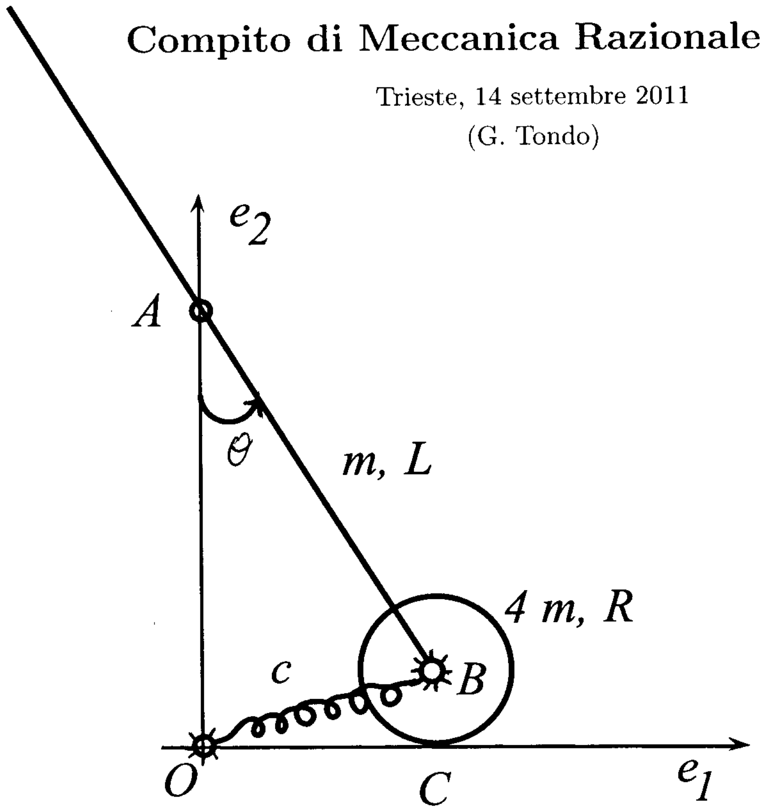
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 14 settembre 2011

(G. Tondo)



Si consideri il modello articolato di figura costituito da un asta omogenea AB, di lunghezza L e massa m, passante per un anellino liscio fissato nel punto A, posto a distanza h dal punto O. Un estremo dell'asta è incernierato nel centro B di un disco omogeneo di massa $4\,m$ e raggio R. Il disco è vincolato a scorrere senza *strisciare* su una guida orizzontale *scabra*. Il modello è soggetto al peso proprio e alla forza elastica della molla fissata all'estremo B *dell'asta* e nel punto fisso O.

STATICA.

Determinare:

1) le configurazioni di equilibrio del modello e discuterne la stabilità, supponendo che la lunghezza dell'asta sia $L \gg h - R$;

2) le reazioni vincolari sul punto dell'asta passante per A all'equilibrio (supponendo nulla la eventuale coppia di reazione) e dimostrare che il vettore risultante è ortogonale all'asta;

3) le reazioni vincolari sul disco nel punto C.

DINAMICA.

4) Scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

5) scrivere l'equazione di Lagrange linearizzata intorno alle configurazioni di equilibrio e calcolare, dove possibile, la frequenza delle piccole oscillazioni;

6) calcolare le reazioni vincolari esterne sull'asta in A e sul disco in C durante il moto, in funzione di θ, a partire dalle condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \omega_0$.

