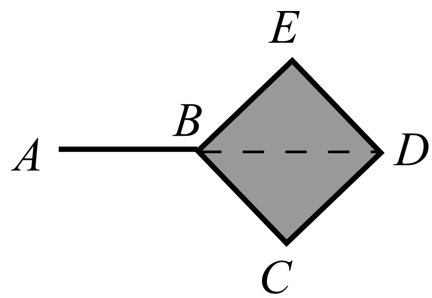
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 20 febbraio 2012

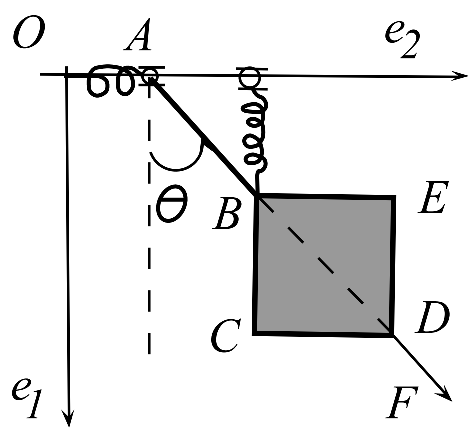
(G. Tondo)



È dato il corpo rigido di figura, formato da un asta omogenea di lunghezza L e massa m, saldata ad una lamina omogenea quadrata di massa $5m$ e lati $L/\sqrt{2}$.

1) Determinare il baricentro G del corpo e il suo momento d'inerzia rispetto a un asse passante per i punti B ed E.

STATICA.



Si vincoli il corpo nel piano **<u>verticale</u>** con una cerniera liscia nel punto A, scorrevole senza attrito lungo una guida orizzontale fissa. Le forze attive sono: il peso proprio del rigido, la forza di richiamo delle due molle (entrambe di costante elastica c), una collegata in A e al punto fisso O, l'altra collegata in B e sempre parallela al versore $\mathbf{e}_1$; il carico $\mathbf{F}$ applicato in D e sempre diretto lungo il segmento AD.

2) Determinare tutte le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema;

3) calcolare le reazioni vincolari esterne all'equilibrio nel punto A.

DINAMICA.

Si chiede di:

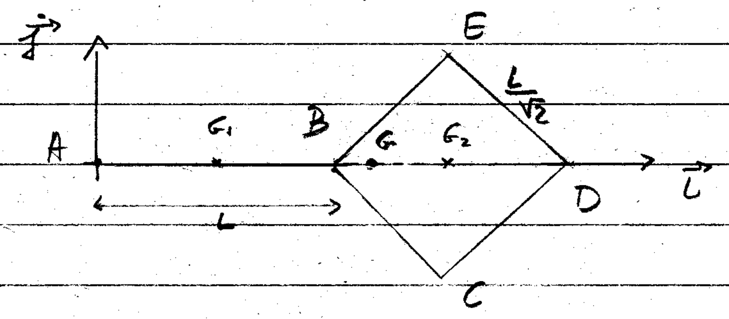
4) scrivere le equazioni differenziali pure di moto del rigido;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e giustificare la risposta;

6) calcolare le reazioni vincolari in A durante il moto, in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate rispetto al tempo (solo 6 CFU);

6a) linearizzare le equazioni di Lagrange intorno alle configurazioni di equilibrio (solo 9 CFU).

Tema del 20/02/2012



Calcolo di G.

$$\vec{x}_G = \frac{m\,\vec{x}_{G_1} + 5\,m\,\vec{x}_{G_2}}{6m} = \left(\frac{L}{2}\vec{i} + 5\cdot\frac{3}{2}L\vec{i}\right)\frac{1}{6} = \frac{4}{3}L\vec{i}$$

Calcolo di I_{BE}.

$$I_{BE} = I_{BE}^{(a)} + I_{BE}^{(e)}$$

$$I_{BE}^{(a)} = \text{vers}(E-B)\cdot \mathbb{I}_B^{(a)}(\text{vers}(E-B)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[1,1]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}mL^2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\,[1,1]\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}mL^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\,mL^2$$

$$I_{BE}^{(e)} = \frac{1}{3}\,5m\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{6}mL^2$$

