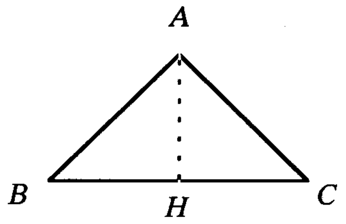
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 7 giugno 2010

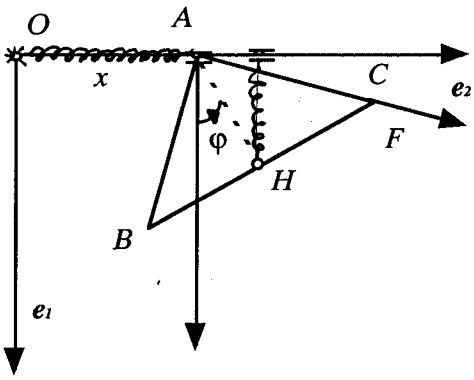
(G. Tondo)



È data una **lamina** triangolare omogenea di massa m, i cui lati hanno lunghezza $\overline{AB} = \overline{AC} = l$ e $\overline{BC} = l\sqrt{2}$

1) Calcolare il baricentro della lamina e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il baricentro e ortogonale al piano della lamina.

STATICA.



Si vincoli la lamina in un piano **verticale** con una cerniera liscia in A e scorrevole su un asse orizzontale. Le forze attive sono: la forza $\mathbf{F_C} = F\mathbf{vers}\,(\mathbf{C} - \mathbf{A})$ applicata in C, la forza di richiamo delle due molle, di costante elastica c, il peso proprio della lamina.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari in A all'equilibrio.

DINAMICA.

Inoltre si chiede di:

4) scrivere due equazioni differenziali pure di moto;

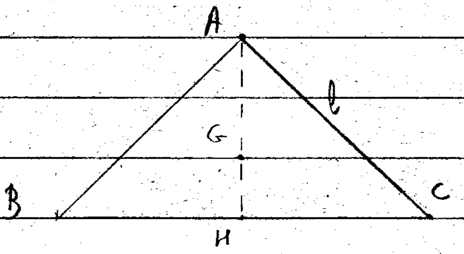
5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, determinarla (esame da 6 CFU);

5a) linearizzare le equazioni del moto in un intorno delle configurazioni di equilibrio che esistono per qualunque valore dei parametri (esame da 9 CFU);

6) calcolare le reazioni vincolari in A durante il moto in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo.

Tema del 7/06/2010

1)

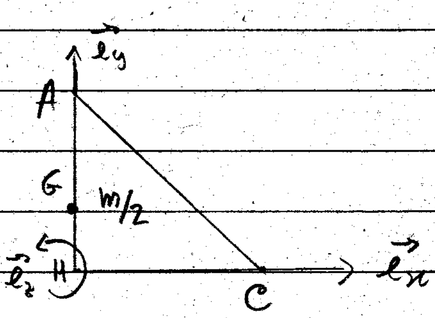


$\overline{AC} = \overline{AB} = \ell$, $\overline{HC} = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}$

Il baricentro della lamina triangolare omogenea sta sulla mediana AH, asse di simmetria (ortogonale, in questo caso) a distanza dal vertice A pari a $\frac{2}{3}\overline{AH}$. Quindi,

$$\overline{AH} = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{AG} = \frac{2}{3}\frac{\ell}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\ell \, , \quad \overline{GH} = \frac{\ell}{3\sqrt{2}}$$

L'asse passante per G e $\perp$ alla lamina è un API(G), quindi indichiamo con J_{zG} il momento d'inerzia relativo. Per calcolarlo, consideriamo il triangolo $\overset{\triangle}{AHC}$, che è metà della lamina



e ricordiamo che

$$I_x = \frac{1}{6}\left(\frac{m}{2}\right)\overline{AH}^2 = I_y = \frac{m}{12}\frac{\ell^2}{2} = \frac{1}{24} m \ell^2 .$$

