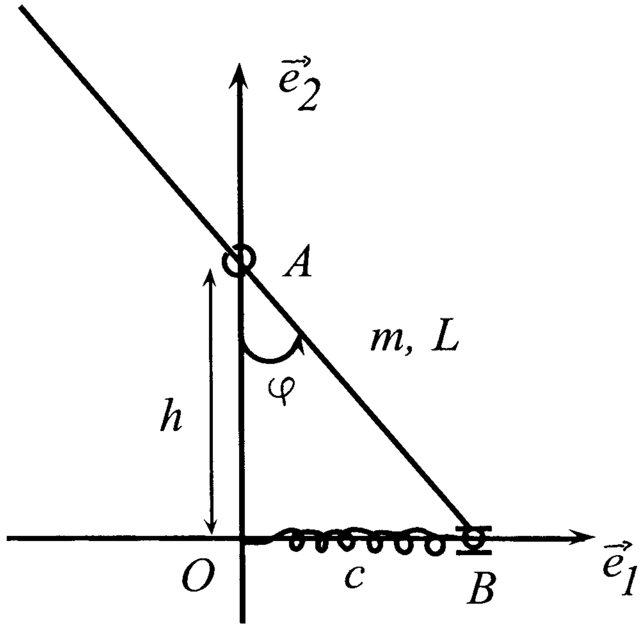
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 27 giugno 2011

(G. Tondo)



Si consideri il rigido di figura costituito da un asta omogenea di lunghezza L e massa m, passante per un anellino liscio fissato nel punto A, posto a distanza h dal punto O, e vincolata a scorrere senza attrito su una guida orizzontale *liscia*, parallela al versore $\vec{e}_1$. Il modello è soggetto al peso proprio e alla forza elastica della molla fissata all'estremo B dell'asta e nel punto fisso O.

STATICA.

Calcolare:

1) le configurazioni di equilibrio del modello e discuterne la stabilità, supponendo che la lunghezza dell'asta sia $L \gg h$;

2) le reazioni vincolari sul punto dell'asta passante per A all'equilibrio (supponendo nulla la coppia di reazione) e dimostrare che il vettore risultante è ortogonale all'asta;

3) le reazioni vincolari sull'asta nell'estremo B.

DINAMICA.

4) Scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

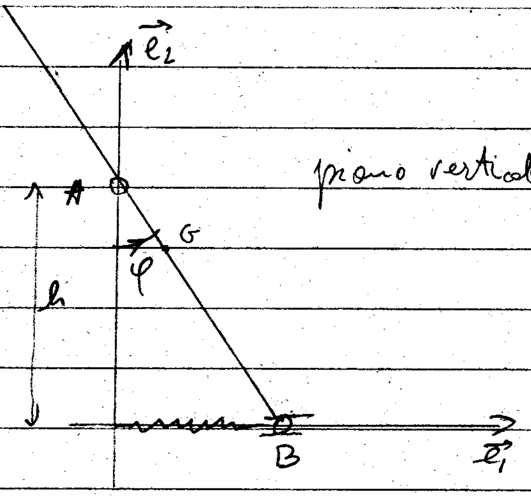
5) scrivere l'equazione di Lagrange linearizzata intorno alle configurazioni di equilibrio e calcolare, dove possibile, la frequenza delle piccole oscillazioni;

6) calcolare le reazioni vincolari esterne sull'asta in A e in B durante il moto in funzione di φ, a partire dalle condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$.

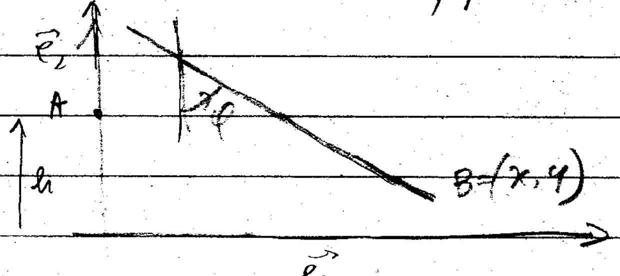
Tema del 27/06/2011

Analisi cinematica

piano verticale



Dal metodo dei congelamenti successivi si ricava che il modello ha 1 g.l. poiché, se congelo l'angolo φ, il modello non ammette spostamenti virtuali a causa del vincolo di appoggio in B.
D'altra parte, con il metodo del bilancio, si ottiene che $l = g - v = 3 - 2 = 1$, poiché i vincoli in A e B sono due vincoli semplici compatibili ed efficaci. L'anellino in A vincola un punto A' (variabile) dell'asta a passare per il punto fisso A (passaggio per un punto), la cerniera scorrevole in B obbliga l'estremo B dell'asta a stare a contatto con la guida fissa. Per verificare l'efficacia dei vincoli e per individuare eventuali configurazioni a vincoli inefficaci scriviamo le equazioni di vincolo e calcoliamone lo Jacobiano. Introducendo le coordinate sovrabbondanti $\{x, y, \varphi\}$, dove (x, y) denotano le coordinate cartesiane dell'estremo B dell'asta, possiamo scrivere le eq. vincolari



