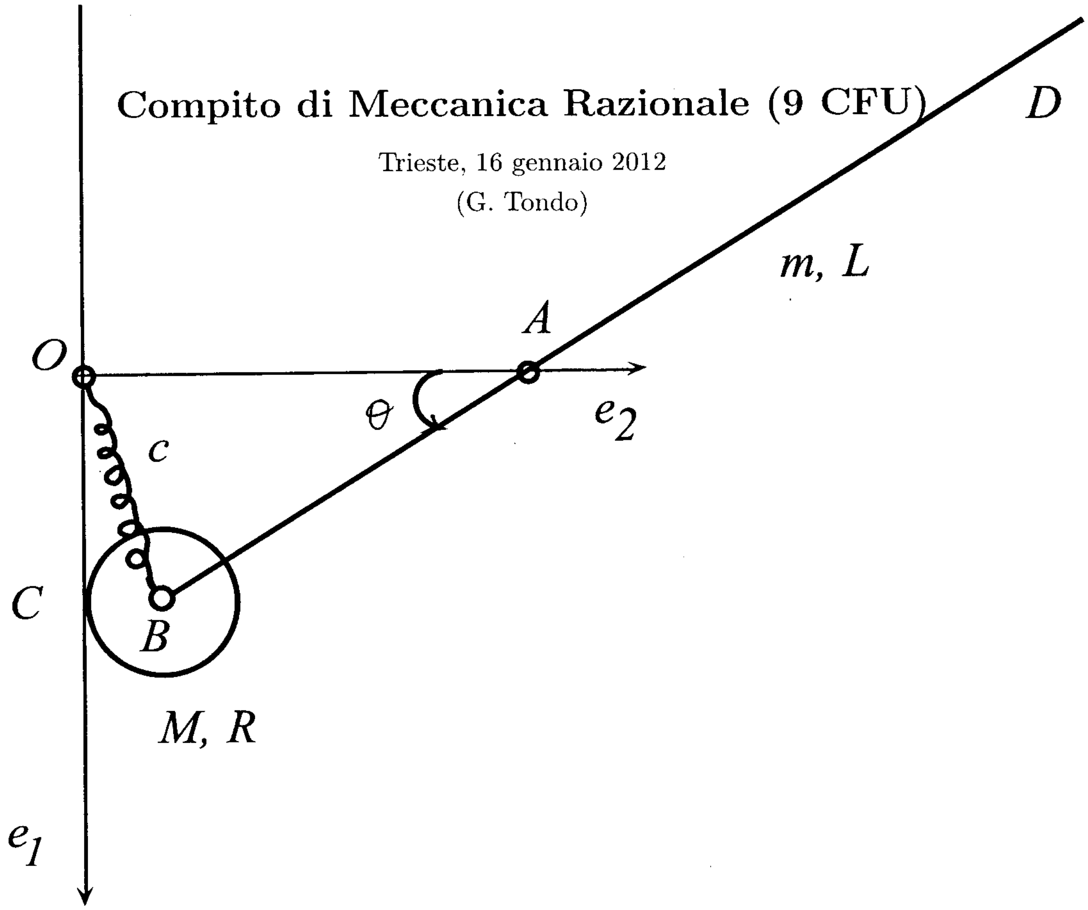
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 16 gennaio 2012

(G. Tondo)



Si consideri il modello articolato di figura costituito da un asta omogenea BD, di lunghezza $L = 16\,R$ e massa m, passante per un anellino liscio fissato nel punto A, posto a distanza $\overline{OA} = 5\,R$ dal punto O. Un estremo dell'asta è incernierato nel centro B di un disco omogeneo di massa $M = 13/4\,m$ e raggio R. Il disco è vincolato a scorrere senza *strisciare* su una guida verticale *scabra*. Il modello è soggetto al peso proprio e alla forza elastica della molla fissata all'estremo B *dell'asta* e nel punto fisso O.

STATICA.

Determinare:

1) il valore della costante elastica c che assicura l'equilibrio nella configurazione $\theta_e = \pi/3$ e la stabilità di tale configurazione;

2) le reazione vincolari sul punto dell'asta passante per A all'equilibrio suddetto (supponendo nulla la eventuale coppia di reazione) e dimostrare che il vettore risultante è ortogonale all'asta;

3) le reazioni vincolari sul disco nel punto C.

