Compito di Meccanica Razionale

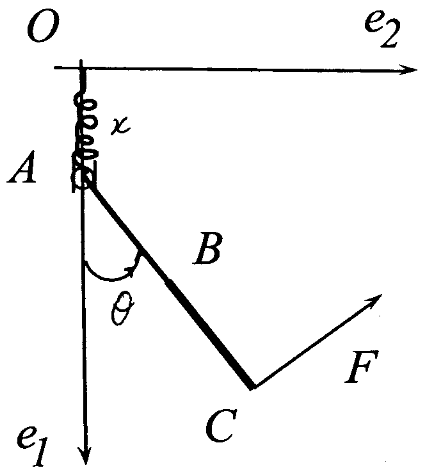
Trieste, 14 luglio 2011

(G. Tondo)

È dato l'asta rigida di figura formato da due pezzi di materiali diversi saldati tra loro, entrambi omogenei e di lunghezza L. Il tratto AB ha massa m, il tratto BC ha massa $2m$.

1) Determinare il baricentro G dell'asta e il suo momento d'inerzia rispetto a un asse passante per A e ortogonale all'asta.

STATICA.



Si vincoli l'asta nel piano <u>**verticale**</u> con una cerniera liscia nel punto A, scorrevole senza attrito lungo una guida verticale. Le forze attive sono: il peso proprio dell'asta, la forza di richiamo della molla, di costante elastica c, collegata in A e al punto fisso O, il carico $\mathbf{F}$ applicato in C e sempre diretto ortogonalmente all'asta.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari esterne all'equilibrio nel punto A.

DINAMICA.
Si chiede di:

4) scrivere le equazioni differenziali pure di moto dell'asta;

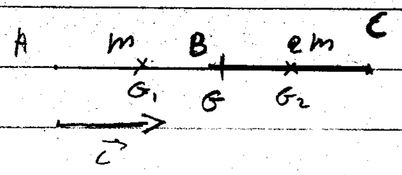
5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e giustificare la risposta;

6) calcolare le reazioni vincolari in A durante il moto, in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo (solo 6 CFU);

6a) linearizzare le equazioni di Lagrange intorno alle configurazioni di equilibrio (solo 9 CFU).

Tema del 14/07/2011

1) Baricentro dell'asta e momento d'inerzia rispetto a un asse per A e ortogonale all'asta



Considero la coppia $(A, \vec{i})$ e calcolo il baricentro utilizzando la proprietà distributiva:

$$\vec{x}_G - \vec{x}_A = \frac{\cancel{m}(\vec{x}_{G_1}-\vec{x}_A) + 2\cancel{m}(\vec{x}_{G_2}-\vec{x}_A)}{3\cancel{m}} = \frac{\frac{L}{2}\vec{i} + \cancel{2}\frac{3}{\cancel{2}}L\vec{i}}{3}$$

(1.1) $$= \frac{7}{6}L\vec{i}$$

Momenti d'inerzia

$$I_A = I_A^{(AB)} + I_A^{(BC)} \qquad I_A^{(AB)} = \frac{1}{3}mL^2$$

$$I_A^{(BC)} = I_{G_2}^{(BC)} + 2m\overline{AG_2}^2 = \frac{1}{12}(2m)L^2 + 2m\left(\frac{3}{2}L\right)^2 = \frac{14}{3}mL^2$$

Quindi

(1.2) $$I_A = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{14}{3}mL^2 = 5mL^2$$

Calcoliamo I_G che ci servirà in Dinamica:

(1.3) $$I_G = I_A - 3m\overline{AG}^2 = 5mL^2 - 3m\left(\frac{7}{6}L\right)^2 = mL^2\left(5 - \frac{\cancel{3}\cdot 49}{\cancel{36}\,12}\right) = \frac{11}{12}mL^2$$

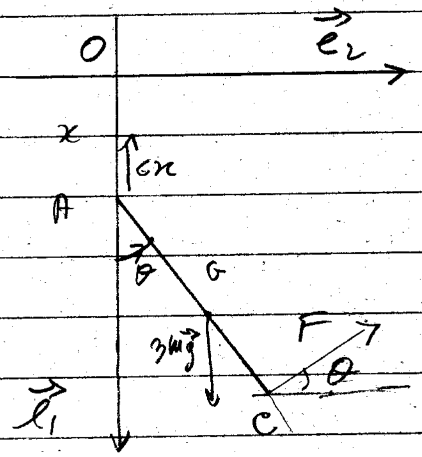
Statica $\quad C_V = S^1 \times \mathbb{R} =$ cilindro