$$(1.1)\quad \begin{cases} y = 0 \\ x = (h-y)\,tg\,\varphi \end{cases}$$

che sono compatibili e definiscono $C_v' = \{\varphi : -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$
Comunque, tenendo conto dell'ulteriore vincolo unilatero

$$\overline{AB} \le L \iff \cos\varphi \ge \frac{h}{L}$$

si ottiene che lo spazio delle configurazioni si riduce a

$$C_v = \{\varphi : -\arccos\frac{h}{L} \le \varphi \le \arccos\frac{h}{L}\}$$

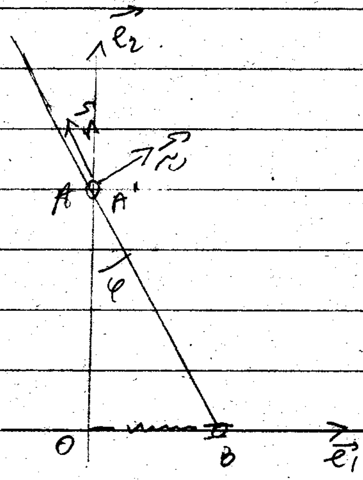
La matrice Jacobiana dei vincoli (1.1) è data da

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & tg\varphi & -\frac{(h-y)}{\cos^2\varphi} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}\, J_{|C_v} = 2 = \max \Rightarrow$$ vincoli efficaci in tutte le configurazioni ordinarie di C_v.

Analizziamo più dettagliatamente il vincolo in A e, in particolare, lo spostamento virtuale del punto A' dell'asta che, in ogni configurazione, passa per il punto fisso A. A tale scopo, dimostriamo che $\delta\vec{x}_{A'}$ è parallelo all'asta. Infatti,

(2.1) $\delta \vec{x}_{A'} = \delta \vec{x}_B + \vec{\varphi} \times (\vec{x}_{A'} - \vec{x}_B)$ $\qquad \vec{\varphi} = \delta\varphi\, \vec{e}_3$

(2.2) $\vec{x}_B = h\, tg\varphi\, \vec{e}_1 \Rightarrow \delta\vec{x}_B = \frac{h}{\cos^2\varphi}\delta\varphi\, \vec{e}_1$



(2.3) $\vec{x}_{A'} - \vec{x}_B = \frac{h}{\cos\varphi}\vec{n}$

(2.4)
$$\delta\vec{x}_{A'} = \frac{h}{\cos^2\varphi}\delta\varphi\,\vec{e}_1 + \delta\varphi\,\vec{e}_3 \times \frac{h}{\cos\varphi}\vec{n}$$
$$= \left[\frac{h}{\cos^2\varphi}\vec{e}_1 + \frac{h}{\cos\varphi}(-\vec{\tau})\right]\delta\varphi$$
$$= \frac{h}{\cos\varphi}\left[\frac{1}{\cos\varphi}\vec{e}_1 - (\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2)\right]\delta\varphi$$
$$= \boxed{-h\frac{tg\varphi}{\cos\varphi}\vec{n}\,\delta\varphi}$$

$\vec{n} = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2$
$\vec{\tau} = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2$
$\vec{e}_1 \cdot \vec{\tau} = \cos\varphi$
$\vec{e}_3 \times \vec{n} = -\vec{\tau}$

Il fatto che $\delta\vec{x}_{A'}$ è parallelo all'asta ha un'importante conseguenza sulle reazioni vincolari in A. Infatti, poiché il vincolo in A è, per ipotesi, non dissipativo e bilatero, segue che

(2.5)
$$0 = LV^{(reaz)} = \vec{\Phi}_{A'} \cdot \delta\vec{x}_{A'} = \vec{\Phi}_{A'} \cdot \left(-h\frac{tg\varphi}{\cos\varphi}\delta\varphi\,\vec{n}\right)$$
$$= \vec{\Phi}_{A'} \cdot \vec{n}\left(-h\frac{tg\varphi}{\cos\varphi}\right)\delta\varphi \qquad \forall\,\delta\varphi$$

Pertanto, se $\varphi \neq 0$ segue che

(2.6)
$$\vec{\Phi}_{A'} \cdot \vec{n} = 0,$$

cioè la reazione vincolare in A sull'asta è ortogonale all'asta se $\varphi \neq 0$. Per $\varphi = 0$, essendo $\delta\vec{x}_{A'}|_{\varphi=0} = 0$, la direzione di $\vec{\Phi}_{A'}$ è arbitraria.