DINAMICA.

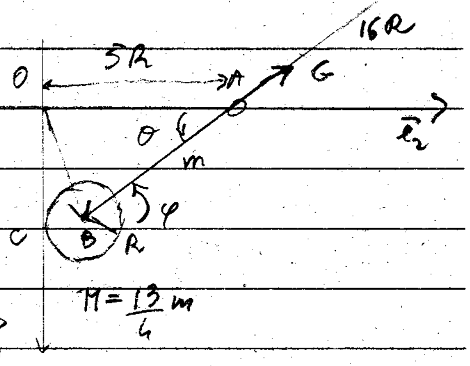
4) Scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

5) scrivere l'equazione di Lagrange linearizzata intorno alla configurazione di equilibrio suddetta e calcolare, se è possibile, la frequenza delle piccole oscillazioni;

6) calcolare le reazioni vincolari esterne sull'asta in A e sul disco in C durante il moto, in funzione di θ, a partire dalle condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

Tema del 16/01/2012

Il modello è analogo a quello del Tema del 14/09/2011. Quindi ha 1 g.l. Detto θ l'angolo di figura, lo spazio delle configurazioni C_r è dato da



(1.1) $$C_r = \left\{\theta : -\arccos\frac{1}{4} < \theta < \arccos\frac{1}{4}\right\}$$

I vettori posizione del punto B e del baricentro dell'asta G sono:

$$\vec{x}_B = 4R\,\mathrm{tg}\,\theta\,\vec{e}_1 + R\,\vec{e}_2$$

(1.2) $$\vec{x}_G = \vec{x}_B + (\vec{x}_G - \vec{x}_B) = (4R\,\mathrm{tg}\,\theta\,\vec{e}_1 + R\,\vec{e}_2) + 8R(-\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2)$$
$$= (4R\,\mathrm{tg}\,\theta - 8R\sin\theta)\,\vec{e}_1 + R(1 + 8\cos\theta)\,\vec{e}_2$$

L'angolo φ del disco è:

(1.3) $$\varphi = \frac{x_B}{R} = 4\,\mathrm{tg}\,\theta$$

Statica. Il problema è inverso.

La sollecitazione agente sul modello, costituita dalla forza peso e dalla forza elastica della molla è conservativa, quindi ammette energia potenziale data da

$$V(\theta) = \frac{1}{2} c\,\overline{OB}^2 - \frac{13}{4} m\vec{g}\cdot\vec{x}_B - m\vec{g}\cdot\vec{x}_G$$
$$= \frac{1}{2} c\left[(4R\,\mathrm{tg}\,\theta)^2 + R^2\right] - \frac{13}{4} mg\,\vec{e}_1\cdot\vec{x}_B - mg\,\vec{e}_1\cdot\vec{x}_G$$

(1.4) $$= \frac{1}{2} c\,16R^2\,\mathrm{tg}^2\theta + \frac{1}{2} cR^2 - mg\left(\frac{13}{4} 4R\,\mathrm{tg}\,\theta + 4R\,\mathrm{tg}\,\theta - 8R\sin\theta\right)$$
$$= 8cR^2\,\mathrm{tg}^2\theta + \cancel{\frac{1}{2} cR^2} - 17Rmg\,\mathrm{tg}\,\theta + 8mgR\sin\theta$$

Cerchiamo i punti stazionari di $V(\theta)$, cioè gli zeri di

(1.5) $$V'(\theta) = 16cR^2\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\cos^2\theta} - \frac{17Rmg}{\cos^2\theta} + 8Rmg\cos\theta = -Q_\theta$$

Quiz. Quale è il significato fisico di θ_0?

Ora imponiamo che $\theta_e = \frac{\pi}{3}$ sia un punto stazionario, cioè uno zero di (1.5)

(2.1) $$16\, c R^2 \sqrt{3}\cdot\cancel{4} - 17 R m g \cdot \cancel{4} + 8 R m g \cdot \frac{1}{2} = 0$$

dato che $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $tg\,\theta = \sqrt{3}$.