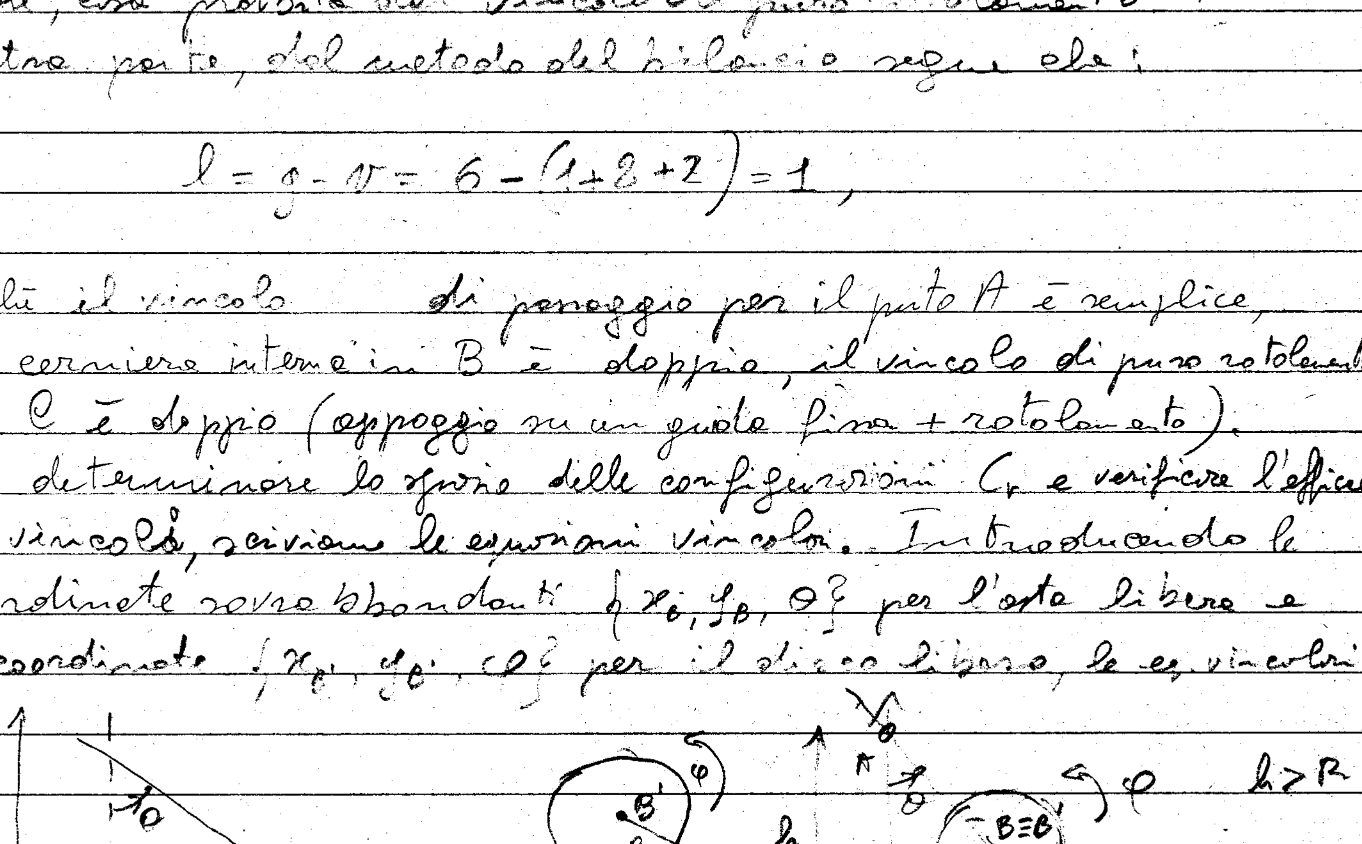
Tema del 14/09/2011

Analisi cinematica

Il modello ha 1 g.l, come si conclude facilmente con il metodo dei congelamenti successivi. Infatti, se congelo l'angolo θ, il modello è congelato poiché il disco non può ruotare intorno al punto B (che è fisso) a meno di slittare, cosa proibita dal vincolo di puro rotolamento. D'altra parte, dal metodo del bilancio segue che:

$$l = g - v = 6 - (1 + 2 + 2) = 1,$$

poiché il vincolo di passaggio per il punto A è semplice, la cerniera interna in B è doppia, il vincolo di puro rotolamento in C è doppio (appoggio su un guida fissa + rotolamento).
Per determinare lo spazio delle configurazioni C_v e verificare l'efficacia dei vincoli, scriviamo le equazioni vincolari. Introducendo le coordinate sovrabbondanti $\{x_B, y_B, \theta\}$ per l'asta libera e le coordinate $\{x_{B'}, y_{B'}, \varphi\}$ per il disco libero, le eq. vincolari



si scrivono

$$\begin{cases} x_B = (h - y_B)\, tg\,\theta \\ x_B = x_{B'} \\ y_B = y_{B'} \\ x'_B = -R\varphi + x_0 \\ y'_B = R \end{cases} \iff \begin{cases} x_B - (h-R)\, tg\,\theta = 0 \\ x_B - x'_B = 0 \\ y_B - y'_B = 0 \\ x'_B + R\varphi - x_0 = 0 \\ y'_B - R = 0 \end{cases}$$