Il modello è soggetto a forze conservative (il peso e la forza elastica) e a vincoli non dissipativi. Pertanto, possiamo utilizzare il metodo dell'energia potenziale per trovare le configurazioni di equilibrio.

$$V(\varphi) = -m\vec{g}\cdot\vec{x}_G + \frac{1}{2} c\, \overline{OB}^2$$

(3.1) $$\vec{x}_G = \vec{x}_B + (\vec{x}_G - \vec{x}_B) = x\,\vec{e}_1 + \frac{L}{2}\vec{n} = x\,\vec{e}_1 + \frac{L}{2}\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$= \left(x - \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\vec{e}_1 + \frac{L}{2}\cos\varphi\,\vec{e}_2 = \left(h\,tg\,\varphi - \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\vec{e}_1 + \frac{L}{2}\cos\varphi\,\vec{e}_2$$

(3.2) $$V(\varphi) = -m(-g\,\vec{e}_2)\cdot\vec{x}_G + \frac{1}{2}c\,(h\,tg\,\varphi)^2 = mg\frac{L}{2}\cos\varphi + \frac{c}{2}h^2 tg^2\varphi$$

Cerchiamo i punti stazionari di V.

(3.3) $$V'(\varphi) = -mg\frac{L}{2}\sin\varphi + \frac{c}{\cancel{2}}h^2\,\cancel{2}\,\frac{tg\,\varphi}{\cos^2\varphi} = -mg\frac{L}{2}\sin\varphi + ch^2\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = -Q_\varphi$$

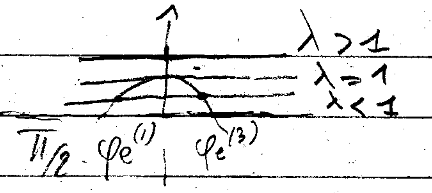
Pertanto, l'eq. pura di equilibrio è

(3.4) $$\sin\varphi\left(-mg\frac{L}{2} + \frac{ch^2}{\cos^3\varphi}\right) = 0$$

con le seguenti soluzioni

$\sin\varphi = 0$ vel $\cos^3\varphi = \dfrac{2ch^2}{mgL} = \lambda^3 > 0$

$\varphi = 0$ vel $\cos\varphi = \lambda$



Quindi, il modello ammette gli equilibri

$\varphi_e^{(2)} = 0 \ \forall\lambda$ e $\varphi_e^{(1)} = -\varphi_e^{(3)}$, $\varphi_e^{(3)} = \arccos\lambda = \arccos\sqrt[3]{\dfrac{2ch^2}{mgL}}$ se $\lambda < 1$

Naturalmente, affinché $\varphi_e^{(1)}$ e $\varphi_e^{(3)}$ abbiano senso, deve risultare $\varphi_e^{(1)}, \varphi_e^{(3)} \in C_r$, cioè

(4.1) $-\arccos\frac{h}{L} \leq \varphi_e^{(1)}$ et $\varphi_e^{(3)} \leq \arccos\frac{h}{L}$

che equivale alla relazione

(4.2) $$\cos\varphi_e^{(1)} = \cos\varphi_e^{(3)} \geq \frac{h}{L}$$

Tale relazione è soddisfatta se e solo se

(4.3) $$\lambda \geq \frac{h}{L}$$

Quindi, $\varphi_e^{(1)}$ e $\varphi_e^{(3)}$ esistono se e solo se

(4.4) $$\frac{h}{L} \leq \lambda < 1 .$$

Valutiamo la stabilità degli equilibri. A tale scopo, riscriviamo

(4.5) $$V'(\varphi) = mg\frac{L}{2}\left(-\sin\varphi + \frac{kch^2}{mgL}\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\right) = mg\frac{L}{2}\left(-\sin\varphi + \lambda^3\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\right)$$

e calcoliamo la derivata seconda di V

(4.6) $$V''(\varphi) = mg\frac{L}{2}\left[-\cos\varphi + \lambda^3\left(\frac{1}{\cos^3\varphi} + \frac{\sin\varphi\, 3\cancel{\cos^2\varphi}\sin\varphi}{\cos^{\cancel{6}4}\varphi}\right)\right]$$

$$= mg\frac{L}{2}\left(-\cos\varphi + \lambda^3\frac{\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\right)$$

$$= mg\frac{L}{2}\left(-\cos\varphi + \lambda^3\frac{3-2\cos^2\varphi}{\cos^4\varphi}\right)$$