Pertanto, per il triangolo $\overset{\triangle}{AHC}$

$$I_{zH} = 2 I_x = \frac{1}{12} m \ell^2 ,$$

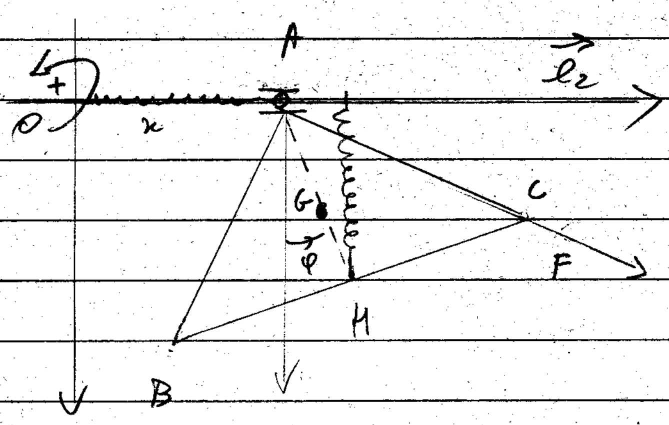
e quindi, per l'intera lamina $\overset{\triangle}{ABC}$, segue, per simmetria, che

$$J_{zH} = 2 I_{zH} = \frac{1}{6} m \ell^2 .$$

Infine, applicando il Teo. di Huygens-Steiner alla lamina $\hat{ABC}$ si ottiene

$$J_{3G} = J_{zH} - m\,\overline{GH}^2 = \frac{1}{6} m l^2 - m\frac{l^2}{9\cdot 2} = \frac{2}{18} m l^2 = \frac{1}{9} m l^2$$

Statica



piano verticale, vincoli lisci.

Analisi cinematica: $g=3$, $v=r=1$, $l=2$, c.l. (φ, x), $-\pi<\varphi<\pi$, $x\in\mathbb{R}$.

2) Utilizziamo il PLV tenendo conto che per un rigido

$$LV^{(at)} = \vec{R}^{(at)}\cdot\delta\vec{x}_A + \vec{M}_A^{(at)}\cdot\vec{\chi}$$

$$\delta\vec{x}_A = \delta x\,\vec{e}_2 \quad \forall\,\delta x$$
$$\chi = \delta\varphi\,\vec{e}_3 \quad \forall\,\delta\varphi$$

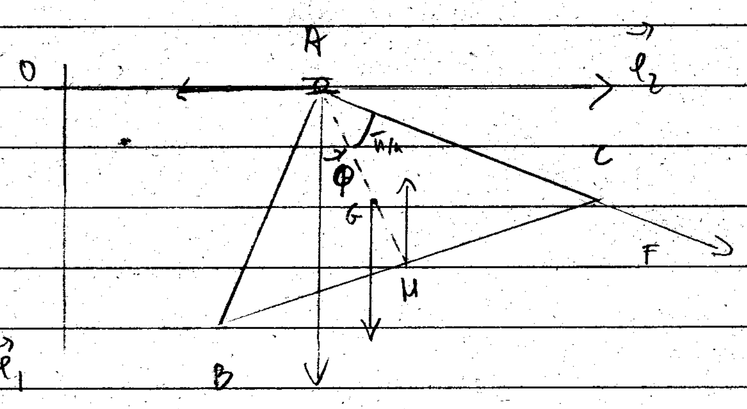


Diagramma delle forze attive

$$\vec{F}_A = -c x\,\vec{e}_2$$
$$\vec{F}_G = m g\,\vec{e}_1$$
$$\vec{F}_H = -c\,\overline{AH}\cos\varphi\,\vec{e}_1 = -c\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\varphi\,\vec{e}_1$$
$$\vec{F}_C = F\,\mathrm{vers}(C-A) = F\left[\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_1 + \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_2\right]$$

$$\vec{R}^{(at)}\cdot\delta\vec{x}_A = \left(\vec{F}_A+\vec{F}_G+\vec{F}_H+\vec{F}_C\right)\cdot\delta x\,\vec{e}_2$$

$$= \left(-cx\,\vec{e}_2 + \cancel{mg\,\vec{e}_1} - \cancel{c\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\varphi\,\vec{e}_1} + F\left[\cancel{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_1} + \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_2\right]\right)\cdot\delta x\,\vec{e}_2$$

$$= \left[-cx + F\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]\delta x$$

$$\vec{M}_A^{(est)} \cdot \delta\varphi \vec{e}_3 = (G-A)\times\vec{F}_G + (H-A)\times\vec{F}_H + \cancel{(C-A)\times\vec{F}_C}$$

$$= \left(-\overline{AG}\sin\varphi\, mg + \overline{AH}\sin\varphi\, \overline{AH}\, c\cos\varphi\right)\delta\varphi$$

(3.1)

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} l\, mg \sin\varphi + \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 c \sin\varphi\cos\varphi\right)\delta\varphi$$