Ai precedenti vincoli, bisogna aggiungere il vincolo unilatero dovuto alla lunghezza L finita dell'asta:

$$(2.1)\qquad |x_0| \le |L\sin\theta| \iff \begin{cases} (h-R)\,tg\,\theta \le L\sin\theta \quad se\ \theta>0 \iff \cos\theta \ge \dfrac{h-R}{L} \\ vel \\ (h-R)\,tg\,\theta \ge L\sin\theta \quad se\ \theta<0 \iff \cos\theta \ge \dfrac{h-R}{L} \end{cases},$$

Dunque, scelta la coordinata libera θ, risulta

$$(2.2)\qquad C_v = \left\{-\arccos\frac{h-R}{L} < \theta < \arccos\frac{h-R}{L}\right\}$$

Non considereremo il comportamento del modello nelle configurazioni di confine

$$(2.3)\qquad \theta_{max,min} = \pm\arccos\frac{h-R}{L} < \pm\frac{\pi}{2}$$

Valutiamo l'efficacia dei vincoli sullo spazio C_v. La matrice Jacobiana risulta

$$(2.4)\qquad J_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{h-R}{\cos^2\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ed ha rango = max = 5 se $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$, cioè in ogni punto di C_v. Le eq. vincolari si possono riscrivere come

$$(2.5)\qquad \begin{cases} x_B = (h-R)\,tg\,\theta \\ x'_B = (h-R)\,tg\,\theta \\ y_B = R \\ y'_B = R \\ -R\varphi + x_0 = (h-R)\,tg\,\theta \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ottiene il legame tra l'angolo di rotazione del disco φ e la coordinata libera θ:

$$(2.6)\qquad \varphi = \frac{x_0}{R} + \left(1 - \frac{h}{R}\right) tg\,\theta$$

N.B. Come nel Tema d'esame del 27/06/2011, si può dimostrare che lo spostamento virtuale del punto A' dell'asta, che passa (istante per istante) per l'anellino in A, è parallelo all'asta. Pertanto, anche in questo caso, la reazione vincolare in A sarà ortogonale all'asta.

Statica

Il modello è soggetto a forze conservative e a vincoli non dissipativi. Calcoliamo l'energia potenziale

$$(3.1)\quad V(\theta) = \frac{1}{2} c\, \overline{OB}^2 - m\vec{g}\cdot\vec{x}_G - 4m\vec{g}\cdot\vec{x}_B ,$$

dove abbiamo indicato con G il baricentro dell'asta.

$$(3.2)\quad \overline{OB}^2 = |\vec{x}_B|^2 = (x_B^2 + R^2) = (h-R)^2 \operatorname{tg}^2\theta + R^2$$

$$(3.3)\quad \vec{x}_G = \vec{x}_B + (\vec{x}_G - \vec{x}_B) = (x_B\vec{e}_1 + R\vec{e}_2) + \frac{L}{2}\left(-\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2\right) =$$
$$= \left[(h-R)\operatorname{tg}\theta - \frac{L}{2}\sin\theta\right]\vec{e}_1 + \left(R + \frac{L}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_2$$

Pertanto,

$$(3.4)\quad V(\theta) = \frac{1}{2}c\left[(h-R)^2\operatorname{tg}^2\theta + \cancel{R^2}\right] + mg\left(\cancel{R} + \frac{L}{2}\cos\theta\right) + \cancel{4mgR} ,$$

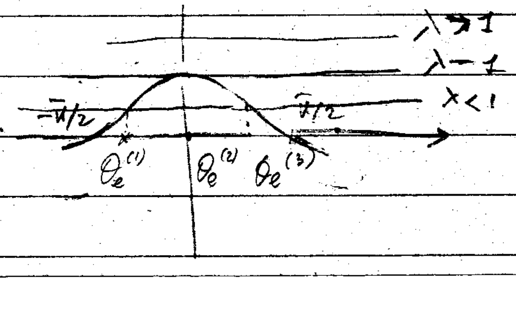
dove abbiamo cancellato i termini costanti.

$$(3.5)\quad V'(\theta) = c(h-R)^2\frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta} - mg\frac{L}{2}\sin\theta$$
$$= \sin\theta\left[\frac{c(h-R)^2}{\cos^3\theta} - \frac{mgL}{2}\right] = -Q_\theta$$

