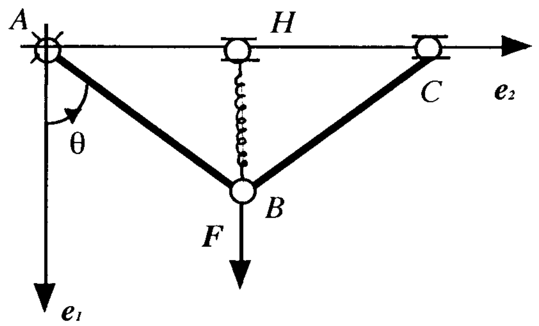
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 31 gennaio 2011

(G. Tondo)



Si consideri il sistema articolato di figura costituito dalle aste omogenee AB e BC, di lunghezza l e massa m, incernierate in B e vincolate in A e in C su un piano **verticale** (vincoli lisci e bilateri). Il sistema è soggetto al peso proprio delle aste, alla forza elastica della molla (mantenuta verticale dal carrello in H) e alla forza costante F, applicata in B.

STATICA.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema e discuterne la stabilità;

2) calcolare le reazioni vincolari esterne in A e in C, nelle configurazioni di equilibrio;

3) calcolare le reazioni vincolari interne nel nodo B, sia sull'asta BC, sia sulla cerniera.

DINAMICA.

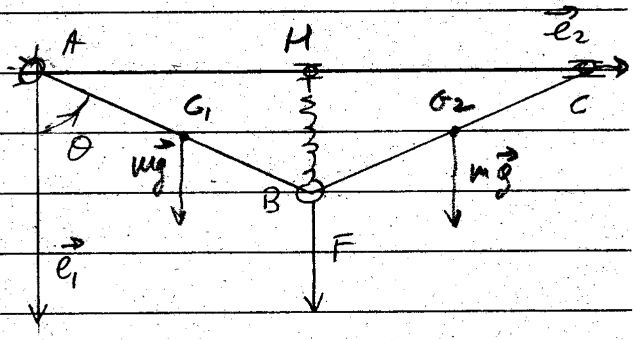
4) scrivere un' equazione differenziale pura di moto;

5) calcolare le reazioni vincolari esterne in A e in C durante il moto in funzione di θ, a partire dalle condizioni iniziali $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$;

6) calcolare le reazioni vincolari interne nel nodo B sull'asta BC (esame da 6 CFU);

6a) scrivere l'equazione di Lagrange linearizzata nelle configurazioni di equilibrio stabile e calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni (esame da 9 CFU).

Tema d'esame del 31/01/2011



Il modello è una biella-manovella.
Quindi ha $\ell = 1$ nelle config. a vincoli efficaci.
Scelgo come coordinate libere

$$\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$$

e ricordo che $\theta = 0$, $\theta = \pi$ sono config. a vincoli inefficaci

Statica

Il modello è soggetto a forze conservative: peso, molla, forza uniforme F. Quindi, ammette energia potenziale data da

$$(1.1) \quad V(\theta) = -m\vec{g}\cdot(\vec{x}_{G_1} + \vec{x}_{G_2}) + \frac{1}{2}c\,\overline{BH}^2 - \vec{F}_B \cdot \vec{x}_B$$

Poiché

$$(1.2) \quad \vec{x}_{G_1} = \frac{l}{2}(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2) \qquad \vec{x}_{G_2} = \frac{l}{2}(\cos\theta\,\vec{e}_1 + 3\sin\theta\,\vec{e}_2)$$

$$\overline{BH} = l\cos\theta, \qquad \vec{F}_B = F\vec{e}_1, \quad \vec{x}_B = l(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2)$$

si ha

$$V(\theta) = -mg\,\vec{e}_1\cdot\frac{l}{2}(2\cos\theta\,\vec{e}_1 + \cancel{\sin\theta\,\vec{e}_2}) + \frac{1}{2}c(l\cos\theta)^2 +$$

$$- F\vec{e}_1\cdot l(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \cancel{\sin\theta\,\vec{e}_2})$$

$$= -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}c\,l^2\cos^2\theta - F\,l\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}c\,l^2\cos^2\theta - (mg+F)\,l\cos\theta$$