(4.7) $$V''(\varphi_e^{(1)}) = V''(\varphi_e^{(3)}) = mg\frac{L}{2}\left(-\lambda + \lambda^3\frac{3-2\lambda^2}{\lambda^4}\right) = \frac{mgL}{2}\left(\frac{-3\lambda^5 + 3\lambda^3}{\lambda^4}\right)$$

$$= \frac{3}{2}mgL\frac{1-\lambda^2}{\lambda} > 0 \iff -1 < \lambda < 1 \overset{(4.4)}{\Longrightarrow} \text{minimo} \Rightarrow \text{stabilità}$$

$$V''\left(\varphi_e^{(2)}\right) = mg\frac{L}{2}\left(-1+\lambda^3(3-2)\right) = mg\frac{L}{2}(\lambda^3-1) \begin{cases} \lambda<1 \; <0 \Rightarrow \max \Rightarrow \text{instab.} \\ \lambda=1 \; =0 \Rightarrow \text{dubbio} \\ \lambda>1 \; >0 \Rightarrow \min \Rightarrow \text{stabil.} \end{cases}$$

Per decidere il caso dubbio, calcoliamo le derivate successive

$$V'''(\varphi) = mg\frac{L}{2}\left[\sin\varphi + \lambda^3\left(\frac{4\cancel{\cos}\varphi\sin\varphi}{\cos^{\cancel{4}\,3}\varphi} + \frac{(3-2\cos^2\varphi)4\sin\varphi}{\cos^5\varphi}\right)\right]$$

$$= mg\frac{L}{2}\left[\sin\varphi + \lambda^3\,\frac{4(\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\sin\varphi - 2\cos^2\varphi\sin\varphi)}{\cos^5\varphi}\right]$$

$$= mg\frac{L}{2}\left(\sin\varphi + 4\lambda^3\frac{\sin\varphi(-\cos^2\varphi+3)}{\cos 5\varphi}\right)$$

$$= mg\frac{L}{2}\left(\sin\varphi - \frac{4\lambda^3\sin\varphi}{\cos^3\varphi} + 12\lambda^3\frac{\sin\varphi}{\cos^5\varphi}\right)$$

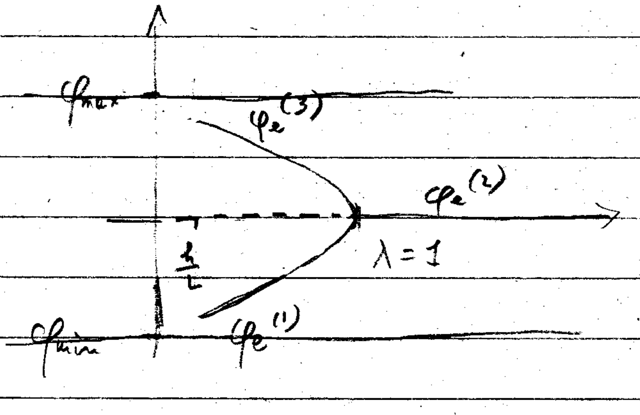
$$V'''\left(\varphi_e^{(2)}\right) = 0$$

$$V^{IV}(\varphi) = mg\frac{L}{2}\left[\cos\varphi - 4\lambda^3\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{3\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\right) + 12\lambda^3\left(\frac{1}{\cos^4\varphi} + 5\frac{\sin^2\varphi}{\cos^6\varphi}\right)\right]$$

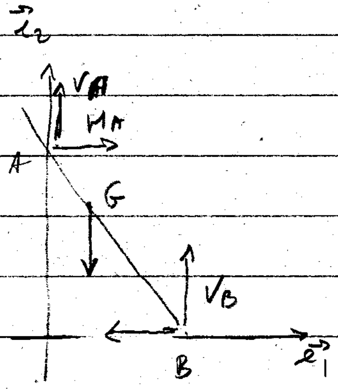
$$V^{IV}\left(\varphi_e^{(2)}\right) = mg\frac{L}{2}\left(1-4\lambda^3+12\lambda^3\right) = mg\frac{L}{2}\left(1+8\lambda^3\right)$$

$$V^{IV}\left(\varphi_e^{(2)}\right)\Big|_{\lambda=1} = mg\frac{L}{2}\,9 > 0 \Rightarrow \min \Rightarrow \text{stabilità}$$

Ricapitolando, vale il seguente grafico di biforcazione degli equilibri:



Reazioni vincolari in A e B



Denotiamo

(6.1) $\vec{\phi}_A = H_A \vec{e}_1 + V_A \vec{e}_2$

la reazione che il vincolo in A esercita nel punto A dell'asta che passa per A e

$$\vec{F}_B = -c(B-A) = -c\, h \operatorname{tg}\varphi\, \vec{e}_1$$

(6.2) $\vec{\phi}_B = V_B \vec{e}_2$

la reazione del vincolo in B sull'estremo dell'asta.
Richiediamo che all'equilibrio siano soddisfatte le ECS.

