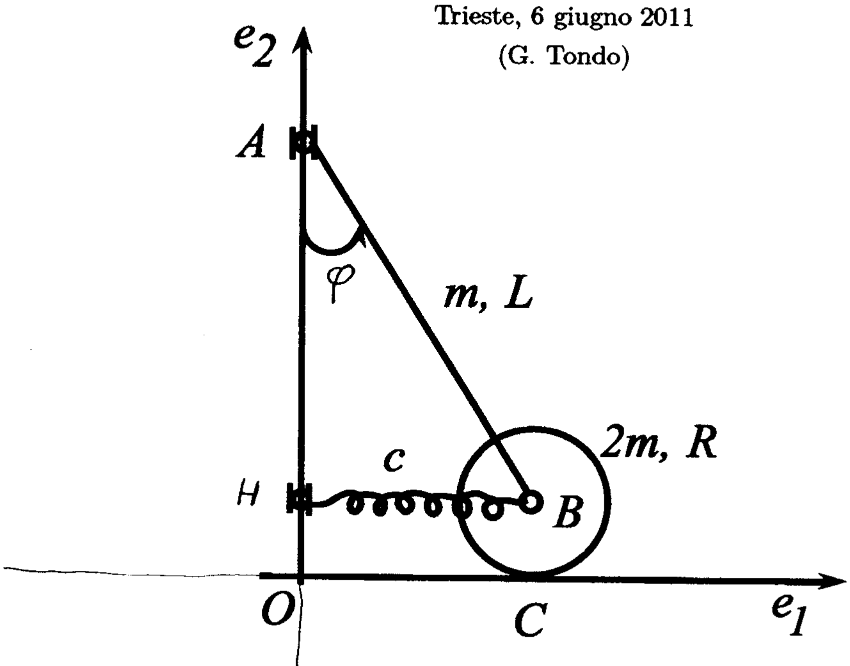
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 6 giugno 2011
(G. Tondo)



Si consideri il sistema articolato di figura costituito da un asta omogenea AB, di lunghezza L e massa m, incernierate nel centro B di un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio R. L'estremo A dell'asta è vincolato (vincolo bilatero) a scorrere senza attrito su una guida verticale parallela al versore $\vec{e}_2$ e il disco è vincolato a rotolare *senza strisciare* su una guida orizzontale *scabra*, parallela al versore $\vec{e}_1$. Il modello è soggetto al peso proprio, alla forza elastica della molla fissata all'estremo B dell'asta e mantenuta orizzontale dal carrello in H.

STATICA.
Calcolare:

1) le configurazioni di equilibrio del modello e discuterne la stabilità;

2) le reazioni vincolari esterne in A e in C, nelle configurazioni di equilibrio;

3) le reazioni vincolari interne sul centro B del disco.

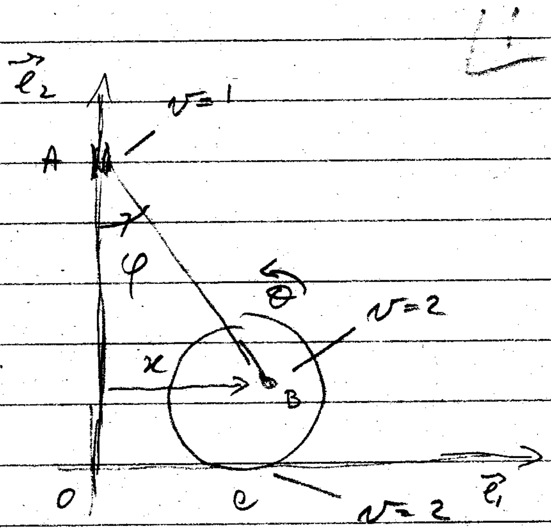
DINAMICA.

4) Scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

5) scrivere l'equazione di Lagrange linearizzata intorno alle configurazioni di equilibrio e calcolare, dove possibile, la frequenza delle piccole oscillazioni;

6) calcolare le reazioni vincolari esterne in A e in C durante il moto in funzione di φ, a partire dalle condizioni iniziali $\varphi(0) = \pi/2$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Tema del 6/06/2011



a) Analisi cinematica

Il modello ha $l=1$. Infatti, dal metodo del bilancio

$$g = 3 \cdot 2 = 6$$

$$v = 1 + 2 + 2 = 5$$

Quindi $l = g - v = 1$. D'altra parte, con il metodo dei congelamenti successivi, osservo che se blocco la rotazione del disco, è congelato anche il moto dell'asta. Quindi, il modello ha 1 solo spostamento virtuale e 1 g.l.. Come coordinata libera, scegliamo l'angolo φ di figura. Introducendo le coordinate sovrabbondanti (φ, x, θ) valgono le seguenti equazioni vincolari

$$(1.1) \begin{cases} x = L \sin\varphi & \text{estremo B dell'asta coincidente con il centro del disco} \\ x = -R\theta + x_0 & \text{vincolo di puro rotolamento} \end{cases}$$

Scegliendo $x_0 = 0$, cioè prendendo $\theta = 0$ quando il centro del disco B è sull'asse verticale, la (1.1) diventa

$$\begin{cases} x = L \sin\varphi \\ x = -R\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta = -\frac{L}{R}\sin\varphi} \qquad (1.2)$$

Le velocità angolari dei due rigidi risultano:

$$(1.3) \quad \vec{\omega}^{(a)} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \,, \quad \vec{\omega}^{(d)} = \dot{\theta}\,\vec{e}_3 \overset{(1.2)}{=} -\frac{L}{R}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_3$$

Statica

Il modello è soggetto a vincoli non dissipativi (appoggi e cerniere lisce, puro rotolamento) e a sollecitazione conservativa (peso, molla con estremo scorrevole lungo un asse ortogonale alla molla), quindi è conservativo. La sua energia potenziale è

(2.1) $V(\varphi) = -m\vec{g}\cdot\vec{x}_G + \frac{1}{2}c\,\overline{HB}^2 - 2m\vec{g}\cdot\vec{x}_B$

(2.2) $\vec{x}_G = \left[\frac{L}{2}\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \left(R + \frac{L}{2}\cos\varphi\right)\vec{e}_2\right]$

(2.3) $\vec{x}_B = \left(L\varphi\sin\varphi\,\vec{e}_1 + R\,\vec{e}_2\right)$

Tenuto conto che la quota del baricentro B del disco è costante, trascurando l'ultimo termine della (2.1) si ottiene:

$$V(\varphi) = mg\,\vec{e}_2\cdot\left(\frac{L}{2}\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \left(R + \frac{L}{2}\cos\varphi\right)\vec{e}_2\right) + \frac{1}{2}c\left(L\sin\varphi\right)^2$$

$$= mg\left(R + \frac{L}{2}\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}cL^2\sin^2\varphi$$

Trascurando il termine costante mgR, si ha

(2.4) $V(\varphi) = mg\frac{L}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}cL^2\sin^2\varphi$

Cerchiamo i punti stazionari dell'energia potenziale (2.4)

(2.5) $V'(\varphi) = -mg\frac{L}{2}\sin\varphi + cL^2\sin\varphi\cos\varphi = -Q_\varphi$