Calcoliamo la derivata prima vs. a θ

$$V'(\theta) = -c\,l^2\cos\theta\sin\theta + (mg+F)\,l\sin\theta$$

Pertanto, l'eq. pura di equilibrio è

(2.1) $Q_\theta = l\sin\theta\left(cl\cos\theta - (mg+F)\right) = 0$

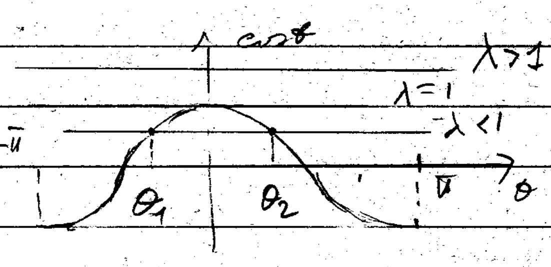
le soluzioni sono:

$\sin\theta = 0$ vel $\cos\theta = \frac{mg+F}{cl}$

Dalla 1ª eq. si ottiene $\theta_e = 0$, $\theta_e = \pi$, che scartiamo perché sono configurazioni a vincoli inefficaci.

Risolviamo la 2ª eq. graficamente

$\cos\theta = \frac{mg+F}{cl} = \lambda$



Quindi,

se $\lambda > 1$ $\nexists$ soluzioni

se $\lambda = 1$ $\theta_e = 0$ vincoli inefficaci

(2.2) se $\lambda < 1$ $\theta_e^{(1)} = -\arccos\lambda$, $\theta_e^{(2)} = \arccos\lambda$

Discutiamo la stabilità di $\theta_e^{(1)}$ e $\theta_e^{(2)}$.

$V''(\theta) = -cl^2\cos 2\theta + (mg+F)l\cos\theta$

Poiché $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\lambda^2 - 1$

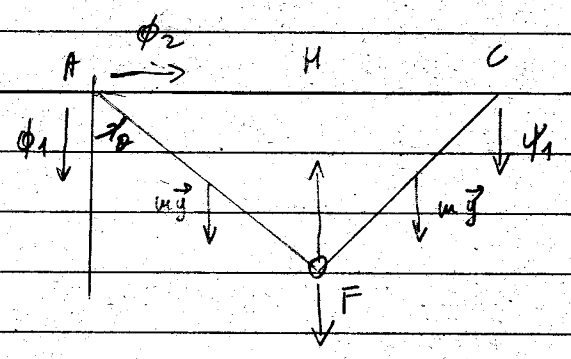
$V''(\theta_e) = -cl^2(2\lambda^2-1) + (mg+F)l\lambda$

$= cl^2\left[-2\lambda^2+1 + \frac{mg+F}{cl}\lambda\right] = cl^2(-2\lambda^2+1+\lambda^2) =$

$= cl^2(1-\lambda^2) > 0$ se $\lambda < 1$

Pertanto, $\theta_e^{(1)}$ e $\theta_e^{(2)}$ sono punti di minimo per l'energia potenziale e quindi equilibri <u>stabili</u>

2) Reazioni vincolari all'equilibrio in A e C



Le incognite sono ϕ_1, ϕ_2, ψ_1.
Scriviamo le ECS

$$
(3.1)\quad
\begin{array}{l}
\vec{R}^{(est)}\cdot\vec{e}_1 \\[2em]
\vec{R}^{(est)}\cdot e_2 \\[2em]
\vec{M}_A^{(est)}\cdot e_3
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\phi_1+2mg+F-cl\cos\theta_e+\psi_1=0 \\[2em]
\phi_2=0 \\[2em]
-mg\frac{l}{2}\sin\theta_e-(F-cl\cos\theta_e)\,l\sin\theta_e-mg\frac{3}{2}l\sin\theta_e-\psi_1 2l\sin\theta_e=0
\end{array}
\right.
$$