$$(6.3) \quad \begin{cases} \vec{R}^{ext} = \vec{0} & \vec{\phi}_A + m\vec{g} + \vec{\phi}_B + \vec{F}_B^{(el)} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{ext} = \vec{0} & (G-A) \times m\vec{g} + (B-A) \times \left(\vec{\phi}_B + \vec{F}_B^{(el)}\right) = \vec{0} \end{cases}$$

Scomponendo la I ECS lungo $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ e proiettando la II ECS lungo $\vec{e}_3$ si ottiene

$$\begin{cases} \vec{e}_1: & H_A - c\, h \operatorname{tg}\varphi = 0 \\ \vec{e}_2: & V_A - mg + V_B = 0 \\ \vec{e}_3: & \left[\left(h \operatorname{tg}\varphi - \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{L}{2}\cos\varphi - h\right)\vec{e}_2\right] \times \left(-mg\vec{e}_2\right) \cdot \vec{e}_3 + \\ & + \left(h \operatorname{tg}\varphi\, \vec{e}_1 - h\, \vec{e}_2\right) \times \left[\left(-c\, h \operatorname{tg}\varphi\right)\vec{e}_1 + V_B \vec{e}_2\right] \cdot \vec{e}_3 \end{cases}$$

$$(6.4) \quad \begin{cases} H_A = c\, h \operatorname{tg}\varphi_e \\ V_A = mg - V_B \\ -\left(h \operatorname{tg}\varphi_e - \frac{L}{2}\sin\varphi\right) mg + h \operatorname{tg}\varphi_e V_B - c\, h^2 \operatorname{tg}\varphi_e = 0 \end{cases}$$

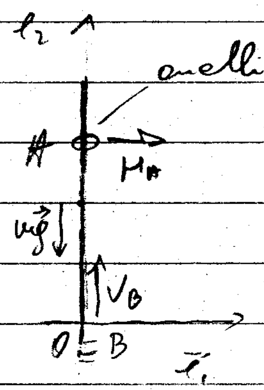
Dall'ultima eq. delle (6.4) si ottiene

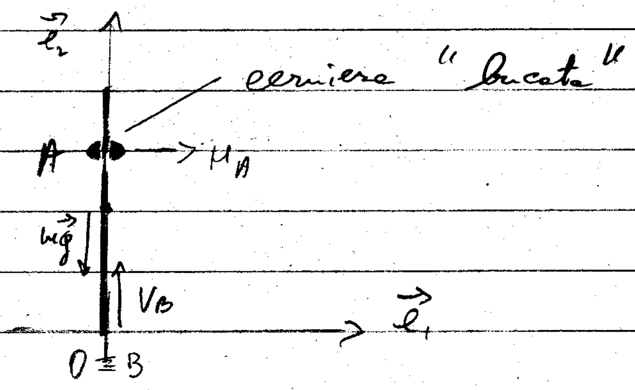
$$\text{se } \varphi \neq 0 \quad \begin{cases} V_B = ch + mg\left(1 - \dfrac{L}{2h}\cos\varphi_e\right) = ch + mg\left(1 - \dfrac{L}{2h}\lambda\right) \\ V_A = -ch + \dfrac{mgL}{2h}\lambda \\ H_A = ch\,tg\,\varphi_e = ch\,\mathrm{sign}(\varphi_e)\,\dfrac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \end{cases}$$

N.B. Se $\varphi = 0$ è ovvio che l'anellino in A non può esercitare alcuna reazione verticale, cioè

$$V_A\big|_{\varphi=0} = 0$$

Analogo risultato vale se sostituiamo l'anellino con una cosiddetta cerniera fissa "bucata".





Allora, se $\varphi = 0$ le ECS forniscono

$$\begin{cases} H_A = ch\,tg(0) = 0 & \Rightarrow \vec{\phi}_A = \vec{0} \\ V_B = mg & \Rightarrow \vec{\phi}_B = mg\,\vec{e}_2 \end{cases}$$