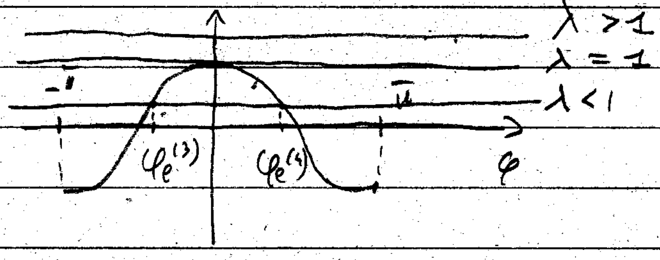
Quindi, l'eq. pura di equilibrio è

(2.6) $\sin\varphi\left(-mg\frac{L}{2} + cL^2\cos\varphi\right) = 0$

Le soluzioni di (2.4) sono

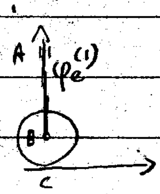
$$\underset{\Updownarrow}{\sin\varphi} = 0 \quad \text{vel} \quad \cos\varphi = \frac{mgL}{2cL^2} = \lambda$$

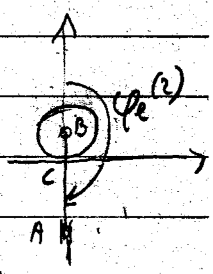
$$\varphi_e^{(1)}=0,\ \varphi_e^{(2)}=\pi$$



$$\varphi_e^{(3)} = -\arccos\lambda$$
$$\varphi_e^{(4)} = \arccos\lambda$$

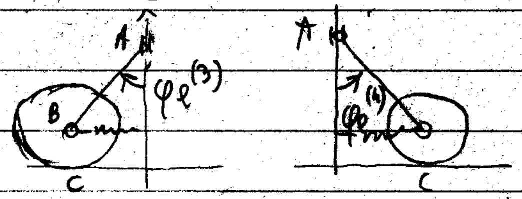
Quindi, gli equilibri del modello sono:





(3.1) $\varphi_e^{(1)}=0 \quad , \quad \varphi_e^{(2)}=\pi \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

(3.2) $\varphi_e^{(3)}=-\varphi_e^{(4)}, \quad \varphi_e^{(4)}=\arccos\lambda, \ \lambda<1$



<u>Stabilità</u>

Applichiamo il Teo di Dirichlet-Lagrange, studiando la qualità dei punti stazionari di $V(\varphi)$. A tale scopo calcoliamo

$$V''(\varphi) = \frac{d}{d\varphi}\left(-mg\frac{L}{2}\sin\varphi + \frac{cL^2}{2}\sin 2\varphi\right) =$$
$$= -mg\frac{L}{2}\cos\varphi + cL^2\cos 2\varphi$$

(3.3) $V''(\varphi_e^{(1)}) = -mg\frac{L}{2} + cL^2 = cL^2\left(1-\frac{mg}{2cL}\right) = cL^2(1-\lambda) \begin{cases} >0 & \text{se } \lambda<1 \\ =0 & \text{se } \lambda=1 \\ <0 & \text{se } \lambda\geq 1 \end{cases}$

(3.4) $V''(\varphi_e^{(2)}) = mg\frac{L}{2} + cL^2 = cL^2(1+\lambda) > 0 \Rightarrow \min \Rightarrow$ stabilità

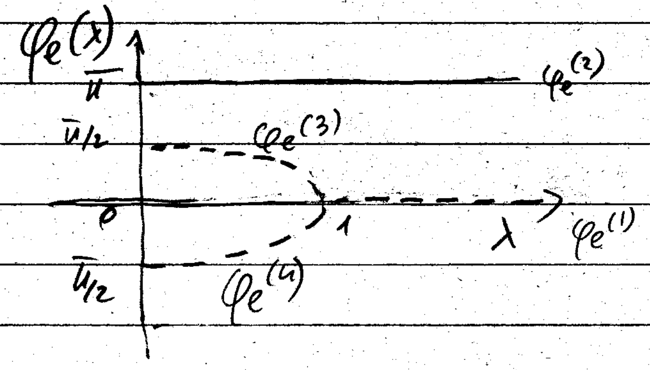
$$V''(\varphi_e^{(3)}) = V''(\varphi_e^{(4)}) = -mg\frac{L}{2}\lambda + cL^2(2\lambda^2-1) = cL^2(2\lambda^2-1-\lambda^2)$$
$$= cL^2(\lambda^2-1) < 0 \Leftarrow \lambda<1 \Rightarrow \max \Rightarrow \text{instabilità}$$