Riscriviamo la 3ª eq.

$$(3.1)\quad \left[-2mgl-(F-cl\cos\theta_e)l-\psi_1 2l\right]\sin\theta_e=0$$

Poiché $\sin\theta_e\neq 0$ (per $\theta_e^{(1)}$ e $\theta_e^{(2)}$) la (3.1) equivale a

$$\psi_1=\frac{1}{2}\left(-2mg-F+cl\cos\theta_e\right)=\frac{1}{2}\left(-2mg-\cancel{F}+\cancel{cl}\,\frac{\cancel{F}+mg}{\cancel{cl}}\right)$$

$$=-\frac{mg}{2}$$

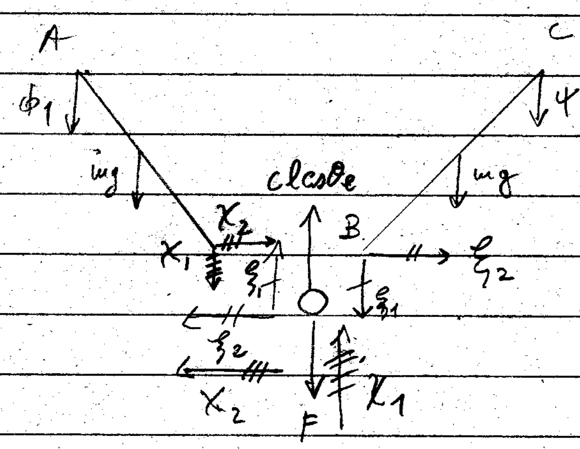
Sostituendo ψ_1 nella 1ª eq. si trova

$$\phi_1=-2mg-\cancel{F}+\cancel{cl}\,\frac{\cancel{F}+mg}{\cancel{cl}}+\frac{mg}{2}=-\frac{mg}{2}$$

Pertanto, le reazioni nelle config. di equilibrio $\theta_e^{(1)}$ e $\theta_e^{(2)}$ sono

$$\vec{\phi}_1=-\frac{mg}{2}\,\vec{e}_1\,,\qquad \vec{\psi}_1=-\frac{mg}{2}\,\vec{e}_1$$

3) Reazioni all'equilibrio in B sull'asta BC e sulla cerniera.
"Spezziamo" il modello
e indichiamo con



$\vec{\xi}$: l'azione della cerniera sull'asta BC

$\vec{\chi}$: l'azione dell'asta AB sulla cerniera

Per calcolare $\vec{\xi}$ applichiamo la I ECS sull'asta BC

$$(4.1)\begin{cases} \vec{R}^{(est \to BC)} \cdot \vec{e}_1 : & \xi_1 + mg + \psi = 0 \Rightarrow \xi_1 = -mg + \frac{mg}{2} = -\frac{mg}{2} \\ \vec{R}^{(est \to BC)} \cdot \vec{e}_2 : & \xi_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi, l'azione della cerniera sull'asta BC

$$(4.2) \qquad \vec{\xi} = -\frac{mg}{2}\vec{e}_1 \quad (\text{diretta verso l'alto})$$

Per calcolare $\vec{\chi}$ applichiamo l'equazione di Newton alla cerniera B:

$$\vec{R}^{(est \to B)} \cdot \vec{e}_1 \qquad -\chi_1 + F - c\, l \cos\theta_e - \xi_1 = 0 \Rightarrow \chi_1 = F - \cancel{cl}\frac{F+mg}{\cancel{cl}} - \xi_1$$

$$\vec{R}^{(est \to B)} \cdot \vec{e}_2 \qquad -\chi_2 - \xi_2 = 0 \qquad \Rightarrow \chi_2 = -\xi_2$$