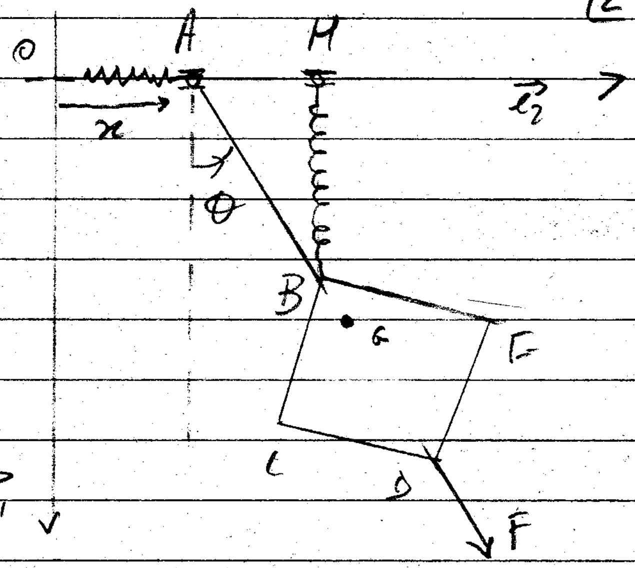
Quindi

$$I_{BE} = mL^2$$

Cinematica

Il modello, costituito da un unico rigido, ha 2 g.l..
Come coordinate libere scegliamo $(x = x_A, \theta)$, con $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Statica



La sollecitazione delle molle e il peso proprio sono ricavabile conservativi. Quindi, scriviamo la loro energia potenziale

$$V(\theta) = \frac{1}{2} c \overline{BH}^2 - 6m \vec{g} \cdot \vec{x}_G + \frac{1}{2} c \overline{OA}^2$$

Invece, per il carico follower $\vec{F}_D$ le forze generalizzate

$$Q_x^{(foll)} = \vec{F}_D \cdot \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial x} \quad , \quad Q_\theta^{(foll)} = F_D \cdot \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial \theta}$$

$$\vec{x}_A = x \vec{e}_2 \quad , \vec{x}_B = \vec{x}_A + (\vec{x}_B - \vec{x}_A) = x \vec{e}_2 + L(\cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2)$$

$$\vec{x}_G = \vec{x}_A + (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = x \vec{e}_2 + \frac{4}{3} L (\cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2)$$

$$\vec{x}_D = \vec{x}_A + (\vec{x}_D - \vec{x}_A) = x \vec{e}_2 + 2L(\cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2)$$

Pertanto,

$$V(\theta) = \frac{1}{2} c (L\cos\theta)^2 - 6mg\vec{e}_1 \cdot \left(\frac{4}{3} L\cos\theta \vec{e}_1 + (x + \frac{4}{3} L\sin\theta)\vec{e}_2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} c x^2 =$$

$$= \frac{1}{2} c x^2 + \frac{1}{2} c L^2 \cos^2\theta - 8mgL\cos\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = cx = -Q_x^{(c)}, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -cL^2 \cos\theta \sin\theta + 8mgL\sin\theta = -Q_\theta^{(c)}$$

$$\vec{F}_D = F(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2)$$

$$\frac{\partial \vec{x}_D}{\partial x} = \vec{e}_2 \,, \quad \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial \theta} = 2L(-\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2)$$

$$Q_x^{(boll)} = \vec{F}_D \cdot \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial x} = F\sin\theta \,, \quad Q_\theta^{(boll)} = \vec{F}_D \cdot \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial \theta} = 2FL(-\sin\theta\cancel{\cos\theta} + \sin\theta\cancel{\cos\theta}) = 0$$

Allora, le componenti lagrangiane della sollecitazione risultano

$$Q_x = Q_x^{(c)} + Q_x^{(boll)} = -cx + F\sin\theta$$

$$Q_\theta = Q_\theta^{(c)} + Q_\theta^{(boll)} = +cL^2\sin\theta\cos\theta - 8mgL\sin\theta$$

Pertanto, le equazioni pure di equilibrio sono:

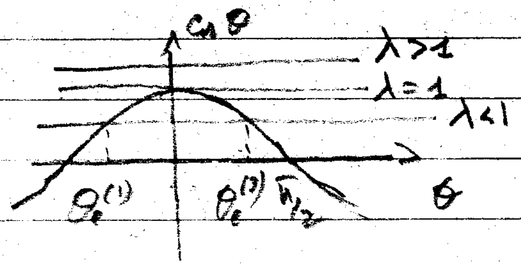
$$\begin{cases} F\sin\theta - cx = 0 \\ L\sin\theta(cL\cos\theta - 8mg) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{F}{c}\sin\theta \\ L\sin\theta(cL\cos\theta - 8mg) = 0 \end{cases}$$