$\sin\theta = 0$ vel $\cos^3\theta = \frac{2c(h-R)^2}{mgL} = \lambda^3 > 0$

$\theta_e^{(2)} = 0 \quad \forall\lambda$

$\theta_e^{(1)} = -\arccos\lambda ,\quad \theta_e^{(3)} = \arccos\lambda \quad$ se $\lambda < 1$



N.B. Affinché le configurazioni di equilibrio appartengano allo spazio delle configurazioni C_r (2.2) deve risultare

$$(4.1) \qquad -\arccos\frac{h-L}{L} < \theta_e < -\arccos\frac{h-R}{L}$$

ovvero

$$(4.2) \qquad \lambda = \cos\theta_e > \frac{h-R}{L}$$

Pertanto, la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza delle configurazioni di equilibrio $\theta_e^{(1)}, \theta_e^{(3)}$ è data da

$$(4.3) \qquad \lambda_0 = \frac{h-R}{L} < \lambda < 1 .$$

Valutiamo la stabilità delle configurazioni di equilibrio.

$$(4.5) \quad V'(\theta) = mg\frac{L}{2}\sin\theta\left(\frac{2c(h-R)^2}{mgL}\frac{1}{\cos^3\theta} - 1\right) = mg\frac{L}{2}\sin\theta\left(\frac{\lambda^3}{\cos^3\theta} - 1\right)$$

$$(4.6) \quad V''(\theta) = mg\frac{L}{2}\left[\cos\theta\left(\frac{\lambda^3}{\cos^3\theta} - 1\right) + \lambda^3\sin\theta\,\frac{3\sin\theta}{\cos^4\theta}\right] =$$

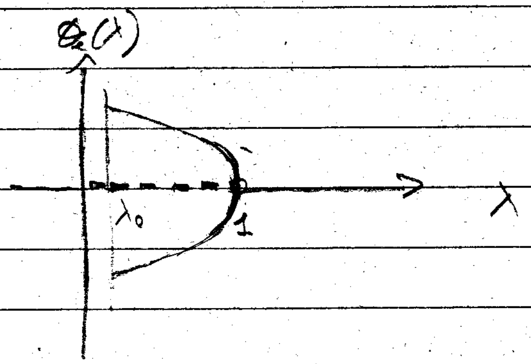
$$= mg\frac{L}{2}\left[\frac{\lambda^3}{\cos^2\theta} - \cos\theta + 3\lambda^3\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}\right]$$

Calcoliamo $V''(\theta)$ nelle configurazioni di equilibrio.

$$(4.7) \quad V''(\theta_e^{(2)}) = mg\frac{L}{2}(\lambda^3 - 1) \begin{cases} \lambda > 1 & > 0 \Rightarrow \text{stabilità} \\ \lambda = 1 & = 0 \Rightarrow \text{c. dubbio} \\ \lambda < 1 & < 0 \Rightarrow \text{instabilità} \end{cases}$$

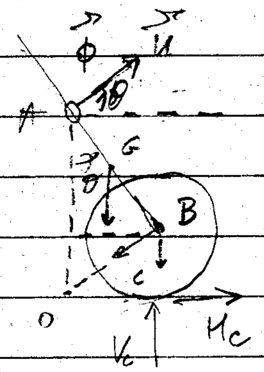
$$(4.8) \quad V''(\theta_e^{(1,3)}) = mg\frac{L}{2}\left[\frac{\cancel{\lambda^3}}{\cancel{\lambda^2}} - \cancel{\lambda} + 3\frac{\lambda^3(1-\lambda^2)}{\lambda^4}\right] = \frac{3mgL}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}(1-\lambda^2) > 0 \quad \text{se } \lambda < 1$$

Ricapitolando la situazione in un diagramma di biforcazione si ottiene



2) Reazioni vincolari in A sull'asta

Dall'analisi cinematica sappiamo che la forza di reazione vincolare in A è diretta ortogonalmente all'asta.
Utilizzando la rappresentazione



$$(5.6)\quad \vec{\phi} = \phi\,\vec{u} = \phi\,(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2)$$

scriviamo un sistema di ECS "ottimale"

$$(5.7)\quad \begin{array}{l} \vec{M}_B^{(asta)}\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{M}_B^{(disco)}\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{R}^{(asta+disco)}\cdot\vec{e}_2 \end{array} \begin{cases} mg\dfrac{L}{2}\sin\theta - \phi\,\overline{AB} = 0 \\ H_c R = 0 \\ \phi\sin\theta - 5mg - cR + V_c = 0 \end{cases}$$

$$\overline{AB} = \frac{h-R}{\cos\theta}$$

nelle incognite (ϕ, H_c, V_c).