Risolviamo il caso dubbio, $\varphi_e^{(1)}$ per $\lambda = 1$. Passando alle derivate successive, si trova

$$V'''(\varphi) = mg\frac{L}{2}\sin\varphi - 2cL^2\sin 2\varphi \Rightarrow V'''(\varphi_e^{(1)}) = 0$$

$$V^{(IV)}(\varphi) = mg\frac{L}{2}\cos\varphi - 4cL^2\cos 2\varphi \Rightarrow V^{(IV)}(\varphi_e^{(1)}) = \frac{mgL}{2} - 4cL^2 = cL^2(\lambda - 4) \overset{\lambda=1}{=} -3cL^2 < 0 \Rightarrow \text{max} \Rightarrow \text{instab.}$$

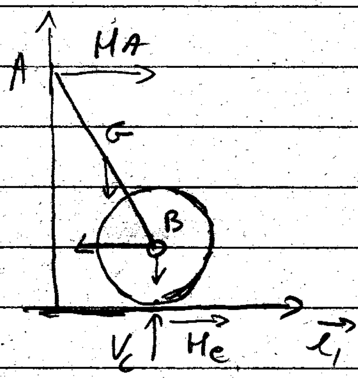
Ricapitoliamo la situazione nel seguente diagramma



tratto continuo: eq. stabili
tratto spezzato: eq. instabili

È evidente una biforcazione a forcone (da 3 eq. a 1 eq.) dell'equilibrio $\varphi_e^{(1)} = 0$.

2) Reazioni vincolari in A e in C all'equilibrio



L'appoggio liscio in A produce una reazione ortogonale alla guida

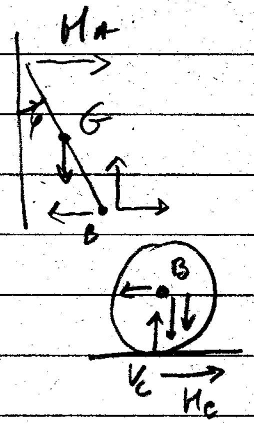
$$\vec{H}_A = H_A \vec{e}_1$$

Il vincolo di puro rotolamento in C, necessita di una guida scabra che, quindi, genera una reazione vincolare

$$\vec{\Phi}_C = H_C \vec{e}_1 + V_C \vec{e}_2$$

Dunque, le reazioni incognite sono 3: (H_A, H_C, V_C); quindi, dobbiamo scrivere 3 eq.. In questo caso, conviene scrivere le equazioni

$$\begin{cases} \vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ \vec{M}_B^{(asta)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \vec{M}_B^{(disco)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_C - 3mg = 0 \\ -H_A L \cos\varphi_e + mg \dfrac{L}{2} \sin\varphi_e = 0 \\ H_C R = 0 \end{cases}$$



le quali hanno il vantaggio di contenere, ciascuna, una sola incognita. La soluzione è

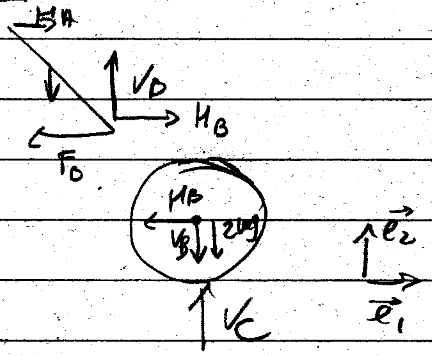
$$H_C = 0, \quad V_C = 3mg, \quad H_A = \frac{mg}{2} \operatorname{tg}\varphi_e$$