Dalla II otteniamo

$$\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta_e^{(2)} = 0 \,, \quad \theta_e^{(4)} = \pi$$

vel

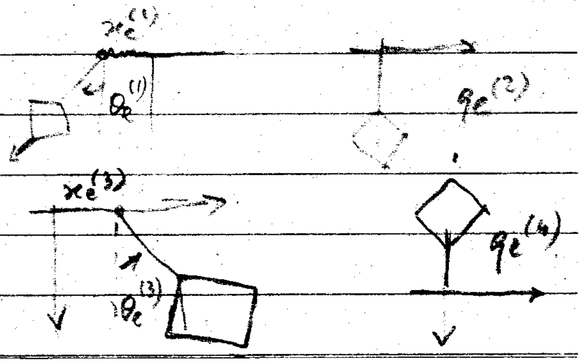
$$\cos\theta = \frac{8mg}{cL} = \lambda \qquad \theta_e^{(1)} = -\arccos\lambda \,, \quad \theta_e^{(3)} = \arccos\lambda$$



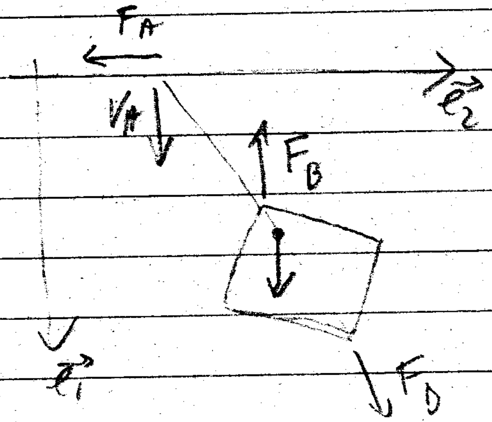
Pertanto, le configurazioni di equilibrio sono

$$q_e^{(1)} = \left(-\frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}, -\arccos\lambda\right), \quad q_e^{(2)} = (0, 0)$$

$$q_e^{(3)} = \left(\frac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}, \arccos\lambda\right), \quad q_e^{(4)} = (0, \pi)$$



3) Reazioni esterne in A



$$\vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_1 = 0$$

$$V_A + 6mg - cL\cos\theta_e + F\cos\theta_e = 0$$

Quindi

$$V_A = -6mg + (cL - F)\lambda$$

<u>Dinamica</u>

4) Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello

$$K = \frac{1}{2}(6m)\, v_G^2 + \frac{1}{2} J_{3G}\, \dot{\theta}^2$$

$$\vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G = \frac{4}{3}L(-\sin\theta\,\dot{\theta})\vec{e}_1 + \left(\frac{4}{3}L\cos\theta\,\dot{\theta} + \dot{x}\right)\vec{e}_2$$

$$v_G^2 = \frac{16}{9}L^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \left(\frac{4}{3}L\cos\theta\,\dot{\theta} + \dot{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{16}{9}L^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{16}{9}L^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{8}{3}L\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta} + \dot{x}^2$$

$$= \frac{16}{9}L^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + \frac{8}{3}L\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}$$

$$J_{3G} = J_{3G}^{(a)} + J_{3G}^{(e)} \qquad \overline{G_1G} = L\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}L, \quad \overline{G_2G} = \left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)L = \frac{L}{6}$$

$$J_{3G}^{(a)} = J_{3G_1}^{(a)} + m\overline{G_1G}^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{5L}{6}\right)^2 = mL^2\left(\frac{1}{12}+\frac{25}{36}\right) = mL^2\frac{\cancel{28}^{7}}{\cancel{36}_{9}} = \frac{7mL^2}{9}$$

$$J_{3G}^{(e)} = J_{3G_2}^{(e)} + 5m\,\overline{G_2G}^2 = \frac{1}{6}(5m)\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 + 5m\frac{L^2}{36} = \frac{5}{9}mL^2$$

$$J_{3G} = \left(\frac{7}{9}+\frac{5}{9}\right)mL^2 = \frac{4}{3}mL^2$$

Portanto,

$$K = \frac{1}{2}\left[6m\left(\frac{16}{9}L^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + \frac{8}{3}L\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta}\right) + \frac{4}{3}mL^2\dot{\theta}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[6\dot{x}^2 + 16L\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + 12L^2\dot{\theta}^2\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = 6m\dot{x} + 8mL\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = 6m\ddot{x} + 8mL\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0$$