Pertanto, tenendo della (4.2) segue

$$\chi_1 = -\frac{mg}{2}, \quad \chi_2 = 0.$$

Quindi, l'azione dell'asta AB sulla cerniera B è data da

$$\vec{\chi} = \left(\frac{mg}{2}\right)(-\vec{e}_1) = \frac{mg}{2}\vec{e}_1 \quad (\text{diretta verso il basso})$$

Inoltre, sulla cerniera B, agisce l'asta BC con la forza $-\vec{\xi} = \frac{mg}{2}\vec{e}_1$ (verso il basso)

4) Scriviamo l'eq. di Lagrange relativa a θ.

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} \qquad K^{(1)} = \frac{1}{2} I_{A_3} \dot\theta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m l^2\right)\dot\theta^2 = \frac{1}{6} m l^2 \dot\theta^2$$

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} m \vec{V}_{G_2}^2 + \frac{1}{2} I_{G_2}\dot\theta^2 \qquad I_{G_2} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\vec{V}_{G_2} = \dot{x}_{G_2}^{(1,2)} = \frac{l}{2}\left(-\sin\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_1 + 3\cos\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_2\right)$$

$$\vec{V}_{G_2}^2 = \vec{V}_{G_2}\cdot\vec{V}_{G_2} = \frac{l^2}{4}\left(\sin^2\theta\,\dot\theta^2 + 9\cos^2\theta\,\dot\theta^2\right) = \frac{l^2\dot\theta^2}{4}\left(1+8\cos^2\theta\right)$$

Quindi,

$$K^{(2)} = \frac{1}{2}\left[m\frac{l^2}{4}\dot\theta^2\left(1+8\cos^2\theta\right) + \frac{1}{12} m l^2\dot\theta^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\theta\right)$$

Pertanto

$$K = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2\left(\frac{2}{3} + 2\cos^2\theta\right) = m l^2\dot\theta^2\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\theta} = 2ml^2\dot\theta\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\theta}\right) = 2ml^2\ddot\theta\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right) + 2ml^2\dot\theta^2\left(-2\cos\theta\sin\theta\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial\theta} = ml^2\dot\theta^2\left(-2\cos\theta\sin\theta\right)$$

Quindi, l'eq. di Lagrange si scrive

$$2ml^2\ddot\theta\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right) - 4ml^2\dot\theta^2\left(\cos\theta\sin\theta\right) + 2ml^2\dot\theta^2\left(\cos\theta\sin\theta\right) = Q_\theta$$

Pertanto, tenuto conto della (2.1), diventa

(6.1) $$2ml^2\ddot{\theta}\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)-ml^2\dot{\theta}^2\sin 2\theta=+\frac{cl^2}{2}\sin 2\theta-(F+mg)\,l\sin\theta$$

5) Reazioni vincolari in A e C durante il moto.

Innanzitutto, scriviamo le ECD applicate a tutto il modello

(6.2) $$\begin{cases}\vec{R}^{\,est}\cdot\vec{e}_1=2m\,\vec{a}_G\cdot\vec{e}_1\\ \vec{R}^{\,est}\cdot\vec{e}_2=2m\,\vec{a}_G\cdot\vec{e}_2\\ \vec{M}_A^{\,est}\cdot\vec{e}_3=\frac{d}{dt}\vec{L}_A^{(sist)}\cdot\vec{e}_3\end{cases}$$

$$\vec{x}_G=\frac{m\vec{x}_{G_1}+m\vec{x}_{G_2}}{2m}=\frac{1}{2}\left[\frac{l}{2}\left(\cos\theta\,\vec{e}_1+\sin\theta\,\vec{e}_2\right)+\frac{l}{2}\left(\cos\theta\,\vec{e}_1+3\sin\theta\,\vec{e}_2\right)\right]=$$