La (2.1), risolta rispetto alla costante elastica c, fornisce

(2.2) $$c = \frac{\cancel{16} R m g \sqrt{3}}{\cancel{16}\, R^2} = \frac{mg}{\sqrt{3}R}$$

Per determinare la stabilità del suddetto equilibrio (per $c = \frac{mg}{\sqrt{3}R}$), valutiamo la derivata seconda di V in θ_e.

(2.3) $$V''(\theta) = 16cR^2\left(\frac{1}{\cos^4\theta} + \frac{2\,tg\theta \sin\theta}{\cos^3\theta}\right) - 17Rmg\,\frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta} - 8Rmg\sin\theta$$

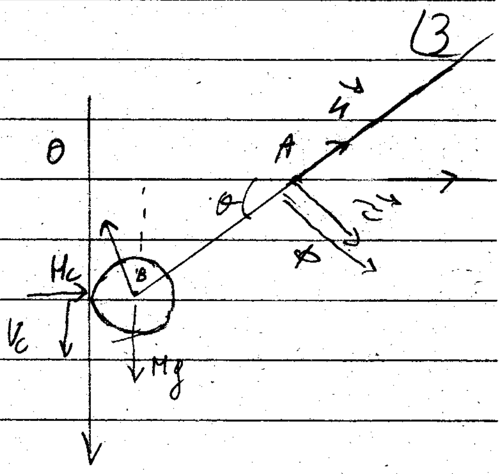
$$V''\left(\frac{\pi}{3}\right)\Big|_{c=\frac{mg}{\sqrt{3}R}} = 16R^2\frac{mg}{\sqrt{3}R}\left(16 + 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8\right) - 17Rmg\,\cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\,8 - \cancel{8}^{4}Rmg\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

(2.4) $$= \frac{16}{\sqrt{3}}mgR\,(16+24) - 136\sqrt{3}\,mgR - 4\sqrt{3}\,mgR$$

$$= mgR\left(\frac{16\cdot 40}{\sqrt{3}} - 140\sqrt{3}\right) = \frac{mgR\cdot 220}{\sqrt{3}} > 0$$

Dunque, $\theta_e = \frac{\pi}{3}$ è un punto di minimo di V, quindi è una configurazione di equilibrio stabile.

2) Reazioni vincolari in A.



Come nel tema d'esame del 27/06/2011, si può dimostrare che lo spostamento virtuale del punto A' dell'asta che passa per l'anellino A, è parallelo all'asta. Pertanto, poiché il vincolo è liscio per ipotesi, la reazione vincolare in A sarà ortogonale all'asta. Quindi, indicando con $\vec{\tau}$ ed $\vec{u}$ i versori rispettivamente ortogonali e paralleli all'asta, possiamo scrivere

(3.1) $\vec{\phi} = \phi\, \vec{\tau}$

Resta da determinare la componente scalare ϕ. A tale scopo, applichiamo alla sola asta la II ECS con polo in B:

(3.2) $\vec{M}_B^{(asta)} \cdot \vec{e}_3 : \; -\overline{AB}\,\phi + (\vec{x}_G - \vec{x}_B) \times m\vec{g} \cdot \vec{e}_3 = 0$

(3.3) $\overline{AB} = \dfrac{4R}{\cos\theta_e} = 4R \cdot 2 = 8R \Rightarrow G \equiv A \Rightarrow (\vec{x}_G - \vec{x}_B) \times m\vec{g} \cdot \vec{e}_3 = -mg\,\overline{AB}\cos\theta$

Dunque, la (3.2) diventa

$$-8R\phi - \frac{8mgR}{2} = 0 \Rightarrow \phi = -\frac{mg}{2} < 0$$

e la reazione vincolare in A è data da

(3.4) $\vec{\phi} = -\dfrac{mg}{2}\vec{\tau}$

3) Reazioni vincolari in C.

Poiché la guida è scabra, in C c'è una reazione vincolare di direzione incognita, quindi

$$\vec{\phi}_C = V_C \vec{e}_1 + H_C \vec{e}_2$$

Per determinarla, scriviamo 2 equazioni nelle 2 incognite (H_C, V_C):

$\vec{M}_B^{(disco)} \cdot \vec{e}_3 \qquad V_C R = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 0$

$\vec{R}^{(asta+disco)} \cdot \vec{e}_2 \qquad H_C - cR + \phi \sin\theta_e = 0 \Rightarrow H_C = cR - \phi \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dunque,

$$H_C = \frac{mg}{\sqrt{3}} + \frac{mg}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = mg\frac{7\sqrt{3}}{12} > 0$$

e

$$\vec{\phi}_C = mg\frac{7\sqrt{3}}{12}\vec{e}_2$$

Dinamica

Calcoliamo l'energia cinetica del modello.