$EL(x)$: $\quad 6m\ddot{x} + 8mL\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta}\right) = F\sin\theta - cx$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = 8mL\cos\theta\,\dot{x} + 12mL^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) = 8mL\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{x} + \cos\theta\,\ddot{x}\right) + 12mL^2\ddot{\theta}$$

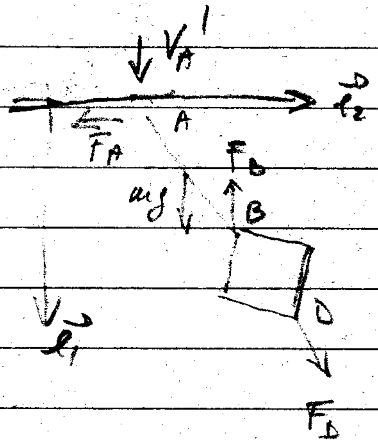
$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = -8mL\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta}$$

$E(\theta)$: $\quad 8mL\cos\theta\,\ddot{x} + 12mL^2\ddot{\theta} = \frac{cL^2}{2}\sin 2\theta - 8mgL\sin\theta$

5) La sollecitazione non è conservativa a causa del carico follower. Infatti,

$$\frac{\partial Q_x^{(foll)}}{\partial \theta} = F\cos\theta \neq \frac{\partial Q_\theta}{\partial x} = 0$$

6) Reazioni vincolari in A durante il moto



Dalla I ECD

$$\vec{R}^{at} \cdot \vec{e}_1 = 6m\, \vec{a}_G \cdot \vec{e}_1$$

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = \frac{4}{3}L\left(-\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_1 + \left[\frac{4}{3}L\left(\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta}\right) + \ddot{x}\right]\vec{e}_2$$

$$V_A' + 6mg - cL\cos\theta + F\cos\theta = -6m\frac{4}{3}L\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)$$

Quindi

$$V_A' = cL\cos\theta - F\cos\theta - 6mg - 8mL\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)$$

6a) Linearizzazione delle eq. di Lagrange.

Le eq. linearizzate non conservative sono

$$A\ddot{\eta} + \cancel{B\dot{\eta}} + C\eta = 0$$

dove $A_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|_{q_e}$, $B_{ij} = \cancel{-\left.\dfrac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\right|_{q_e}}$, $C_{ij} = -\left.\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right|_{q_e}$

La matrice di massa e di rigidezza si ricavano, rispettivamente, da

$$m\begin{bmatrix} 6 & 8L\cos\theta \\ 8L\cos\theta & 12L^2 \end{bmatrix} \qquad -\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right) = -\begin{bmatrix} -c & F\cos\theta \\ 0 & cL^2\cos 2\theta - 8mgL\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$m\begin{bmatrix} 6 & 8L\cos\theta \\ 8L\cos\theta & 12L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -c & F\cos\theta \\ 0 & cL^2(2\cos^2\theta - 1) - 8mgL\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto,

$\vec{q}_e^{(1)} = \left(-\dfrac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}, -\arccos\lambda\right)$
$$\begin{cases} 6m\ddot{\eta}_1 + 8L\lambda\ddot{\eta}_2 + c\eta_1 - F\lambda\eta_2 = 0 \\ 8mL\lambda\ddot{\eta}_1 + 12mL^2\ddot{\eta}_2 - \left[cL^2(2\lambda^2-1) - 8mgL\lambda\right]\eta_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{q}_e^{(2)} = (0,0)$
$$\begin{cases} 6m\ddot{\eta}_1 + 8L\ddot{\eta}_2 + c\eta_1 - F = 0 \\ 8mL\ddot{\eta}_1 + 12mL^2\ddot{\eta}_2 - (cL^2 - 8mgL)\eta_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{q}_e^{(3)} = \left(\dfrac{F}{c}\sqrt{1-\lambda^2}, \arccos\lambda\right)$
$$\begin{cases} 6m\ddot{\eta}_1 + 8L\lambda\ddot{\eta}_2 + c\eta_1 - F\lambda\eta_2 = 0 \\ 8mL\lambda\ddot{\eta}_1 + 12mL^2\ddot{\eta}_2 - \left[cL^2(2\lambda^2-1) - 8mgL\lambda\right]\eta_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{q}_e^{(4)} = (0,\pi)$
$$\begin{cases} 6m\ddot{\eta}_1 - 8L\ddot{\eta}_2 + c\eta_1 + F = 0 \\ -8mL\ddot{\eta}_1 + 12mL^2\ddot{\eta}_2 - (cL^2 + 8mgL)\eta_2 = 0 \end{cases}$$