Pertanto,

$$(5.8)\quad \begin{cases} \phi = \dfrac{mg\frac{L}{2}\sin\theta_e}{h-R}\cos\theta_e = \dfrac{\cancel{mg}L}{2(h-R)}\,\dfrac{\cancel{2}c(h-R)^2}{\cancel{mgL}}\,\dfrac{\sin\theta_e}{\lambda^2} = \begin{cases} \theta_e^{(2)}: 0 \\ \theta_e^{(1)}: -c(h-R)\dfrac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2} \\ \theta_e^{(3)}: c(h-R)\dfrac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2} \end{cases} \\ H_c = 0 \\ V_c = cR + 5mg - \phi\sin\theta_e = \begin{cases} \theta_e^{(2)}=0: & cR + 5mg \\ \theta_e^{(1)},\theta_e^{(3)}: & cR + 5mg - c(h-R)\dfrac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \end{cases} \end{cases}$$

In conclusione,

$$\forall \lambda \quad \theta_e^{(2)} = 0 \; ; \; \phi = 0, \; H_c = 0, \; V_c = cR + 5mg$$

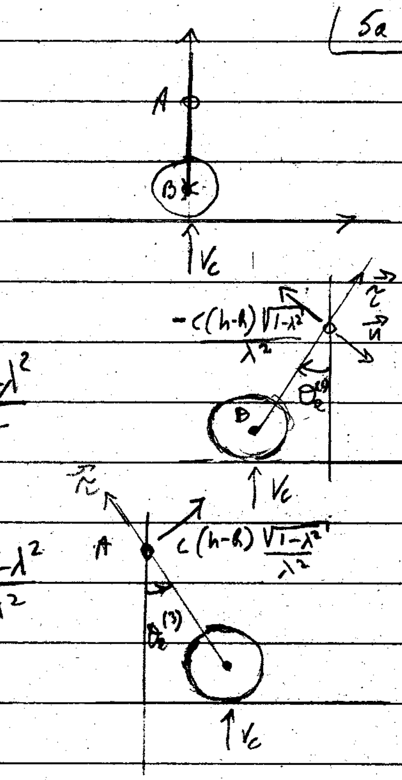
$\lambda_0 < \lambda < 1$ stabili

$$\theta_e^{(1)} = -\arccos\lambda \; ;$$

$$\phi = -c(h-R)\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2}, \; H_c = 0, \; V_c = cR + 5mg - c(h-R)\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}$$

$$\theta_e^{(3)} = \arccos\lambda \; ;$$

$$\phi = c(h-R)\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2}, \; H_c = 0, \; V_c = cR + 5mg - c(h-R)\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}$$



Dinamica

4) Scriviamo la EL relativa alla coordinata libera θ.
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica K del modello

$$K = K^{(asta)} + K^{(disco)}$$

$$K^{(asta)} = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G^{(asta)} \dot{\theta}^2 \qquad I_G^{(asta)} = \frac{1}{12} m L^2$$

(6.1) $$\vec{V}_G = \dot{\vec{x}}_G \overset{(3.3)}{=} \left[\frac{(h-R)}{\cos^2\theta} - \frac{L}{2}\cos\theta\right]\dot{\theta}\,\vec{e}_1 - \frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_2$$

(6.2) $$V_G^2 = \left(\left[\frac{(h-R)}{\cos^2\theta} - \frac{L}{2}\cos\theta\right]^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2$$

$$= \left[\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} + \frac{L^2}{4}\cos^2\theta - \frac{L(h-R)}{\cos\theta} + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta\right]\dot{\theta}^2$$

$$= \left[\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} + \frac{L^2}{4} - \frac{L(h-R)}{\cos\theta}\right]\dot{\theta}^2$$

Quindi,

$$K^{(asta)} = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \left[\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} + \frac{L^2}{4} - \frac{L(h-R)}{\cos\theta}\right] + \frac{1}{12} m L^2 \dot{\theta}^2 =$$

