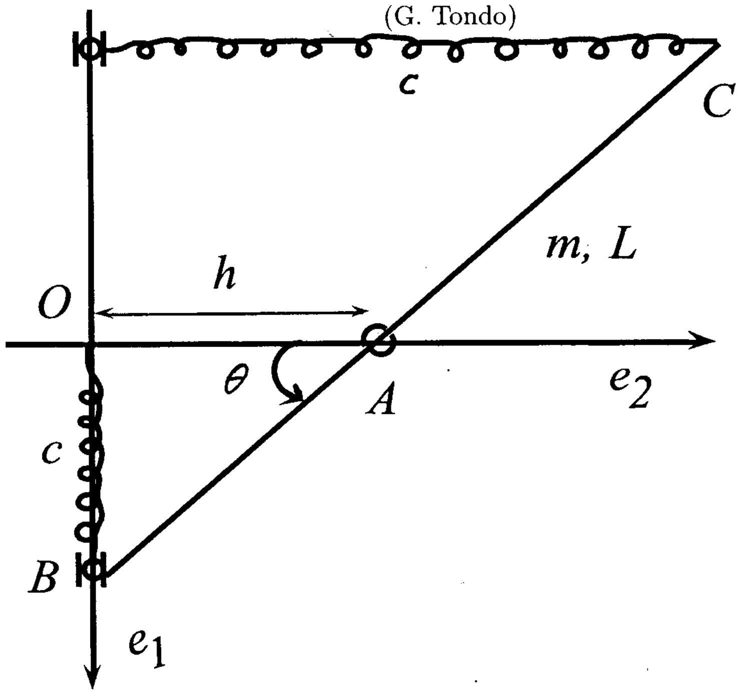
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 30 gennaio 2012
(G. Tondo)



Si consideri il rigido di figura costituito da un asta omogenea di lunghezza L e massa m, passante per un anellino liscio fissato nel punto A, posto a distanza $h = \frac{L}{3}$ dal punto O e vincolata a scorrere senza attrito su una guida verticale *liscia*, parallela al versore $\vec{e}_1$. Il modello è soggetto al peso proprio e alla forza elastica della due molle di costante elastica c, fissate, una all'estremo B dell'asta e nel punto fisso O, l'altra nell'estremo dell'asta C e sempre parallela all'asse orizzontale.

STATICA.

Determinare:

1) il valore della costante elastica c in modo che $\theta_e = \pi/3$ sia una configurazione di equilibrio e la stabilità di detta configurazione;

2) le reazioni vincolari sul punto dell'asta passante per A all'equilibrio suddetto (supponendo nulla la coppia di reazione);

3) le reazioni vincolari sull'asta nell'estremo B.

DINAMICA.

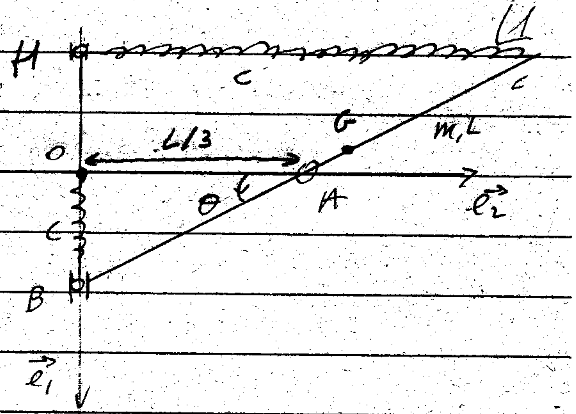
4) Scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

5) calcolare le reazioni vincolari esterne sull'asta in A durante il moto in funzione di θ, a partire dalle condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$;

6) calcolare le reazioni vincolari esterne sull'asta in B durante il moto in funzione di θ, a partire dalle condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ (solo 6 CFU);

6a) linearizzare l'equazione di Lagrange intorno alla configurazione di equilibrio suddetta e calcolare, se è possibile, la frequenza delle piccole oscillazioni (solo 9 CFU).