Verifichiamo che, se $\varphi \neq 0$ la reazione vincolare sul punto A' è ortogonale all'asta. A tale scopo, calcoliamo

$$\vec{\phi}_A \cdot \vec{n} = \left[c\,h\,\mathrm{sign}(\varphi_e) \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\,\vec{e}_1 + \left(\frac{mgL}{2h}\lambda - ch \right) \vec{e}_2 \right] \cdot \left(-\sin\varphi_e \vec{e}_1 + \cos\varphi_e \vec{e}_2 \right)$$

$$= c\,h\,\mathrm{sign}(\varphi_e) \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \left(-\mathrm{sign}(\varphi_e) \sqrt{1-\lambda^2} \right) + \left(\frac{mgL}{2h}\lambda - ch \right) \lambda$$

$$= -ch \frac{(1-\lambda^2)}{\lambda} + \left(\frac{mgL}{2h}\lambda - ch \right) \lambda$$

$$= -\frac{ch}{\lambda} + \cancel{ch\lambda} + \frac{mgL}{2h}\lambda^2 - \cancel{ch\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-ch + \frac{mgL}{2h}\lambda^3 \right) = \frac{1}{\lambda}\left(-ch + \frac{\cancel{mgL}}{\cancel{2}h} \frac{\cancel{2}ch^2}{\cancel{mgL}} \right) = 0$$

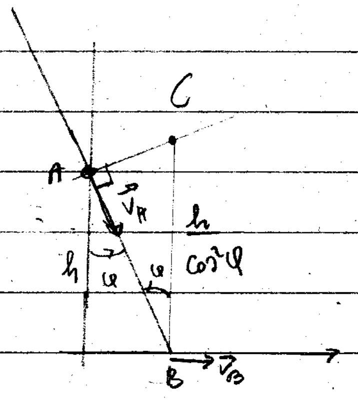
Pertanto, il prodotto scalare della reazione ϕ_A e del versore $\vec{n}$ parallelo all'asta è nullo in tutte le configurazioni di equilibrio, come avevamo già dimostrato in (2.6) per $\varphi \neq 0$.

N.B. Possiamo ora dare l'interpretazione fisica dello eq. pura di equilibrio (3.4), ovvero della forza generalizzata

$$Q_\varphi = + mg\frac{L}{2}\sin\varphi - ch^2 \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}$$

Infatti, si può verificare che

$$Q_\varphi = \vec{M}_c \cdot \vec{e}_3$$



dove C è il centro d'istantanea rotazione dell'asta.

Verifichiamo che, se $\varphi \neq 0$ la reazione vincolare sul punto A' è ortogonale all'asta. A tale scopo, calcoliamo

$$\vec{\phi}_A \cdot \vec{n} = \left[c\,h\,\mathrm{sign}(\varphi_e) \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\,\vec{e}_1 + \left(\frac{mgL}{2h}\lambda - ch \right) \vec{e}_2 \right] \cdot \left(-\sin\varphi_e \vec{e}_1 + \cos\varphi_e \vec{e}_2 \right)$$

$$= c\,h\,\cancel{\mathrm{sign}(\varphi_e)} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \left(-\mathrm{sign}(\varphi_e)\sqrt{1-\lambda^2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{mgL}{2h}\lambda - ch \right) \lambda$$

$$= -ch\frac{(1-\lambda^2)}{\lambda} + \left(\frac{mgL}{2h}\lambda - ch \right)\lambda$$

$$= -\frac{ch}{\lambda} + \cancel{ch\lambda} + \frac{mgL}{2h}\lambda^2 - \cancel{ch\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-ch + \frac{mgL}{2h}\lambda^3 \right) = \frac{1}{\lambda}\left(-ch + \frac{\cancel{mgL}}{\cancel{2}h}\,\frac{\cancel{2}ch^2}{\cancel{mgL}} \right) = 0$$

Pertanto, il prodotto scalare della reazione ϕ_A e del versore $\vec{n}$ parallelo all'asta è nullo in tutte le configurazioni di equilibrio, come avevamo già dimostrato in (2.6) per $\varphi \neq 0$.

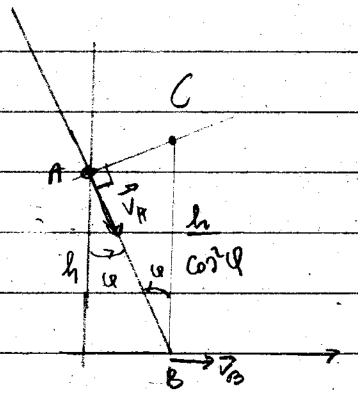
N.B. Possiamo ora dare l'interpretazione fisica della eq. pura di equilibrio (3.4), ovvero della forza generalizzata

$$Q_\varphi = +mg\frac{L}{2}\sin\varphi - ch^2\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}$$

Infatti, si può verificare che

$$Q_\varphi = \vec{M}_C \cdot \vec{e}_3$$

dove C è il centro d'istantanea rotazione dell'asta.