(5.1) $K = K^{(a)} + K^{(d)}$

(5.2) $K^{(a)} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G^{(a)} \dot\theta^2$ $\qquad I_G^{(a)} = \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{12} m (16)^2 R^2$

(5.3) $\vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G \overset{(1.2)}{=} R\left(\frac{4}{\cos^2\theta} - 8\cos\theta\right)\dot\theta\,\vec{e}_1 - 8R\sin\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_2$

(5.4) $v_G^2 = R^2\left(\frac{4}{\cos^2\theta} - 8\cos\theta\right)^2\dot\theta^2 + (8R)^2\sin^2\theta\,\dot\theta^2$

$= \frac{16R^2\dot\theta^2}{\cos^4\theta} + 64R^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2 - \frac{64}{\cos\theta}R^2\dot\theta^2 + 64R^2\sin^2\theta\,\dot\theta^2$

$= R^2\left(\frac{16}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + 64\right)\dot\theta^2$

Quindi,

$K^{(a)} = \frac{1}{2} m R^2\left(\frac{16}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + 64\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{12}_3} m\,\cancel{256}^{64} R^2\dot\theta^2$

$= \frac{1}{2} m R^2\left(\frac{16}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + \frac{256}{3}\right)\dot\theta^2$

$K^{(d)} = \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} I_B^{(d)}\dot\varphi^2$ $\qquad I_B^{(d)} = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2}\frac{13}{4} m R^2$

$\vec{v}_B = \dot{\vec{x}}_B \overset{(1.2)}{=} \frac{4R}{\cos^2\theta}\dot\theta\,\vec{e}_1 \Rightarrow v_B^2 = \frac{16R^2}{\cos^4\theta}\dot\theta^2$

$\dot\varphi \overset{(1.3)}{=} \frac{4}{\cos^2\theta}\dot\theta \Rightarrow \dot\varphi^2 = \frac{16}{\cos^4\theta}\dot\theta^2$

Dunque

$K^{(d)} = \frac{1}{2}\frac{13}{\cancel{4}} m \frac{\cancel{16}^{4} R^2}{\cos^4\theta}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{13}{\cancel{8}} m R^2 \frac{\cancel{16}^{2}}{\cos^4\theta}\dot\theta^2 = \frac{1}{2} m R^2\left(\frac{78}{\cos^4\theta}\right)\dot\theta^2$

Allora, l'energia cinetica del modello è

$$(6.1)\quad K = \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{16}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + \frac{256}{3} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{78}{\cos^4\theta} \right) \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{94}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + \frac{256}{3} \right) \dot{\theta}^2$$

Quindi, l'eq. di Lagrange relativa a θ è

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \left(\frac{94}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + \frac{256}{3} \right) \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) = m R^2 \left(\frac{94}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + \frac{256}{3} \right) \ddot{\theta} + m R^2 \left(\frac{4 \cdot 94 \sin\theta}{\cos^5\theta} - \frac{64 \sin\theta}{\cos^2\theta} \right) \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{4 \cdot 94 \sin\theta}{\cos^4\theta} - \frac{64 \sin\theta}{\cos^2\theta} \right) \dot{\theta}^2$$

$$(6.2)\quad m R^2 \left(\frac{94}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + \frac{256}{3} \right) \ddot{\theta} + m R^2 \left(\frac{188}{\cos^5\theta} - \frac{32}{\cos^2\theta} \right) \sin\theta \, \dot{\theta}^2 = Q_\theta$$

5) Eq. linearizzata intorno a $\theta_e = \frac{\pi}{3}$

Il modello è conservativo e ha 1 g.l. Quindi, l'equazione di Lagrange linearizzata intorno a una configurazione di equilibrio è:

$$a(\theta_e)\ddot{\eta} + V''(\theta_e)\eta = 0$$

dove

$$a(\theta_e) = \left.\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta}^2}\right|_{\theta=\theta_e}, \qquad \eta = \theta - \theta_e$$