Tema del 30/01/2012



Il modello è analogo a quello del Tema del 27/06/2011. Pertanto, ho 1 g. l. e valgono le seguenti equazioni

(1.1) $\vec{x}_B = h\, tg\,\theta = \frac{L}{3}\, tg\,\theta\, \vec{e}_1$

(1.2) $\vec{x}_G = \vec{x}_B + (\vec{x}_G - \vec{x}_B) = \frac{L}{3} tg\,\theta\, \vec{e}_1 + \frac{L}{2}\left(-\sin\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2\right) = L\left[\left(\frac{tg\,\theta}{3} - \frac{\sin\theta}{2}\right)\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\cos\theta\, \vec{e}_2\right]$

(1.3) $\vec{x}_C = \vec{x}_B + (\vec{x}_C - \vec{x}_B) = L\left[\left(\frac{tg\,\theta}{3} - \sin\theta\right)\vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2\right]$

La sollecitazione esterna è conservativa, quindi ammette l'energia potenziale

(1.4) $V(\theta) = \frac{1}{2} c\, \overline{OB}^2 + \frac{1}{2} c\, \overline{HC}^2 - m\vec{g}\cdot\vec{x}_G$,

dove

$$\overline{OB}^2 = |\vec{x}_B|^2 = \frac{L^2}{9} tg^2\theta, \quad \overline{HC}^2 = |\vec{x}_C\cdot\vec{e}_2|^2 = L^2\cos^2\theta.$$

Quindi,

(1.5) $V(\theta) = \frac{cL^2}{18} tg^2\theta + \frac{cL^2}{2}\cos^2\theta - mgL\left(\frac{tg\,\theta}{3} - \frac{\sin\theta}{2}\right)$

Cerchiamo i punti stazionari di $V(\theta)$. A tale scopo calcoliamo

(1.6) $V'(\theta) = \frac{cL^2}{\cancel{18}\,9}\cancel{2}\frac{tg\,\theta}{\cos^2\theta} - cL^2\cos\theta\sin\theta - mgL\left(\frac{1}{3\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\cos\theta\right)$

e richiediamo che si annulli per $\theta = \frac{\pi}{3}$

(1.7) $V'\left(\frac{\pi}{3}\right) = c\frac{L^2}{9}\frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - cL^2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - mgL\left(\frac{1}{3\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$

Quindi

(2.1) $$V'\left(\frac{\pi}{3}\right) = cL^2\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{3} - mgL\,\frac{13}{12}$$

si annulla se

(2.2) $$c = \frac{mgL\,13/12}{\sqrt{3}L^2\,7/36} = \frac{mg}{L}\,\frac{13}{7}\sqrt{3}$$

In tal caso $\theta_e = \frac{\pi}{3}$ è una configurazione di equilibrio per il Teo. di stazionarietà dell'energia potenziale. Valutiamone la stabilità. A tale scopo, calcoliamo

(2.3) $$V''(\theta) = \frac{cL^2}{9}\left(\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} + \frac{3\sin^2\theta}{\cos^4\theta}\right) - cL^2\cos 2\theta - mgL\left(\frac{2\sin\theta}{3\cos^3\theta} + \frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

$$V''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{cL^2}{9}\left(4 + \frac{3\cdot 3}{4}16\right) + \frac{cL^2}{2} - mgL\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}8 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= cL^2\left(\frac{40}{9}+\frac{1}{2}\right) - mgL\sqrt{3}\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

(2.4) $$= cL^2\,\frac{89}{18} - mgL\sqrt{3}\,\frac{35}{12}$$

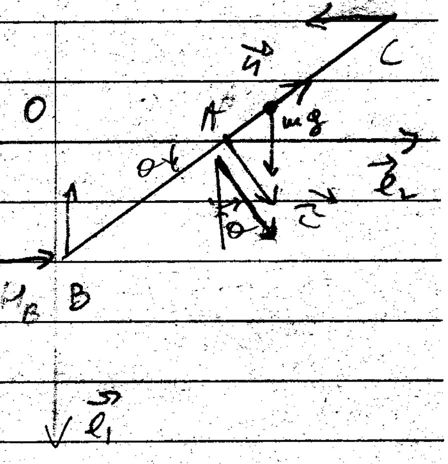
$$= L^2\,\frac{mg}{L}\,\frac{13}{7}\sqrt{3}\,\frac{89}{18} - mgL\,\frac{35}{12}\sqrt{3}$$

$$= mgL\sqrt{3}\left(\frac{13\cdot 89}{7\cdot 18} - \frac{35}{12}\right) = mgL\sqrt{3}\,\frac{1579}{252} > 0$$

Dunque, $\theta_e = \frac{\pi}{3}$ è un punto di minimo di $V(\theta)$, quindi un equilibrio stabile

N.B. La derivata $V''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ poteva essere calcolata numericamente.