Pertanto,

(3.2) $$LV^{(est)} = \left[-cx + F\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]\delta x + \left[l\sin\varphi\left(\frac{c}{2}l\cos\varphi - \frac{mg\sqrt{2}}{3}\right)\right]\delta\varphi.$$

Ciò implica che

(3.3) $$Q_x = -cx + F\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$$

(3.4) $$Q_\varphi = cl^2\sin\varphi\left(\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{mg}{cl}\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

N.B. Si può verificare che, in questo caso,

(3.5) $$Q_x = \vec{R}^{est}\cdot\vec{e}_2 \quad , \quad Q_\varphi = \vec{M}_A^{est}\cdot\vec{e}_3$$

Dunque, le eq. pure di equilibrio sono:

(3.6) $$\begin{cases} -cx + F\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ cl^2\sin\varphi\left(\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{mg}{cl}\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

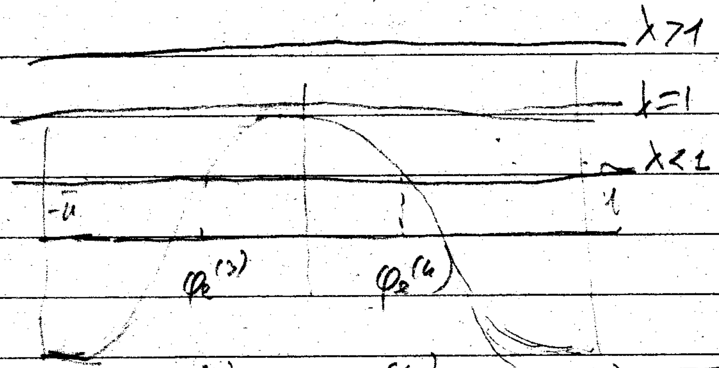
Il sistema (3.6) è equivalente ai due sistemi

(3.7) $$\begin{cases} x = \frac{F}{c}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\varphi = 0 \end{cases}$$ (3.8) $$\begin{cases} x = \frac{F}{c}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos\varphi = \frac{2}{3}\sqrt{2}\frac{mg}{cl} = \lambda \end{cases}$$

Allora, le soluzioni $\vec{q}_e = (\varphi_e, x_e)$ di (3.7)

$$\vec{q}_e^{(1)} = \left(0, \frac{F}{c\sqrt{2}}\right) \quad , \quad \vec{q}_e^{(2)} = \left(\pi, -\frac{F}{c\sqrt{2}}\right)$$

Risolviamo il sistema (3.8)



$$\begin{cases} x = \dfrac{F}{c\sqrt{2}}(\sin\varphi_e + \cos\varphi_e) \\ \cos\varphi_e = \lambda \end{cases}$$

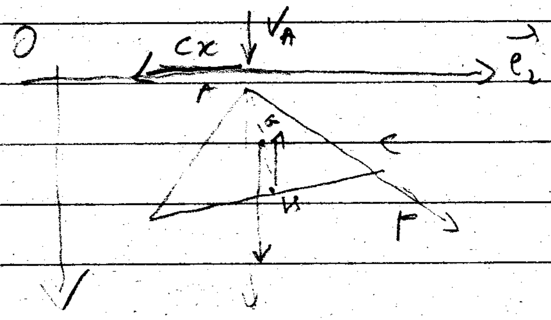
$$\varphi_e^{(3)} = -\varphi_e^{(4)}, \quad \sin\varphi_e^{(3)} = -\sqrt{1-\lambda^2}$$

$$\varphi_e^{(4)} = \arccos\lambda, \quad \sin\varphi_e^{(4)} = \sqrt{1-\lambda^2}$$

Quindi, se $\lambda < 1$ esistono anche

$$\vec{q}_e^{(3)} = \left(-\arccos\lambda, \frac{F}{c\sqrt{2}}\left(\lambda - \sqrt{1-\lambda^2}\right)\right); \quad \vec{q}_e^{(4)} = \left(\arccos\lambda, \frac{F}{c\sqrt{2}}\left(\lambda + \sqrt{1-\lambda^2}\right)\right).$$

3) Reazioni vincolari in A



Dalla I ECS proiettata lungo $\vec{e}_1$ segue che

$$V_A + mg - c\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\varphi_e + F\cos\left(\varphi_e + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

cioè

$$V_A = -mg + \frac{cl}{\sqrt{2}}\cos\varphi_e - \frac{F}{\sqrt{2}}(\cos\varphi_e - \sin\varphi_e)$$