In questo caso,

$$a\left(\frac{\pi}{3}\right) = mR^2\left(94\cdot 16 - 64\cdot 2 + \frac{256}{3}\right) = \frac{4384}{3} mR^2$$

$$V''\left(\frac{\pi}{3}\right) \overset{(2.4)}{=} mgR\frac{220}{\sqrt{3}}$$

quindi, l'eq. linearizzata è

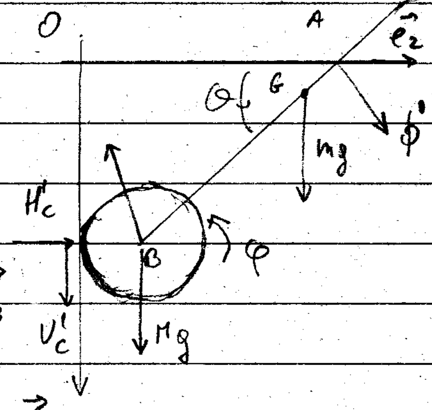
$$\frac{4384}{3}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot{\eta} + \frac{220}{\sqrt{3}}\cancel{m}g\cancel{R}\eta = 0$$

Le soluzioni sono moti oscillatori di frequenza angolare

$$\nu = \sqrt{\frac{220}{\sqrt{3}}\frac{3}{4384}\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{55\sqrt{3}}{1096}\frac{g}{R}}$$

8) Reazioni dinamiche in A e in C 18

Scriviamo le seguenti ECD



$$(8.1)\quad \begin{cases} \vec{M}_B^{(asta)} \cdot \vec{e}_3: & -\dfrac{4R}{\cos\theta}\phi' + (\vec{x}_G-\vec{x}_B)\times mg\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = \left(\dfrac{d}{dt}\vec{L}_B^{(asta)} + \vec{V}_B\times m\vec{V}_G\right)\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{M}_B^{(disco)} \cdot \vec{e}_3: & V'_c R = \dfrac{d}{dt}\vec{L}_B^{(disco)}\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{R}^{(asta+disco)}\cdot\vec{e}_2: & H'_c - cR + \phi'\sin\theta = \cancel{M\ddot{\vec{x}}_B\cdot\vec{e}_2} + m\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_2 \end{cases}$$

Nella I eq.

$$(\vec{x}_G-\vec{x}_B)\times mg\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = 8R(-\sin\theta\,\vec{e}_1+\cos\theta\,\vec{e}_2)\times mg\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = 8R\cos\theta\, mg(-\vec{e}_3)\cdot\vec{e}_3$$

$$\vec{L}_B^{(asta)} = m(\vec{x}_G-\vec{x}_B)\times\vec{V}_B + \underline{\underline{I}}_B(\vec{\omega}^{(asta)})$$

$$\overset{(1.2)}{=} m\,8R(-\sin\theta\,\vec{e}_1+\cos\theta\,\vec{e}_2)\times\frac{4R}{\cos^2\theta}\dot\theta\,\vec{e}_1 + J_{3B}^{(asta)}\dot\theta\,\vec{e}_3$$

$$(8.2)\quad \overset{(1.3)}{=} -8mR\cancel{\cos\theta}\frac{4R}{\cos^{\cancel{2}}\theta}\dot\theta\,\vec{e}_3 + \frac{1}{3}mL^2\dot\theta\,\vec{e}_3$$

$$= -\frac{32mR^2\dot\theta}{\cos\theta}\vec{e}_3 + \frac{1}{3}mR^2 256\,\dot\theta\,\vec{e}_3$$

$$= mR^2\dot\theta\,32\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{\cos\theta}\right)\vec{e}_3$$

$$(8.3)\quad \vec{V}_B\times m\vec{V}_G = \frac{4R}{\cos^2\theta}\dot\theta\,\vec{e}_1\times m\left[R\left(\frac{4}{\cos^2\theta}-8\cos\theta\right)\dot\theta\,\vec{e}_1 - 8R\sin\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_2\right] =$$

$$= -32\frac{mR^2\sin\theta}{\cos^2\theta}\dot\theta^2\,\vec{e}_3$$

$$(8.4)\quad \frac{d\vec{L}_B}{dt} = 32mR^2\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{\cos\theta}\right)\ddot\theta\,\vec{e}_3 + 32mR^2\left(-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\dot\theta^2\,\vec{e}_3$$