Quindi,

$$\varphi_e^{(1)} \Rightarrow H_A = 0, \quad \varphi_e^{(2)} \Rightarrow H_A = 0, \quad \varphi_e^{(3)} \Rightarrow H_A = \frac{mg}{2}\left(-\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right) = -cL\sqrt{1-\lambda^2}$$

$$\varphi_e^{(4)} \Rightarrow H_A = \frac{mg}{2} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} = cL\sqrt{1-\lambda^2}$$

3) Reazioni interne nel centro B del disco, all'equilibrio



Ricordando che la molla è fissata all'estremità dell'asta, applichiamo la I ECS al disco

$$\vec{R}^{est,\, disco} = \vec{0} \qquad \begin{cases} -H_B = 0 \\ -V_B + V_C - 2mg = 0 \end{cases}$$

Quindi,

$$H_B = 0 \qquad V_B = V_C - 2mg = 3mg - 2mg = mg$$

Pertanto, l'azione interna dell'estremo B dell'asta sul disco, si riduce a

$$\vec{\phi}_B = -mg\,\vec{e}_2$$

Dinamica

Scriviamo l'equazione di Lagrange relativa alla coordinata libera φ. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello

$$(7.1)\qquad K = K^{(asta)} + K^{(disco)}$$

$$K^{(asta)} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{3G}^{(asta)} \omega^2_{(asta)} \qquad J_{3G}^{(asta)} = \frac{1}{12} m L^2$$

$$(7.2)\quad \vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G \overset{(1.2)}{=} \frac{L}{2}\cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_1 - \frac{L}{2}\sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_2 = \frac{L}{2}\dot\varphi\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$v_G^2 = \left(\frac{L}{2}\dot\varphi\right)^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \frac{L^2}{4}\dot\varphi^2$$

Pertanto,

$$K^{(ast)} = \frac{1}{2} m \frac{L^2}{4}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} m L^2 \dot\varphi^2 = \frac{1}{6} m L^2 \dot\varphi^2$$

$$K^{(disco)} = \frac{1}{2}(2m)\, v_B^2 + \frac{1}{2} J_{3B}^{(disco)} \omega^2_{(disco)} \qquad J_{3B}^{(disco)} = \frac{1}{2}(2m) R^2$$

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{x}}_B \overset{(1.3)}{=} L\cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_1\,, \quad v_B^2 = L^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2$$

$$K^{(disco)} = m L^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{L}{R}\cos\varphi\,\dot\varphi\right)^2,$$

tenuto conto della (1.3).

Quindi

$$K^{(disco)} = \frac{3}{2} m L^2 \cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 \quad , \text{pertanto}$$

$$(7.3)\quad K = \frac{1}{6} m L^2\dot\varphi^2 + \frac{3}{2} m L^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot\varphi^2\left(\frac{1}{3} + 3\cos^2\varphi\right)$$

Scriviamo l'eq. di Lagrange in forma non conservativa

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = mL^2\dot\varphi\left(\frac{1}{3}+3\cos^2\varphi\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = mL^2\left[\ddot\varphi\left(\frac{1}{3}+3\cos^2\varphi\right) - 6\cos\varphi\sin\varphi\,\dot\varphi^2\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = mL^2\dot\varphi^2\left(-3\cos\varphi\sin\varphi\right)$$

Dunque

$$(8.1)\quad mL^2\left(\frac{1}{3}+3\cos^2\varphi\right)\ddot\varphi - 3mL^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2 \overset{(2.5)}{=} mg\frac{L}{2}\sin\varphi - cL^2\sin\varphi\cos\varphi$$

5) Linearizzazione dell'eq. di Lagrange.