$$=\frac{l}{2}\cos\theta\,\vec{e}_1+l\sin\theta\,\vec{e}_2$$

$$\vec{v}_G=\dot{\vec{x}}_G=l\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_1+\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_2\right)$$

$$\vec{a}_G=\ddot{\vec{x}}_G=l\left[-\frac{1}{2}\left(\sin\theta\,\ddot{\theta}+\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_1+\left(\cos\theta\,\ddot{\theta}-\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_2\right]$$

$$\vec{L}_A^{(sist)}=\vec{L}_A^{(1)}+\vec{L}_A^{(2)}$$

$$\vec{L}_A^{(1)}=I_{A3}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_3=\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}\,\vec{e}_3$$

$$\vec{L}_A^{(2)}=(G_2-A)\times m\vec{v}_{G_2}+I_{G_{23}}(-\dot{\theta})\,\vec{e}_3$$

$$\vec{x}_{G_2}\times m\vec{v}_{G_2}=\frac{l}{2}\left(\cos\theta\,\vec{e}_1+3\sin\theta\,\vec{e}_2\right)\times m\frac{l}{2}\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_1+3\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_2\right)$$

$$=m\frac{l^2}{4}\left(3\cos^2\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_3+3\sin^2\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_3\right)=\frac{3}{4}ml^2\dot{\theta}\,\vec{e}_3$$

Quindi,

$$\vec{L}_A^{(2)} = \frac{3}{4} m l^2 \dot\theta\, \vec{e}_3 - \frac{1}{12} m l^2 \dot\theta\, \vec{e}_3 = \frac{2}{3} m l^2 \dot\theta\, \vec{e}_3$$

ed

(7.1) $$\vec{L}_A^{(sis)} = \frac{1}{3} m l^2 \dot\theta\, \vec{e}_3 + \frac{2}{3} m l^2 \dot\theta\, \vec{e}_3 = m l^2 \dot\theta\, \vec{e}_3$$

Pertanto, tenendo conto delle (3.1), le (6.2) diventano

(7.2) $$\begin{cases} \phi_1' + 2mg + F - cl\cos\theta + \psi_1' = -\dfrac{2ml}{2}\left(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2\right) \\ \phi_2' = 2ml\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2\right) \\ \left[-2mgl - (F - cl\cos\theta)\,l - 2l\psi_1'\right]\sin\theta = ml^2\ddot\theta \end{cases}$$

Quindi,

(7.3) $$\begin{cases} \psi_1' = -mg + \dfrac{-F + cl\cos\theta}{2} - \dfrac{ml^2\ddot\theta}{2l\sin\theta} \\ \phi_1' = -2mg - F + cl\cos\theta - \psi_1' - ml\left(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2\right) \\ \quad = -mg - \dfrac{F + cl\cos\theta}{2} + ml\left(\dfrac{\cos 2\theta}{2\sin\theta}\,\ddot\theta - \cos\theta\,\dot\theta^2\right) \\ \phi_2' = 2ml\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2\right) \end{cases}$$

Per eliminare $\ddot\theta$ e $\dot\theta^2$ dalle eq. precedenti, osserviamo che il modello ammette l'integrale primo dell'energia meccanica. Quindi

$$K + V = K_{|t=0} + V_{|t=0}$$

Tenuto conto delle condizioni iniziali, risulta

(8.1) $$m l^2 \dot\theta^2 \left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)+\frac{1}{2} c l^2 \cos^2\theta - (mg+F) l \cos\theta = 0$$

Quindi

(8.2) $$\dot\theta^2 = \frac{(mg+F)\cancel{l}\cos\theta - \frac{1}{2} c l^{\cancel{2}} \cos^2\theta}{m l^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)} = g(\theta)$$