Allora, la I eq. risulta

$$(8.5)\quad -\frac{4R}{\cos\theta}\phi' - 8mgR\cos\theta = 32mR^2\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{\cos\theta}\right)\ddot\theta - 64mR^2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\dot\theta^2$$

Per la II ECD, calcoliamo

$$\vec{L}_B^{(disco)} = I_B^{(disco)} \dot{\varphi}\, \vec{e}_3 = \frac{1}{2}\frac{13}{4} m R^2 \left(-\frac{4}{\cos^2\theta}\dot{\theta}\,\vec{e}_3\right)$$

(9.1) $$= -\frac{13}{2} m R^2 \frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}\,\vec{e}_3$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_B^{(disco)} = -\frac{13}{2} m R^2 \left(\frac{\ddot{\theta}}{\cos^2\theta} + 2\frac{\dot{\theta}^2 \sin\theta}{\cos^3\theta}\right)\vec{e}_3$$

Quindi, la II delle (8.1) si scrive

(9.2) $$V_C' \cancel{R} = -13\, m R^{\cancel{2}} \left(\frac{\ddot{\theta}}{2\cos^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_3$$

Per la III delle (8.1), calcoliamo

(9.3) $$\ddot{\vec{x}}_C \cdot \vec{e}_2 \overset{(5.4)}{=} -8R\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)$$

Dunque, la III delle (8.1) si scrive

(9.4) $$H_C' - \frac{mg}{\cancel{R}\sqrt{3}}\cancel{R} + \phi'\sin\theta = -8mR\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)$$

In definitiva, il sistema (8.1) fornisce

(9.5) $$\begin{cases} \dfrac{4R}{\cos\theta}\phi' = -8mgR\cos\theta - 32mR^2\left(\dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{\cos\theta}\right)\ddot{\theta} + 64mR^2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\dot{\theta}^2 \\[2ex] V_C' = -13mR\left(\dfrac{\ddot{\theta}}{2\cos^2\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\dot{\theta}^2\right) \\[2ex] H_C' = \dfrac{mg}{\sqrt{3}} - \phi'\sin\theta - 8mR\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right) \end{cases}$$

Per rispondere alla domanda c) bisogna sostituire (10
in (9.5) alle derivate di θ rispetto al tempo le loro espressioni in funzione di θ. A tale scopo, osserviamo che il modello è una macchina semplice con vincoli indipendenti dal tempo e sollecitazione conservativa. Quindi ammette l'energia meccanica come integrale primo di moto. Pertanto,

$$E = K + V = E_{|t=0} \tag{10.1}$$

e durante il moto con condizioni iniziali

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0.$$

si ha che

$$0 = \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{94}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + \frac{256}{3} \right) \dot{\theta}^2 + 8 \frac{mg}{R\sqrt{3}} R^2 tg^2\theta - 17 mgR\, tg\theta + 8mgR \sin\theta \tag{10.2}$$

Quindi, possiamo ricavare

$$\dot{\theta}^2 = \frac{-8 \frac{mgR}{\sqrt{3}} tg^2\theta + 17 mgR\, tg\theta - 8mgR \sin\theta}{\frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{94}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + \frac{256}{3} \right)} = f(\theta) \tag{10.3}$$

Sostituendo la (10.3) nella EL (6.2), ricaviamo

$$\ddot{\theta} = \frac{-mR^2 \left(\frac{188}{\cos^5\theta} - \frac{32}{\cos^2\theta} \right) \sin\theta\, f(\theta) + Q_\theta}{\frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{94}{\cos^4\theta} - \frac{64}{\cos\theta} + \frac{256}{3} \right)} = g(\theta) \tag{10.4}$$

Pertanto, sostituendo la (10.3) e (10.4) in (9.5) si ottiene $\phi'(\theta)$ e $V_c'(\theta)$ ($\neq 0$!). Poi, sostituendo la $\phi'(\theta)$ in (9.5) si ottiene anche la $H_c'(\theta)$.