Il modello è conservativo, quindi l'EL linearizzata intorno a una configurazione di equilibrio φ_e si scrive

$$a(\varphi_e)\ddot x + V''(\varphi_e)\,x = 0 \qquad x := \varphi - \varphi_e .$$

$$a(\varphi_e) = \frac{d^2K}{d\dot\varphi^2}\Big|_{\varphi_e} \overset{(7.1)}{=} mL^2\left(\frac{1}{3}+3\cos^2\varphi_e\right)$$

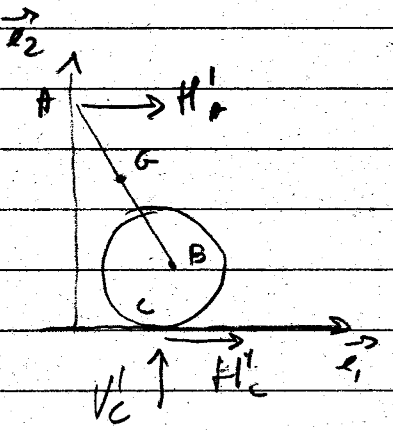
Allora, tenendo conto delle (3.1) e delle (3.2), si trova

$\varphi_e^{(1)} = 0 \qquad \frac{10}{3}mL^2\ddot x + cL^2(1-\lambda)\,x = 0 \qquad \lambda$ <1 oscill. $\nu = \sqrt{\frac{3c}{10m}(1-\lambda)}$; $=1$ lineari; >1 m. iperbolici

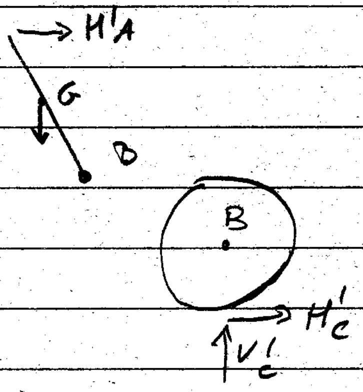
$\varphi_e^{(2)} = \pi \qquad \frac{10}{3}mL^2\ddot x + cL^2(1+\lambda)\,x = 0 \qquad$ Oscillazioni $\nu = \sqrt{\frac{3c}{10m}(1+\lambda)}$

$\varphi_e^{(3)}, \varphi_e^{(4)}$, $\lambda<1 \qquad \left(\frac{1}{3}+3\lambda^2\right)mL^2\ddot x + cL^2(\lambda^2-1)\,x = 0 \qquad$ moti iperbolici

6) Reazioni dinamiche in A e C.



Come in Statica, le reazioni incognite sono 3: (H'_A, H'_C, V'_C).
Conviene utilizzare le seguenti ECD



$$(9.1)\quad \begin{cases} \vec R^{est}\cdot \vec e_2 = m\,\vec a_G\cdot \vec e_2 + \cancel{2m\,\vec a_B\cdot \vec e_2} \\ \vec M_B^{(asta)}\cdot \vec e_3 = \dfrac{dL_B}{dt} + \vec v_B \times m\,\vec v_G \\ \vec M_B^{(disco)}\cdot \vec e_3 = \dfrac{d}{dt}\vec L_B^{(disco)} \end{cases}$$

Calcoliamo i lati destri delle 3 eq

$$\vec a_G = \frac{d}{dt}\vec v_G = \frac{L}{2}\left[\ddot\varphi\left(\cos\varphi\,\vec e_1 - \sin\varphi\,\vec e_2\right) + \dot\varphi^2\left(-\sin\varphi\,\vec e_1 - \cos\varphi\,\vec e_2\right)\right]$$

$$= \frac{L}{2}\left[\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right)\vec e_1 - \left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right)\vec e_2\right]$$

$$\vec L_B^{(asta)} = \mathbb{I}_B\left(\vec\omega_{(asta)}\right) + \left(\vec x_G - \vec x_B\right)\times m\,\vec v_B$$

$$= \frac{1}{3} m L^2 \dot\varphi\,\vec e_3 + \frac{L}{2}\left(-\sin\varphi\,\vec e_1 + \cos\varphi\,\vec e_2\right)\times m\left(L\cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec e_1\right)$$

$$= \frac{1}{3} m L^2 \dot\varphi\,\vec e_3 - \frac{mL^2}{2}\cos^2\varphi\,\dot\varphi\,\vec e_3$$