Risolvendo l'eq. di Lagrange rs. a θ si trova

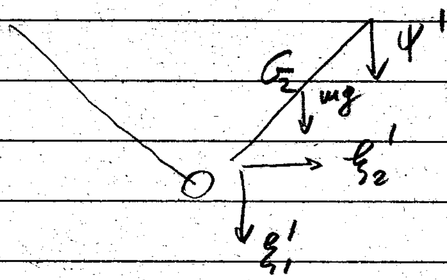
$$\ddot\theta = \frac{m l^2 \dot\theta^2 \sin 2\theta + \frac{c}{2} l^2 \sin 2\theta - (F+mg) l \sin\theta}{2 m l^2 \left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)}$$

(8.3) $$\overset{(8.2)}{=} \frac{\sin 2\theta \, \dfrac{(mg+F) l \cos\theta - \frac{1}{2} c l^2 \cos^2\theta}{\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)} + \frac{c}{2} l^2 \sin 2\theta - (F+mg) l \sin\theta}{2 m l^2 \left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)}$$

$$= f(\theta)$$

Sostituendo la (8.2) e la (8.3) nella (7.3) si ottiene la risposta.

6) Reazioni vincolari in Dinamica nel nodo B sull'asta BC



Le incognite sono ξ_1' e ξ_2'. Per calcolarle, utilizziamo la I EC(D) applicata all'asta BC

$$\begin{cases} \vec{R}^{est \to BC} \cdot \vec{e}_1 = m\, \vec{a}_{G_2} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{R}^{est \to BC} \cdot \vec{e}_2 = m\, \vec{a}_{G_2} \cdot \vec{e}_2 \end{cases}$$

Dalla (1.2) segue che

$$\vec{V}_{G_2} = \dot{\vec{x}}_{G_2} = \frac{l}{2}\left(-\sin\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_1 + 3\cos\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_2\right)$$

$$\vec{a}_{G_2} = \ddot{\vec{x}}_{G_2} = \frac{l}{2}\left[\left(-\cos\theta\,\dot\theta^2 - \sin\theta\,\ddot\theta\right)\vec{e}_1 + 3\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2\right)\vec{e}_2\right]$$

Pertanto, tenuto conto della (4.1), segue che

$$\begin{cases} \xi_1' + mg + \Psi_1' = m\,\frac{l}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) \\ \xi_2' = 3m\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2\right) \end{cases}$$

da cui

$$(9.1)\quad \begin{cases} \xi_1' = -mg - \Psi_1' - m\,\frac{l}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) \\ \xi_2' = 3m\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2\right). \end{cases}$$

Infine, sostituendo nelle (9.1) la prima eq. della (7.3) e poi la (8.2) e la (8.3) si ottiene la risposta

6a) La linearizzazione dell'eq. di Lagrange (6.1) nell'intorno delle configurazioni di equilibrio (2.2) sarà della forma

$$a(q_e)\,\ddot{\eta} + V''(q_e)\,\eta = 0 \qquad \text{modello conservativo}$$

dove

$$\eta = \theta - \theta_e\,, \quad a(\theta_e) = \left.\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta}^2}\right|_{\theta=\theta_e} = \left. 2ml^2\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)\right|_{\theta=\theta_e} = 2ml^2\left(\frac{1}{3}+\lambda^2\right)$$

$$V''(\theta_e) = c\,l^2\,(1-\lambda^2)$$

Quindi, si trova che

$$2ml^2\left(\frac{1}{3}+\lambda^2\right)\ddot{\eta} + c\,l^2(1-\lambda^2)\,\eta = 0$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è data da

$$\nu = \sqrt{\frac{c\,\cancel{l^2}\,(1-\lambda^2)}{2m\,\cancel{l^2}\left(\frac{1}{3}+\lambda^2\right)}} = \sqrt{\frac{3c}{2m}\left(\frac{1-\lambda^2}{1+3\lambda^2}\right)}$$

che assume valori reali se $\lambda < 1$, cioè per tutti i valori di λ per i quali esistono le config. di equilibrio (2.2).