2) e 3) Reazioni vincolari in A e B



Sappiamo (Tema 27/06/2011) che lo spostamento virtuale del punto A dell'asta è // all'asta

$$(3.1) \qquad \delta \vec{x}_A = -\frac{L}{3}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\,\delta\theta\,\vec{u}$$

Pertanto, poiché il vincolo in A è liscio

$$(3.2) \qquad \vec{\phi} = \phi\,\vec{\tau}$$

Allora, le reazioni vincolari incognite all'equilibrio sono (ϕ, H_B) e possono essere calcolate risolvendo il sistema

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi\cos\theta_e + mg - c\dfrac{L}{3}\,tg\,\theta_e = 0 \\ H_B + \phi\sin\theta_e - cL\cos\theta_e = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$(3.4) \qquad \phi = 2\left(-mg + c\frac{L}{3}\sqrt{3}\right) = 2\left(-mg + \frac{13\sqrt{3}}{7}\frac{mg}{L}\frac{L\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{12}{7}mg > 0$$

$$H_B = -\phi\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{cL}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{12\sqrt{3}}{7}mg + \frac{13}{7}\sqrt{3}\frac{mg}{L}L\right) = \frac{\sqrt{3}}{14}mg > 0$$

Dinamica

4) Calcoliamo l'energia cinetica dell'asta

(4.1) $K = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 \qquad I_G = \frac{1}{12} m L^2$

(4.2) $\vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G \overset{(1.2)}{=} L\left[\left(\frac{1}{3\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2\right]\dot{\theta}$

(4.3) $v_G^2 = L^2\dot{\theta}^2\left[\left(\frac{1}{3\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right] = L^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{9\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos\theta} + \frac{1}{4}\right)$

Quindi,

(4.4)
$$K = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{9\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos\theta} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2\cdot 12} m L^2 \dot{\theta}^2$$
$$= \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{9\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos\theta} + \frac{1}{3}\right)$$

(4.5) $\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = m L^2 \dot{\theta}\left(\frac{1}{9\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos\theta} + \frac{1}{3}\right)$

(4.6) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) = m L^2 \ddot{\theta}\left(\frac{1}{9\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos\theta} + \frac{1}{3}\right) + m L^2 \dot{\theta}^2\left(\frac{4\sin\theta}{9\cos^5\theta} - \frac{\sin\theta}{3\cos^2\theta}\right)$

(4.7) $\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{4\sin\theta}{9\cos^5\theta} - \frac{\sin\theta}{3\cos^2\theta}\right)$

Pertanto, l'eq. di Lagrange relativa a θ è

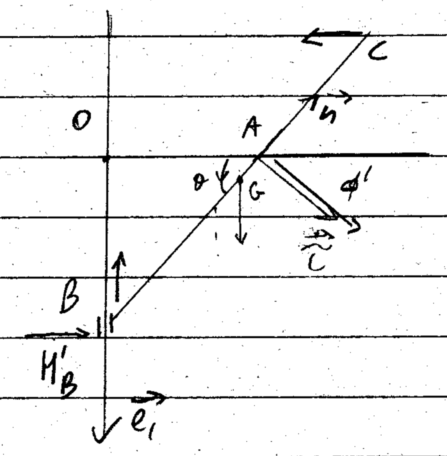
(4.8) $m L^2 \ddot{\theta}\left(\frac{1}{9\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos\theta} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{4}{9\cos^5\theta} - \frac{1}{3\cos^2\theta}\right)\sin\theta = Q_\theta$,

dove

(4.9) $Q_\theta = -V'(\theta)\big|_{c=} = -mgL\left[\frac{13\sqrt{3}}{7}\left(\frac{\sin\theta}{9\cos^3\theta} - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) - \left(\frac{1}{3\cos^3\theta} - \frac{1}{2}\cos\theta\right)\right]$

5).c) Reazioni vincolari dinamiche in A e in B in funzione di θ

Anche in dinamica la reazione vincolare esterna sull'asta in A è ortogonale all'asta:



(5.1) $$\vec{\phi}' = \phi' \vec{\tau}$$

Allora, per calcolare ϕ' possiamo utilizzare la I ECD proiettata lungo $\vec{e}_1$

(5.2) $$\vec{R} \cdot \vec{e}_1 = m \ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_1 \,, \quad \phi' \cos\theta + mg - c\frac{L}{3} \operatorname{tg}\theta = m \ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_1$$