$$= mL^2\dot\varphi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cos^2\varphi\right)\vec e_3$$

$$\frac{dL_B^{(asta)}}{dt} = \left[mL^2\ddot\varphi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cos^2\varphi\right) + mL^2\dot\varphi^2\left(\cos\varphi\sin\varphi\right)\right]\vec e_3$$

$$\vec v_B \times m\vec v_G = L\cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec e_1 \times \frac{mL}{2}\dot\varphi\left(\cos\varphi\,\vec e_1 - \sin\varphi\,\vec e_2\right) = -\frac{mL^2}{2}\dot\varphi^2\sin\varphi\cos\varphi\,\vec e_3$$

$$\vec{L}_B^{(disco)} = \mathbb{I}_B(\vec{\omega}_{(disco)}) = J_{3B}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_3 = \frac{1}{2}(2m)R^2\left(-\frac{L}{R}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)\vec{e}_3$$
$$= -mRL\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{L}_B^{(disco)}}{dt} = -mRL\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_3$$

Dunque, il sistema (9.1) si scrive

$$\begin{cases} V_C' - 3mg = -m\frac{L}{2}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) \\ -H_A' \cancel{L}\cos\varphi + \frac{mg}{2}\cancel{L}\sin\varphi = mL^{\cancel{2}}\ddot{\varphi}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cos^2\varphi\right) + \frac{mL^{\cancel{2}}}{2}\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi - \frac{mL^{\cancel{2}}}{4}\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi \\ H_C'\cancel{R} = -m\cancel{R}L\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right) \end{cases}$$

Pertanto, le reazioni vincolari esterne sul modello risultano

$$V_C' = 3mg - m\frac{L}{2}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)$$

(10.1) $$H_A' = \frac{mg}{2}\operatorname{tg}\varphi - \frac{mL}{\cos\varphi}\left[\ddot{\varphi}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cos^2\varphi\right) + \frac{1}{4}\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi\right]$$

$$H_C' = -mL\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right),$$

in funzione della coordinata libera e delle sue derivate rispetto al tempo. Per esprimerle in funzione della sola coordinata libera, dobbiamo eliminare $\dot{\varphi}$ e $\ddot{\varphi}$ dalla (10.1). A tale scopo, osserviamo che il modello è una macchina semplice con vincoli fissi, bilateri, non dissipativi e sollecitazione conservativa. Quindi, si conserva l'energia meccanica, cioè

(10.2) $$E_{|t=0} = K + V = \frac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{3} + 3\cos^2\varphi\right) + mg\frac{L}{2}\cos\varphi + \frac{c}{2}L^2\sin^2\varphi$$

da cui $\quad E_{|t=0} = cL^2/2$

Allora, dalle (10.2) ricaviamo $\dot{\varphi}^2$

(11.1) $$\dot{\varphi}^2 = \cancel{2}\,\frac{\frac{cL^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}(1-\sin^2\varphi) - mg\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}}\cos\varphi}{mL^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{3}+3\cos^2\varphi\right)} = \frac{\cos\varphi\,(cL\cos\varphi - mg)}{mL\left(\frac{1}{3}+3\cos^2\varphi\right)} = f(\varphi)$$

Poi, dall'eq. di Lagrange (8.1) possiamo ricavare $\ddot{\varphi}$

(11.2) $$\ddot{\varphi} = \frac{\frac{3}{2}mL^{\cancel{2}}\sin 2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + mg\frac{L}{2}\sin\varphi - \frac{cL^{\cancel{2}}}{2}\sin 2\varphi}{mL^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{3}+3\cos^2\varphi\right)}$$

e sostituendo la (11.2) nella (11.1) otteniamo

(11.3) $$\ddot{\varphi} = g(\varphi)$$

Infine, sostituendo la (11.1) e la (11.3) nelle (10.1) si ottiene la risposta alla domanda 6).