Dinamica

Scriviamo la EL relativa alla coordinata libera φ.
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica dell'asta

$$(9.1) \quad K = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} J_{3G} \dot{\varphi}^2 \qquad J_{3G} = \frac{1}{12} m L^2$$

$$(9.2) \quad \vec{V}_G = \dot{\vec{x}}_G \overset{(3.1)}{=} \left(\frac{h}{\cos^2\varphi} - \frac{L}{2} \cos\varphi \right) \dot{\varphi} \vec{e}_1 - \frac{L}{2} \sin\varphi \, \dot{\varphi} \, \vec{e}_2$$

$$(9.3) \quad V_G^2 = \left(\frac{h}{\cos^2\varphi} - \frac{L}{2}\cos\varphi \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4} \sin^2\varphi \, \dot{\varphi}^2$$

$$= \left(\frac{h^2}{\cos^4\varphi} + \frac{L^2}{4}\cos^2\varphi - \frac{hL}{\cos^2\varphi}\cos\varphi + \frac{L^2}{4}\sin^2\varphi \right) \dot{\varphi}^2$$

$$= \left(\frac{L^2}{4} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{hL}{\cos\varphi} \right) \dot{\varphi}^2$$

Quindi

$$(9.4) \quad K = \frac{1}{2} m \left(\frac{L^2}{4} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{hL}{\cos\varphi} \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m L^2 \right) \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{hL}{\cos\varphi} \right) \dot{\varphi}^2$$

Allora

$$(9.5) \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m \left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{hL}{\cos\varphi} \right) \dot{\varphi}$$

$$(9.6) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m \left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{hL}{\cos\varphi} \right) \ddot{\varphi} + m \left(4 \frac{h^2}{\cos^5\varphi} \sin\varphi - \frac{hL \sin\varphi}{\cos^2\varphi} \right) \dot{\varphi}^2$$

$$(9.7) \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} m \left(\frac{4 h^2 \sin\varphi}{\cos^5\varphi} - \frac{hL \sin\varphi}{\cos^2\varphi} \right) \dot{\varphi}^2$$

Pertanto, la EL si scrive:

$$(9.8) \quad m \left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{hL}{\cos\varphi} \right) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m \left(\frac{4h^2}{\cos^5\varphi} - \frac{hL}{\cos^2\varphi} \right) \sin\varphi \, \dot{\varphi}^2 = \sin\varphi \left(\frac{mgL}{2} - \frac{ch^2}{\cos^3\varphi} \right)$$

Il modello è conservativo con 1 solo g.l.
Quindi, l'eq. linearizzata nell'intorno delle configurazioni di equilibrio è data da

$$a(\varphi_e)\ddot{x} + V''(\varphi_e)x = 0 ,$$

dove $x(t) = \varphi(t) - \varphi_e$ è lo scarto dall'equilibrio,

$$a(\varphi_e) = \left.\frac{d^2 K}{d\dot{\varphi}^2}\right|_{\varphi_e} = m\left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi_e} - \frac{hL}{\cos\varphi_e}\right) = \begin{cases} \varphi_e^{(2)}=0 & m\left(\frac{L^2}{3}+h^2-hL\right) \\ \varphi_e^{(1)}, \varphi_e^{(3)} & m\left(\frac{L^2}{3}+\frac{h^2}{\lambda^4}-\frac{hL}{\lambda}\right) \end{cases}$$

Allora, l'eq. linearizzata intorno a $\varphi_e^{(1)}$ e $\varphi_e^{(3)}$ si scrive, tenuto conto della (4.7), come

$$m\left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{\lambda^4} - \frac{hL}{\lambda}\right)\ddot{x} + \frac{3}{2} m g L \frac{1-\lambda^2}{\lambda} x = 0 \qquad \lambda < 1$$

Il moto è oscillatorio con frequenza angolare

$$\nu = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} \cancel{m} g L \frac{1-\lambda^2}{\lambda}}{\cancel{m}\left(\frac{L^2}{3}+\frac{h^2}{\lambda^4}-\frac{hL}{\lambda}\right)}} \in \mathbb{R}^+$$

Inoltre, l'eq linearizzata intorno a $\varphi_e^{(2)} = 0$, si scrive

se $\lambda < 1$ $\quad m\left(\frac{L^2}{3}+h^2-hL\right)\ddot{x} + \frac{mgL}{2}(\lambda^3-1)x = 0$ m. iperbolico

se $\lambda = 1$ $\quad m\left(\frac{L^2}{3}+h^2-hL\right)\ddot{x} = 0$ m. uniforme

se $\lambda > 1$ $\quad m\left(\frac{L^2}{3}+h^2-hL\right)\ddot{x} + \frac{mgL}{2}(\lambda^3-1)x = 0$ m. oscillatorio