(6.3) $$= \frac{1}{2} m \left(\frac{L^2}{3} + \frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} - \frac{L(h-R)}{\cos\theta}\right)\dot{\theta}^2$$

$$(7.1)\quad K^{(disco)} = \frac{1}{2}\,4m\,V_B^2 + \frac{1}{2}\,I_B^{(disco)}\,\dot{\varphi}^2 \qquad I_B^{(disco)} = \frac{1}{2}(4m)R^2 = 2mR^2$$

$$(7.2)\quad \vec{v}_B = \dot{\vec{x}}_B = \frac{h-R}{\cos^2\theta}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_1$$

$$(7.3)\quad V_B^2 = \frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta}\,\dot{\theta}^2$$

$$(7.4)\quad \dot{\varphi} \overset{(7.6)}{=} \left(1-\frac{h}{R}\right)\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}$$

$$(7.5)\quad K^{(disco)} = 2m\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta}\dot{\theta}^2 + m\cancel{R^2}\left(\frac{R-h}{\cancel{R}}\right)^2\frac{\dot{\theta}^2}{\cos^4\theta} = \frac{3m}{\cos^4\theta}(h-R)^2\dot{\theta}^2$$

Pertanto, l'energia cinetica del modello è

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{3} + \frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} - L\frac{h-R}{\cos\theta}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{3m}{\cos^4\theta}(h-R)^2\dot{\theta}^2$$

(7.6')

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{3} + 7\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} - L\frac{h-R}{\cos\theta}\right)\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot{\theta}} = m\left(\frac{L^2}{3} + 7\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} - L\frac{h-R}{\cos\theta}\right)\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{\theta}}\right) = m\left(\frac{L^2}{3} + 7\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} - L\frac{h-R}{\cos\theta}\right)\ddot{\theta} + m\left(\frac{7(h-R)^2}{\cos^5\theta}4\sin\theta\,\dot{\theta} - L\frac{h-R}{\cos^2\theta}\sin\theta\,\dot{\theta}\right)\dot{\theta}$$

$$= m\left(\frac{L^2}{3} + 7\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} - L\frac{h-R}{\cos\theta}\right)\ddot{\theta} + m\left(\frac{28(h-R)^2}{\cos^5\theta} - L\frac{h-R}{\cos^2\theta}\right)\sin\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial\theta} = \frac{1}{2}m\left(28\frac{(h-R)^2}{\cos^5\theta}\sin\theta - L\frac{h-R}{\cos^2\theta}\sin\theta\right)\dot{\theta}^2$$

Dunque, l'eq. di Lagrange relativa a θ è:

$$(8.1)\quad m\left(\frac{L^2}{3}+7\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta}-L\frac{h-h}{\cos\theta}\right)\ddot{\theta}+\frac{1}{2}m\left(\frac{28(h-R)^2}{\cos^5\theta}-L\frac{h-R}{\cos^2\theta}\right)\sin\theta\,\dot{\theta}^2 \overset{(3.5)}{=}$$
$$=\sin\theta\left(mg\frac{L}{2}-c\frac{(h-R)^2}{\cos^3\theta}\right)$$

5) Linearizzazione

Il modello è conservativo ed ha 1 g.l. Allora, posto

$$\eta(t) := \theta(t)-\theta_e,$$

l'eq. di moto linearizzata intorno alle config. di equilibrio risulta

$$a(\theta_e)\,\ddot{\eta}+V''(\theta_e)\,\eta=0$$

dove

$$a(\theta_e)=\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{\theta}}\Big|_{\theta_e}\overset{(7.6)}{=}m\left(\frac{L^2}{3}+\frac{7(h-R)^2}{\cos^4\theta}-L\frac{h-R}{\cos\theta}\right)\Big|_{\theta=\theta_e}$$

$$V''(\theta_e)\overset{(6.1)}{=}mg\frac{L}{2}\left[\frac{\lambda^3}{\cos^2\theta}-\cos\theta+3\lambda^3\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}\right]\Big|_{\theta=\theta_e}$$