Il modello è soggetto a un vincolo semplice nel piano, quindi ha 2 g.l.. Scelte come coordinate libere $\{(\theta, x)\}$ di figura, determiniamo gli (eventuali) equilibri utilizzando il PLV. A tale scopo, calcoliamo

$$LV^{(est)} = \vec{R}^{(est,att)} \cdot \delta\vec{x}_A + \vec{M}_A^{(est,att)} \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$= \left(\vec{F}_A + 3m\vec{g} + \vec{F}_c\right) \cdot \delta\vec{x}_A +$$

$$+ \left[(G-A) \times 3m\vec{g} + (C-A) \times \vec{F}_c\right] \cdot \vec{\varepsilon}$$



(2.1) $\vec{x}_A = x\,\vec{e}_1 \quad \rightarrow \quad \delta\vec{x}_A = \delta x\,\vec{e}_1$

(2.2) $\vec{F}_A = -cx\,\vec{e}_1, \quad \vec{F}_c = F\,\vec{e}_3 \times \text{vers}(C-A) = F\left(-\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2\right)$

$\vec{\varepsilon} = \delta\theta\,\vec{e}_3$

(2.3) $G-A = \frac{7}{6}L\left(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right), \quad (C-A) = 2L\left(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right)$

Quindi,

$$LV^{(est)} = \left[-cx\,\vec{e}_1 + 3mg\,\vec{e}_1 + F\left(-\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2\right)\right] \cdot \delta x\,\vec{e}_1 +$$

(2.4)
$$+ \left[\frac{7}{6}L\left(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\right) \times 3mg\,\vec{e}_1 + 2LF\right] \cdot \delta\theta\,\vec{e}_3$$

$$= \left(-cx + 3mg - F\sin\theta\right)\delta x + \left(-\frac{7}{2}mgL\sin\theta + 2FL\right)\delta\theta$$

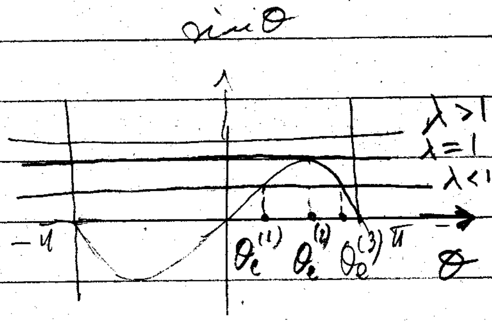
Pertanto, il campo delle forze generalizzate è dato da

(2.5)
$$Q_\theta = \left(2FL - \frac{7}{2}mgL\sin\theta\right) = \vec{M}_A^{(est)} \cdot \vec{e}_3$$
$$Q_x = \left(-cx + 3mg - F\sin\theta\right) = \vec{R}^{(est)} \cdot \vec{e}_1$$

e le eq. pure di equilibrio sono

$$(3.1)\quad \begin{cases} 3\,mg - c\,x - F\sin\theta = 0 \\ 2F\cancel{L} - \frac{7}{2}\,mg\,\cancel{L}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda della (3.1)



$$(3.2)\quad \sin\theta = \frac{4F}{7mg} = \lambda$$

se $\lambda > 1$ $\nexists$ soluz.

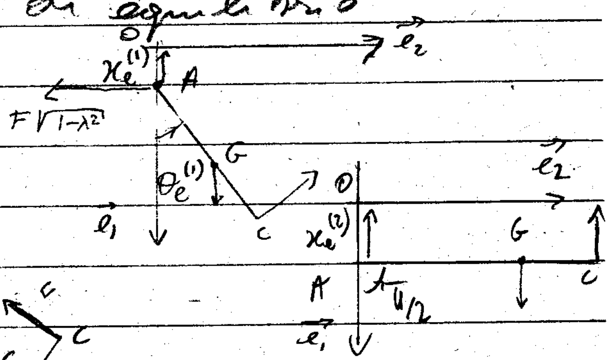
se $\lambda = 1$ $\quad \theta_e^{(2)} = \frac{\pi}{2}$

se $\lambda < 1$ $\quad \theta_e^{(1)} = \arcsin\lambda \quad , \quad \theta_e^{(2)} = \pi - \arcsin\lambda$

Dalla I eq. della (3.1) si ottiene

$$x_e = \frac{3mg}{c} - \frac{F}{c}\sin\theta_e$$

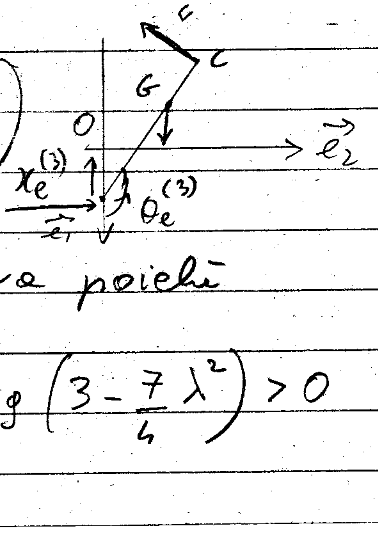
e quindi le configurazioni di equilibrio