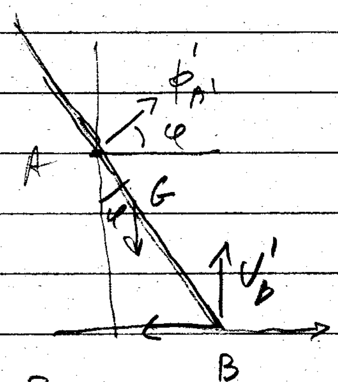
con freq. ang. $\quad \nu = \sqrt{\frac{\frac{\cancel{m}gL}{2}(\lambda^3-1)}{\cancel{m}\left(\frac{L^2}{3}+h^2-hL\right)}} \in \mathbb{R}^+$

Reazioni vincolari dinamiche in A' e B

Osserviamo che la (2.5) vale anche in dinamica e quindi anche la reazione dinamica $\vec{\phi}'_{A'}$ è ortogonale all'asta. Allora, poniamo

$$(11.1) \qquad \vec{\phi}'_{A'} = \phi'_{A'}\,\vec{\tau} = \phi'_{A'}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right),$$

con l'unica incognita $\phi'_{A'}$ da determinare.
Scriviamo la I ECD, proiettata lungo $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$



$$\begin{cases} \vec{e}_1: & \phi'_{A'}\cos\varphi - c\,h\,\mathrm{tg}\,\varphi = m\,\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_1 \\ \vec{e}_2: & \phi'_{A'}\sin\varphi - mg + V'_B = m\,\ddot{\vec{x}}_G\cdot\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$(11.2) \quad \vec{a}_G = \dot{\vec{V}}_G \overset{(9.2)}{=} \left[\left(\frac{h}{\cos^2\varphi} - \frac{L}{2}\cos\varphi\right)\ddot{\varphi} + \left(\frac{2h\sin\varphi}{\cos^3\varphi} + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\dot{\varphi}^2\right]\vec{e}_1 + \\ -\frac{L}{2}\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_2$$

Allora,

$$(11.3) \quad \begin{cases} \phi'_{A'} = c\,h\,\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + m\left[\left(\dfrac{h^2}{\cos^3\varphi} - \dfrac{L}{2}\right)\ddot{\varphi} + \left(\dfrac{2h\sin\varphi}{\cos^4\varphi} + \dfrac{L}{2}\mathrm{tg}\,\varphi\right)\dot{\varphi}^2\right] \\ V'_B = mg - c\,h\,\mathrm{tg}^2\varphi - m\sin\varphi\left[\left(\dfrac{h^2}{\cos^3\varphi} - \dfrac{\cancel{L}}{2}\right)\ddot{\varphi} + \left(\dfrac{2h\sin\varphi}{\cos^4\varphi} + \dfrac{L}{2}\mathrm{tg}\,\varphi\right)\dot{\varphi}^2\right] + \\ \quad - m\dfrac{L}{2}\left[\left(\cancel{\sin\varphi\,\ddot{\varphi}}\right) + \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right] \end{cases}$$

Per scrivere $\phi'_{A'}$ e V'_B in funzione della coordinata libera φ, osserviamo che il modello è conservativo, a vincoli lisci e fissi, quindi ammette l'energia meccanica come integrale primo di moto.

Pertanto

$$(12.1)\quad E = K + V = \frac{1}{2} m \left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{hL}{\cos\varphi} \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{mgL}{2} \cos\varphi + \frac{c}{2} h^2 tg^2\varphi$$

$$= E_{|t=0} = E_{\substack{|\varphi(0)=0 \\ \dot{\varphi}(0)=\omega_0}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{L^2}{3} + h^2 - hL \right) \omega_0^2 + mg\frac{L}{2} = E_0$$

Allora

$$(12.2)\quad \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{m\left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{hL}{\cos\varphi} \right)} \left(E_0 - \frac{mgL}{2} \cos\varphi - \frac{c}{2} h^2 tg^2\varphi \right) = f(\varphi)$$

che sostituita nella EL (9.8) permette di ricavare

$$(12.3)\quad \ddot{\varphi} = \frac{1}{m\left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{hL}{\cos\varphi} \right)} \left[-\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m} \left(\frac{4h^2}{\cos^5\varphi} - \frac{hL}{\cos^2\varphi} \right) \sin\varphi \, \frac{\cancel{2}}{\cancel{m}\left(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{hL}{\cos\varphi} \right)} \left(E_0 - \frac{mgL}{2}\cos\varphi - \frac{c}{2} h^2 tg^2\varphi \right) + \sin\varphi \left(\frac{mgL}{2} - \frac{c\,h^2}{\cos^3\varphi} \right) \right] = g(\varphi)$$

Sostituendo la (12.2) e la (12.3) nella (11.3) si ottiene la risposta.