Allora

$$V_A\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -mg + \frac{cl}{\sqrt{2}} - \frac{F}{\sqrt{2}} \quad ; \quad V_A\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = -mg - \frac{cl}{\sqrt{2}} + \frac{F}{\sqrt{2}}$$

$$V_A\big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = -mg + \frac{cl}{\sqrt{2}}\lambda - \frac{F}{\sqrt{2}}\left(\lambda + \sqrt{1-\lambda^2}\right); \quad V_A\big|_{\vec{q}_e^{(4)}} = -mg + \frac{cl}{\sqrt{2}}\lambda - \frac{F}{\sqrt{2}}\left(\lambda - \sqrt{1-\lambda^2}\right)$$

Dinamica

Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. Calcoliamo l'energia cinetica della lamina (che non ha punti fissi).

$$(5.1)\quad K = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{3G} \dot{\varphi}^2 \qquad J_{3G} = \frac{1}{9} m \ell^2$$

$$(5.2)\quad \vec{x}_G = \vec{x}_A + (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = x \vec{e}_2 + \frac{2\ell}{3\sqrt{2}}(\cos\varphi \vec{e}_1 + \sin\varphi \vec{e}_2) = \frac{2}{3\sqrt{2}}\ell\cos\varphi \vec{e}_1 + \left(x + \frac{2\ell\sin\varphi}{3\sqrt{2}}\right)\vec{e}_2$$

$$(5.3)\quad \vec{v}_G = \frac{2\ell}{3\sqrt{2}}(-\sin\varphi\dot{\varphi})\vec{e}_1 + \left(\dot{x} + \frac{2}{3}\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\varphi\dot{\varphi}\right)\vec{e}_2$$

$$(5.4)\quad v_G^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\ell\right)^2 \sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \left(\dot{x} + \frac{\sqrt{2}}{3}\ell\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\ell\right)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\ell\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi} =$$

$$= \frac{2}{9}\ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\ell\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi}$$

Quindi,

$$(5.5)\quad K = \frac{1}{2} m\left(\frac{2}{9}\ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\ell\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{9} m\ell^2\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m\left(\frac{1}{3}\ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\ell\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi}\right)$$

$$(5.6)\quad \frac{\partial K}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m\ell^2\dot{\varphi} + m\frac{\sqrt{2}}{3}\ell\cos\varphi\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{1}{3} m\ell^2\ddot{\varphi} + \frac{\sqrt{2}}{3} m\ell(\cos\varphi\ddot{x} - \sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi})$$

$$(3.7)\quad \frac{\partial K}{\partial\varphi} = m\frac{\sqrt{2}}{3}\ell(-\sin\varphi)\dot{x}\dot{\varphi}$$

Quindi la I EL è:

$$(5.8)\quad \frac{1}{3} m\ell^2\ddot{\varphi} + \frac{\sqrt{2}}{3} m\ell(\cos\varphi\ddot{x} - \cancel{\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}}) + \cancel{m\frac{\sqrt{2}}{3}\ell\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}} = \frac{c\ell^2}{2}\sin\varphi(\cos\varphi - \lambda)$$

Inoltre

$$(6.1)\quad \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m\frac{\sqrt{2}}{3}\, l \cos\varphi\, \dot{\varphi}\ ;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + m\frac{\sqrt{2}}{3}\, l\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0$$

Pertanto, la II EL è:

$$(6.2)\quad m\ddot{x} + m\frac{\sqrt{2}}{3}\, l\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right) = -cx + F\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$$

5) La sollecitazione attiva agente sul modello NON è conservativa. Infatti, dalle (3.3) e (3.4) segue

$$\frac{\partial Q_x}{\partial \varphi} \neq 0\ ,\quad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_x}{\partial \varphi} \neq \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x}$$

Pertanto, la sollecitazione non ammette energia potenziale e quindi non ha senso parlare di energia meccanica del modello.