$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\arcsin\lambda ,\ \frac{3mg}{c} - \frac{F\lambda}{c}\right)$$

$$\vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{\pi}{2} ,\ \frac{3mg - F}{c}\right)$$

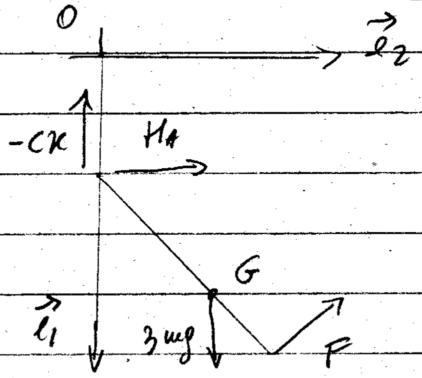
$$\vec{q}_e^{\,(3)} = \left(\pi - \arcsin\lambda ,\ \frac{3mg}{c} - \frac{F\lambda}{c}\right)$$



N.B. L'ascissa x_e è sempre positiva poiché

$$3mg - F\lambda = mg\left(3 - \frac{F}{mg}\lambda\right) \overset{(3.2)}{=} mg\left(3 - \frac{7}{4}\lambda^2\right) > 0 \Leftarrow \lambda \le 1$$

Reazioni vincolari in A nel rigido



Dalla I ECS proiettata lungo $\vec{e}_2$ si ottiene

$\vec{e}_2$: $H_A + F\cos\theta = 0$

Quindi

$$H_A = -F\cos\theta_e = \begin{cases} \theta_e^{(1)} & -F\sqrt{1-\lambda^2} < 0 \\ \theta_e^{(2)} & 0 \\ \theta_e^{(3)} & F\sqrt{1-\lambda^2} > 0 \end{cases}$$

Scriviamo le 2 EL associate alle coordinate (θ, x).
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica

(5.1) $$K = \frac{1}{2}(3m) v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 \qquad I_G \overset{(1.3)}{=} \frac{11}{12} m L^2$$

(5.2) $$\vec{x}_G = (G-A) + (A-O) \overset{(2.3)}{=} \frac{7}{6} L (\cos\theta \, \vec{e}_1 + \sin\theta \, \vec{e}_2) + x \, \vec{e}_1$$

$$= \left(\frac{7}{6} L \cos\theta + x\right) \vec{e}_1 + \frac{7}{6} L \sin\theta \, \vec{e}_2$$

(5.3) $$\vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G = \left(-\frac{7}{6} \cdot L \sin\theta \, \dot{\theta} + \dot{x}\right) \vec{e}_1 + \frac{7}{6} L \cos\theta \, \dot{\theta} \, \vec{e}_2$$

$$v_G^2 = \left(-\frac{7}{6} L \sin\theta \dot{\theta} + \dot{x}\right)^2 + \left(\frac{7}{6} L \cos\theta \, \dot{\theta}\right)^2$$

(5.4) $$= \frac{49}{36} L^2 \sin^2\theta \, \dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 - \frac{7}{3} L \sin\theta \, \dot{\theta} \dot{x} + \frac{49}{36} L^2 \cos^2\theta \, \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{49}{36} L^2 \dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 - \frac{7}{3} L \sin\theta \, \dot{\theta} \dot{x}$$

Quindi

$$K = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{3} m \left(\frac{49}{\underset{12}{\cancel{36}}} L^2 \dot{\theta}^2 + 3\dot{x}^2 - \frac{7}{\cancel{3}} L \sin\theta \, \dot{\theta} \dot{x}\right) + \frac{1}{2} \frac{11}{12} m L^2 \dot{\theta}^2$$

(5.5) $$= \frac{1}{2} m \left(5 L^2 \dot{\theta}^2 + 3\dot{x}^2 - 7 L \sin\theta \, \dot{\theta} \dot{x}\right)$$

4. Determiniamo le EL

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = 5mL^2\dot\theta - \frac{7}{2} mL\sin\theta\,\dot x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = 5mL^2\ddot\theta - \frac{7}{2} mL\left(\sin\theta\,\ddot x + \cos\theta\,\dot\theta\,\dot x\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = -\frac{7}{2} mL\cos\theta\,\dot\theta\,\dot x$$

Pertanto, la EL associata a θ è

$$(6.1)\qquad 5mL^2\ddot\theta - \frac{7}{2} mL\sin\theta\,\ddot x \overset{(2.5)}{=} 2FL - \frac{7}{2} mgL\sin\theta$$

Proseguendo

$$\frac{\partial K}{\partial \dot x} = 3m\dot x - \frac{7}{2} mL\sin\theta\,\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot x}\right) = 3m\ddot x - \frac{7}{2} mL\left(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0$$