Allora, intorno alle configurazioni di eq. stabile $\theta_e^{(1)}$ e $\theta_e^{(3)}$, l'eq. linearizzata è

$$m\left(\frac{L^2}{3}+7\frac{(h-R)^2}{\lambda^4}-L\frac{h-R}{\lambda}\right)\ddot{\eta}+3mg\frac{L}{2}\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\,\eta=0,$$

e produce moti oscillatori di frequenza

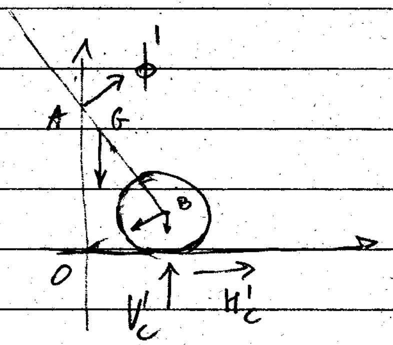
$$\nu=\sqrt{\frac{V''(\theta_e)}{a(\theta_e)}}=\sqrt{\frac{3mgL\,\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}}{L^2/3+7(h-R)^2/\lambda^4-L(h-R)/\lambda}}$$

Invece, l'eq. di moto linearizzata intorno alla configuraz. di eq. $\theta_e^{(2)} = 0$, è

(9.1) $$m\left[\frac{L^2}{3} + 7(h-R)^2 - L(h-R)\right]\ddot{\eta} + \frac{mgL}{2}(\lambda^3-1)\eta = 0,$$

le cui soluzioni sono:
oscillatorie, se $\lambda > 1$, $\nu = \sqrt{\frac{mgL}{2}(\lambda^3-1)\Big/\left(\frac{L^2}{3}+7(h-R)^2-L(h-R)\right)}$
uniformi, se $\lambda = 1$
iperboliche, se $\lambda < 1$.

6) Reazioni dinamiche in A e in C



Alle ECS (5.7) sostituiamo le corrispondenti ECD

(9.2) $$\begin{cases} \vec{M}_B^{(asta)} \cdot \vec{e}_3 = \frac{d}{dt}\vec{L}_B^{(asta)} \cdot \vec{e}_3 + (\vec{V}_B \times m\vec{V}_G) \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{M}_B^{(disco)} \cdot \vec{e}_3 = \frac{d}{dt}\vec{L}_B^{(disco)} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{R}^{(asta+disco)} \cdot \vec{e}_2 = m\ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_2 + \cancel{4m\ddot{\vec{x}}_B \cdot \vec{e}_2} \end{cases}$$

dove

$$\vec{L}_B^{(asta)} = \vec{L}_G^{(asta)} + (\vec{x}_G - \vec{x}_B) \times m\vec{V}_G$$

$$\overset{(6.1)}{=} \mathbb{I}_G(\vec{\omega}^{(asta)}) + \frac{L}{2}(-\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2) \times m\dot{\theta}\left[\left(\frac{h-R}{\cos^2\theta} - \frac{L}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_1 - \frac{L}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2\right]$$

(9.3) $$= \frac{1}{12}mL^2\dot{\theta}\,\vec{e}_3 + \frac{mL}{2}\dot{\theta}\left(\frac{L}{2}\sin^2\theta - \cos\theta\left(\frac{h-R}{\cos^2\theta} - \frac{L}{2}\cos\theta\right)\right)\vec{e}_3$$

$$= \frac{1}{12}mL^2\dot{\theta}\,\vec{e}_3 + \frac{mL}{2}\dot{\theta}\left(\frac{L}{2} - \frac{h-R}{\cos\theta}\right)\vec{e}_3$$

$$= \left(\frac{1}{3}mL^2 - \frac{1}{2}mL\frac{h-R}{\cos\theta}\right)\dot{\theta}\,\vec{e}_3$$

$$\vec{V}_B \times m\vec{V}_G \cdot \vec{e}_3 = \frac{h-R}{\cos^2\theta}\dot{\theta}\,\vec{e}_1 \times m\dot{\theta}\left[\left(\frac{h-R}{\cos^2\theta} - \frac{L}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_1 - \frac{L}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2\right] \cdot \vec{e}_3 =$$

$$= -\frac{L}{2}\frac{h-R}{\cos^2\theta}\sin\theta\,\dot{\theta}^2$$

Allora, la prima dell (9.2) si scrive

$$(10.1)\quad mg\frac{L}{2}\sin\theta - \phi'\frac{h-R}{\cos\theta} = \left(\frac{1}{3}mL^2 - \frac{1}{2}mL\frac{h-R}{\cos\theta}\right)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mL\frac{h-R}{\cos^2\theta}\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}\frac{h-R}{\cos^2\theta}\sin\theta\,\dot{\theta}^2$$