5) Linearizzazione delle EL

Si chiede di linearizzare le EL in un intorno delle configurazioni di equilibrio che esistono per qualunque valore del parametro λ, quindi in un intorno di

$$\vec{q}_e^{(1)} = \left(0, \frac{F}{c\sqrt{2}}\right) \quad , \quad \vec{q}_e^{(2)} = \left(\pi, -\frac{F}{c\sqrt{2}}\right).$$

A tale scopo, ricordiamo che le equazioni linearizzate saranno

$$A\ddot{\vec{y}} + B\dot{\vec{y}} + C\vec{y} = \vec{0},$$

dove A è la matrice dell'energia cinetica valutata in $\vec{q}_e$, B e C sono le matrici i cui elementi sono

$$B_{jk} = -\left.\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k}\right|_{\vec{q}_e} \quad ; \quad C_{jk} = -\left.\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\right|_{\vec{q}_e}$$

e il vettore $\vec{y}$ è il vettore degli scarti dalle configurazioni di equilibrio, cioè

$$\vec{y} = \vec{q} - \vec{q}_e.$$

In questo caso, dalla (5.5) e dalle (3.3) e (3.4) si ricava

$$A(\vec{q}) = m\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\ell^2 & \frac{\sqrt{2}}{3}\ell\cos\varphi \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\ell\cos\varphi & 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad j,k=1,2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_x}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c\ell^2}{2}\left(\cos 2\varphi - \lambda\cos\varphi\right) & 0 \\ F\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) & -c \end{bmatrix}$$

N.B. La matrice Jacobiana delle Q_j NON è simmetrica poiché il modello non è conservativo.

Allora, le EL linearizzate intorno a $\vec{q}_e^{(1)}$ sono:

$$m\begin{bmatrix} \frac{\ell^2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3}\ell \\ \frac{\sqrt{2}\ell}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{c\,\ell^2}{2}(1-\lambda) & 0 \\ +\frac{F}{\sqrt{2}} & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi, tenendo conto che

$$y_1 = \varphi - \varphi_e = \varphi \quad ; \quad y_2 = x - x_e = x - \frac{F}{c\sqrt{2}}$$

si ottiene

$$\begin{cases} m\frac{\ell^2}{3}\ddot{\varphi} + m\frac{\sqrt{2}}{3}\ell\,\ddot{x} - \frac{c}{2}\ell^2(1-\lambda)\,\varphi = 0 \\ m\frac{\sqrt{2}}{3}\ell\,\ddot{\varphi} + m\,\ddot{x} - \frac{F}{\sqrt{2}}\varphi + c\left(x - \frac{F}{c\sqrt{2}}\right) = 0 \end{cases}$$

Invece, le EL linearizzate intorno a $\vec{q}_e^{(2)}$ sono:

$$m\begin{bmatrix} \frac{\ell^2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3}\ell \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\ell & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{c\ell^2}{2}(1+\lambda) & 0 \\ -\frac{F}{\sqrt{2}} & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0,$$

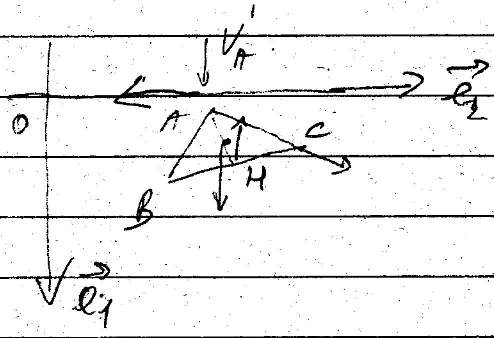
e quindi, tenendo conto che

$$y_1 = \varphi - \pi, \quad y_2 = x + \frac{F}{c\sqrt{2}}$$

si ottiene

$$\begin{cases} m\frac{\ell^2}{3}\ddot{\varphi} - m\frac{\sqrt{2}}{3}\ell\,\ddot{x} - \frac{c\,\ell^2}{2}(1+\lambda)\cdot(\varphi - \pi) = 0 \\ -m\frac{\sqrt{2}}{3}\ell\,\ddot{\varphi} - m\ddot{x} + \frac{F}{\sqrt{2}}(\varphi - \pi) + c\left(x + \frac{F}{c\sqrt{2}}\right) = 0 \end{cases}$$

6) Reazioni vincolari in dinamica



La I ECD proiettata lungo $\vec{e}_1$ dà

$$(9.1)\quad V_A' + mg - c\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\varphi + F\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = m\vec{a}_G \cdot \vec{e}_1$$

Dalla (5.3) ricaviamo

$$(9.2)\quad \vec{a}_G = \frac{\sqrt{2}}{3}l\left(-\sin\varphi\,\ddot{\varphi} - \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_1 + \left(\ddot{x} + \frac{\sqrt{2}}{3}l\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\right)\vec{e}_2 .$$

Pertanto, la (9.1) diventa

$$V_A' = -mg + c\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\varphi - F\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + m\,l\frac{\sqrt{2}}{3}\left(-\sin\varphi\,\ddot{\varphi} - \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)$$