Quindi, la EL associata a x è

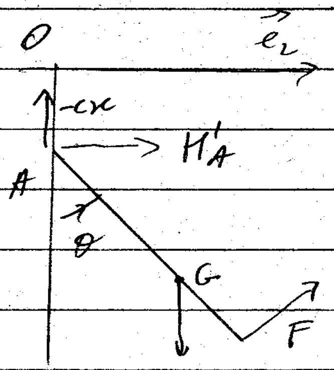
$$(6.2)\qquad 3m\ddot x - \frac{7}{2} mL\left(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2\right) \overset{(2.5)}{=} 3mg - cx - F\sin\theta$$

5. Controlliamo se il modello è conservativo, cioè se la sollecitazione attiva (2.5) ammette energia potenziale

$$\frac{\partial Q_x}{\partial \theta} = -F\cos\theta \neq \frac{\partial Q_\theta}{\partial x} = 0$$

Pertanto, il modello NON è conservativo, quindi l'energia meccanica non è un integrale primo di moto

6. Reazioni in dinamica in A



Dalla I ECD proiettata lungo $\vec{e}_2$ si ottiene

$$H'_A + F\cos\theta = 3m\,\ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_2$$

$$\ddot{\vec{x}}_G = \dot{\vec{V}}_G \overset{(5.3)}{=} \left[\ddot{x} - \frac{7}{6}L\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\right]\vec{e}_1 +$$

$$+ \frac{7}{6}L\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_2$$

Quindi

$$H'_A = -F\cos\theta + \cancel{3}m\,\frac{7}{\cancel{6}_2}L\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)$$

6a. Eq. di Lagrange linearizzate

Poichè il modello non è conservativo devo usare la formula generale

(8.1) $$A \ddot{\vec{\xi}} + B \dot{\vec{\xi}} + C \vec{\xi} = \vec{0}$$

dove
$$\vec{\xi} = \vec{q} - \vec{q}_e = \begin{bmatrix} \theta - \theta_e \\ x - x_e \end{bmatrix}$$

$$A_{jk} = \left.\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\right|_{\vec{q}_e}, \quad B_{jk} = -\left.\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k}\right|_{q_e} = 0, \quad C_{jk} = -\left.\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\right|_{\vec{q}_e}.$$

Quindi
$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta}^2} & \frac{\partial K}{\partial \theta \partial x} \\ \frac{\partial K}{\partial x \partial \theta} & \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}\right|_{\vec{q}_e} = m \begin{bmatrix} 5L^2 & -\frac{7}{2} L \sin\theta_e \\ -\frac{7}{2} L \sin\theta_e & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = -\left.\begin{bmatrix} -\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial \theta} & \frac{\partial Q_x}{\partial x} \end{bmatrix}\right|_{\vec{q}_e} = -\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} mgL \cos\theta_e & 0 \\ -F \cos\theta_e & -c \end{bmatrix}$$

$$m \begin{bmatrix} 5L^2 & -\frac{7}{2} L \sin\theta_e \\ -\frac{7}{2} L \sin\theta_e & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{2} mgL \cos\theta_e & 0 \\ F \cos\theta_e & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta - \theta_e \\ x - x_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto, le eq. linearizzate nell'intorno delle 3 configurazioni di equilibrio sono, rispettivamente

$$\vec{q}_e^{\,(1)} \quad \begin{cases} 5\, m L^2 \ddot{\theta} - \frac{7}{2} m L \lambda\, \ddot{x} + \frac{7}{2} m g L \sqrt{1-\lambda^2}\left(\theta - \theta_e^{(1)}\right) = 0 \\ -\frac{7}{2} m L \lambda \ddot{\theta} + 3 m \ddot{x} + F\sqrt{1-\lambda^2}\left(\theta - \theta_e^{(1)}\right) + c\left(x - x_e^{(1)}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{q}_e^{\,(2)} \quad \begin{cases} 5\, m L^2 \ddot{\theta} - \frac{7}{2} m L \lambda\, \ddot{x} = 0 \\ -\frac{7}{2} m L \lambda \ddot{\theta} + 3 m \ddot{x} + c\left(x - x_e^{(1)}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{q}_e^{\,(3)} \quad \begin{cases} 5\, m L^2 \ddot{\theta} - \frac{7}{2} m L \lambda \ddot{x} - \frac{7}{2} m g L \sqrt{1-\lambda^2}\left(\theta - \theta_e^{(3)}\right) = 0 \\ -\frac{7}{2} m L \lambda \ddot{\theta} + 3 m \ddot{x} - F\sqrt{1-\lambda^2}\left(\theta - \theta_e^{(3)}\right) + c\left(x - x_e^{(3)}\right) = 0 \end{cases}$$