Inoltre,

$$\vec{L}_B^{(disco)} = \mathbb{I}_B^{(disco)}\left(\vec{\omega}^{(disco)}\right) = I_B^{(disco)}\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \overset{(7.4)}{=} 2mR^{\cancel{2}}\left(\frac{R-h}{\cancel{R}}\right)\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}\vec{e}_3,$$

quindi la seconda delle (9.2) si scrive

$$(10.2)\quad H'_c\cancel{R} = 2m\cancel{R}(R-h)\left(\frac{\ddot{\theta}}{\cos^2\theta} + \frac{2\dot{\theta}^2}{\cos^3\theta}\sin\theta\right)$$

Dalle (6.1) ricaviamo

$$\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_2 = \dot{\vec{V}}_G\cdot\vec{e}_2 = -\frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right),$$

pertanto la terza dell (9.2) si scrive

$$(10.3)\quad \phi'\sin\theta - 5mg - cR + V'_c = -m\frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)$$

Il sistema (9.2) diventa, quindi

$$(10.4)\quad \begin{cases} \phi'\dfrac{h-R}{\cos\theta} = mg\dfrac{L}{2}\sin\theta - \left(\dfrac{1}{3}mL^2 - \dfrac{1}{2}mL\dfrac{h-R}{\cos\theta}\right)\ddot{\theta} + mL\dfrac{h-R}{\cos^2\theta}\sin\theta\,\dot{\theta}^2 \\[2ex] H'_c = 2m(R-h)\left(\dfrac{\ddot{\theta}}{\cos^2\theta} + \dfrac{2\dot{\theta}^2}{\cos^3\theta}\sin\theta\right) \\[2ex] V'_c = -\phi'\sin\theta + 5mg + cR - m\dfrac{L}{2}\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right) \end{cases}$$

Per rispondere alla domanda 6), bisogna scrivere in (10.4) le derivate rs. al tempo di θ in funzione di θ

$$(11.1) \qquad \dot{\theta}^2 = f(\theta) \quad , \quad \ddot{\theta} = g(\theta)$$

Per ricavare la funzione $f(\theta)$ osserviamo che il modello è una macchina semplice con vincoli indipendenti dal tempo e forze conservative. Quindi ammette l'energia meccanica come integrale primo di moto. Pertanto,

$$(11.2) \qquad E = K + V = E_{|t=0}$$

e durante i moti vale l'equazione

$$(11.3) \qquad E_{|t=0} = \frac{1}{2} m\left(\frac{L^2}{3} + 7\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} - L\frac{h-R}{\cos\theta}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}c(h-R)^2 tg^2\theta + mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

Per il moto individuato dalle condizioni iniziali

$$\theta(0) = 0 \quad , \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

vale

$$E_{|t=0} = \frac{1}{2} m\left(\frac{L^2}{3} + 7(h-R)^2 - L(h-R)\right)\omega_0^2 + mg\frac{L}{2} = E_0$$

Quindi, dalla (11.3) possiamo ricavare

$$(11.4) \qquad \dot{\theta}^2 = \frac{E_0 - \frac{1}{2}c(h-R)^2 tg^2\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta}{\frac{1}{2} m\left[\frac{L^2}{3} + 7\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} - L\frac{h-R}{\cos\theta}\right]} = f(\theta)$$

Sostituendo la (11.4) nella (8.1) ricaviamo la funzione $g(\theta)$

$$(12.1) \qquad \ddot{\theta} = \frac{-\frac{1}{2}m\left(\frac{28(h-R)^2}{\cos^5\theta} - L\frac{h-R}{\cos^2\theta}\right)\sin\theta\, f(\theta) + \sin\theta\left(mg\frac{L}{2} - c\frac{(h-R)^2}{\cos^3\theta}\right)}{\frac{L^2}{3} + 7\frac{(h-R)^2}{\cos^4\theta} - L\frac{h-R}{\cos\theta}} = g(\theta)$$

Pertanto, sostituendo la (11.4) e la (12.1) nel sistema (10.4) si ottengono immediatamente

$$\phi' = \phi'(\theta) \quad e \quad H'_c = H'_c(\theta).$$

Infine, sostituendo $\phi'(\theta)$ nella terza equazione (10.4) si ottiene anche

$$V'_c(\theta).$$