Inoltre, per calcolare H'_B, utilizziamo la I ECD proiettata lungo $\vec{e}_2$

(5.3) $$\vec{R} \cdot \vec{e}_2 = m \ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_2 \,, \quad H'_B + \phi' \sin\theta - \frac{13}{7}\sqrt{3}\, mg \cos\theta = m \ddot{\vec{x}}_G \cdot \vec{e}_2$$

L'accelerazione del baricentro G è data da

$$\ddot{\vec{x}}_G = \dot{\vec{V}}_G = L\ddot{\theta}\left[\left(\frac{1}{3\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2\right] + L\dot{\theta}^2\left[\left(\frac{2\sin\theta}{3\cos^3\theta} + \frac{1}{2}\sin\theta\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\cos\theta\,\vec{e}_2\right]$$

(5.4) $$= L\left[\ddot{\theta}\left(\frac{1}{3\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\cos\theta\right) + \dot{\theta}^2\left(\frac{2\sin\theta}{3\cos^3\theta} + \frac{1}{2}\sin\theta\right)\right]\vec{e}_1 + - \frac{L}{2}\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_2$$

Pertanto,

(5.5) $$\begin{cases} \phi'\cos\theta = -mg + c\frac{L}{3}\operatorname{tg}\theta + mL\left[\ddot{\theta}\left(\frac{1}{3\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\cos\theta\right) + \dot{\theta}^2\left(\frac{2\sin\theta}{3\cos^3\theta} + \frac{1}{2}\sin\theta\right)\right] \\ H'_B = -\phi'\sin\theta + \frac{13}{7}\sqrt{3}\, mg\cos\theta - m\frac{L}{2}\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) \end{cases}$$

Per rispondere alle domande 5) e 6) bisogna ricavare un'espressione per $\ddot{\theta}$ e $\dot{\theta}^2$ in funzione di θ da sostituire nel sistema (5.5). A tale scopo che il modello ammette l'energia meccanica come integrale primo di moto. Pertanto

(6.1)
$$E\big|_{t=0} = K + V = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{9\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos\theta} + \frac{1}{3} \right) + \frac{mgL}{2} \left[\frac{13\sqrt{3}}{7} \left(\frac{tg^2\theta}{9} + \cos^2\theta \right) - \frac{2}{3} tg\,\theta + \sin\theta \right]$$

dove

(6.2)
$$E\big|_{t=0} = \frac{13\sqrt{3}}{14} mgL$$

Allora, possiamo scrivere

(6.3)
$$\dot{\theta}^2 = \frac{\frac{13\sqrt{3}}{7} mgL - mgL \left[\frac{13\sqrt{3}}{7} \left(\frac{tg^2\theta}{9} + \cos^2\theta \right) - \frac{2}{3} tg\,\theta + \sin\theta \right]}{mL^2 \left(\frac{1}{9\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos\theta} + \frac{1}{3} \right)} = f(\theta)$$

Sostituendo la $f(\theta)$ nella EL (4.8) ricaviamo

(6.4)
$$\ddot{\theta} = g(\theta)$$

Infine, sostituendo le (6.3) e (6.4) nel sistema (5.5), otteniamo la risposta.

6a) Eq. linearizzata intorno a $\theta_e = \frac{\pi}{3}$

Il modello ha 1 g.l. ed è conservativo. Quindi, l'eq. di moto linearizzata intorno alla configurazioni di equilibrio è

$$(7.1) \quad a(q_e)\,\ddot{\eta} + V''(q_e)\,\eta = 0$$

dove

$$(7.2) \quad a(q_e) = \left.\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^2}\right|_{q=q_e}, \qquad \eta = q(t) - q_e$$

Nel nostro caso,

$$(7.3) \quad a(q) = mL^2\left(\frac{1}{9\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos\theta} + \frac{1}{3}\right), \qquad \eta(t) = \theta(t) - \frac{\pi}{3}$$

$$(7.4) \quad a\left(\frac{\pi}{3}\right) = mL^2\left(\frac{16}{9} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{9}\,mL^2,$$

$$(7.5) \quad V''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1579}{252}\sqrt{3}\,mgL$$

Pertanto, l'eq. linearizzata è

$$(7.6) \quad \frac{13}{9}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\,\ddot{\eta} + \frac{1579}{252}\sqrt{3}\,\cancel{m}g\cancel{L}\,\eta = 0,$$

che ha come soluzioni moti oscillatori con frequenza angolare

$$\nu = \sqrt{\frac{1579}{\cancel{252}_{28}}\,\frac{\sqrt{3}\,\cancel{9}}{13}\,\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{1579}{364}\,\sqrt{3}\,\frac{g}{L}}$$