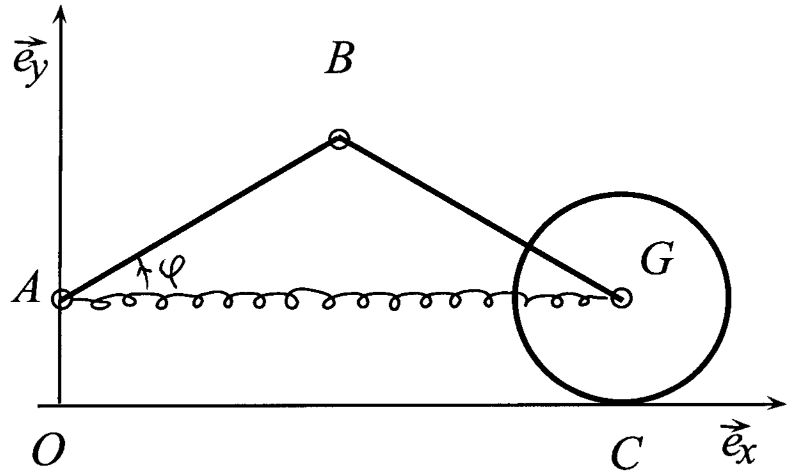
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 16 luglio 2012

(G. Tondo)



Si consideri il sistema di figura costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R, che rotola senza strisciare su una guida orizzontale fissa, e da due aste omogenee, ognuna di lunghezza L e massa m, incernierate tra loro in B. Inoltre, l'asta BG è incernierata nel centro G del disco e l'asta AB nel punto fisso A, in modo che $\overline{OA} = R$. Il modello, posto nel piano verticale passante per la guida, è soggetto al peso proprio e alla forza della molla di costante elastica c, fissata, da una parte alla cerniera esterna A, dall'altra nel centro del disco G.

STATICA.

Determinare:

1) tutte le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione dei parametri del sistema;

2) le reazioni vincolari esterne sul modello in A e nel punto C di contatto del disco con la guida;

3) le reazioni vincolari interne in G e in B.

DINAMICA.

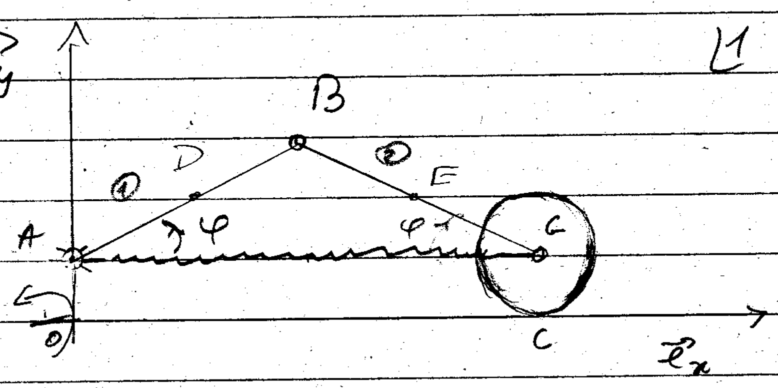
4) Scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

5) calcolare le reazioni vincolari esterne sul modello in A e nel punto C, in funzione della coordinata libera φ;

6) le reazioni vincolari interne in G, in funzione della coordinata libera φ (solo 6 CFU);

6a) linearizzare l'equazione di Lagrange relativa a φ intorno alle configurazioni di equilibrio e determinare la pulsazione delle piccole oscillazioni (solo 9 CFU).

Tema del 16/07/2012



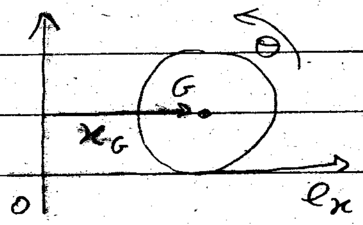
Cinematica

Il modello articolato ha 1 g.l., come si vede immediatamente congelando, ad esempio, il moto di rotolamento del disco. Possiamo scegliere, come coordinata libera, l'angolo φ compreso tra il versore $\vec e_x$ e il vettore $(B-A)$, $-\pi < \varphi \le \pi$.

Calcoliamo le velocità angolari dei 3 rigidi del modello.

(1.1) $\vec\omega^{(1)} = \dot\varphi\, \vec e_z \quad , \quad \vec\omega^{(2)} = -\dot\varphi\, \vec e_z$.

Per calcolare la velocità angolare del disco, introduciamo le coordinate sovrabbondanti (θ, x_G). Poiché il disco è soggetto al vincolo di puro rotolamento, vale che:



(1.2) $$\dot x_G = -R\dot\theta \quad \Rightarrow \quad \dot\theta = -\frac{\dot x_G}{R}$$

Inoltre,

(1.3) $$\vec x_G = \left(2L\cos\varphi\, \vec e_x + R\, \vec e_y\right) \Rightarrow \dot{\vec x}_G = -2L\sin\varphi\, \dot\varphi\, \vec e_x \Rightarrow \dot\theta = \frac{2L\sin\varphi}{R}\dot\varphi$$

quindi

(1.4) $$\vec\omega^{(3)} = \dot\theta\, \vec e_z = +\frac{2L}{R}\sin\varphi\, \dot\varphi\, \vec e_z$$

Statica

1) Le forze agenti, peso e forza elastica della molla con un estremo fisso, sono conservative. Quindi, la sollecitazione attiva ammette energia potenziale $V(\varphi)$.

(2.1) $$V(\varphi) = -m\vec{g}\cdot\vec{x}_D - m\vec{g}\cdot\vec{x}_E - M\vec{g}\cdot\vec{x}_G + \frac{1}{2}c\,(2L\cos\varphi)^2$$

(2.2) $$\vec{x}_D = \vec{x}_A + (\vec{x}_D - \vec{x}_A) = R\,\vec{e}_y + \frac{L}{2}(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)$$

$$\vec{x}_E = \vec{x}_D + (\vec{x}_D - \vec{x}_E) = \frac{L}{2}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \left(R + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\vec{e}_y + L\cos\varphi\,\vec{e}_x$$

$$\vec{x}_G = \vec{x}_A + (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = R\,\vec{e}_y + 2L\cos\varphi\,\vec{e}_x$$

$$V(\varphi) = +mg\vec{e}_y\cdot\left[\frac{L}{2}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \left(R+\frac{L}{2}\sin\varphi\right)\vec{e}_y + \frac{3}{2}L\cos\varphi\,\vec{e}_x + \left(R+\frac{L}{2}\sin\varphi\right)\vec{e}_y\right] +$$
$$+ Mg\,\vec{e}_y\cdot\left[\left(R\,\vec{e}_y + 2L\cos\varphi\,\vec{e}_x\right)\right] + 2cL^2\cos^2\varphi$$

$$= 2mg\left(R + \frac{L}{2}\sin\varphi\right) + \cancel{MgR} + 2cL^2\cos^2\varphi$$

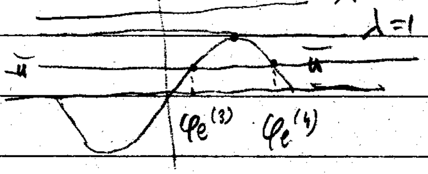
trascurando le costanti
$$= mgL\sin\varphi + 2cL^2\cos^2\varphi$$

Gli equilibri sono i punti stazionari di $V(\varphi)$. Poiché

$$V'(\varphi) = mgL\cos\varphi - 4cL^2\cos\varphi\sin\varphi = -Q_\varphi$$

gli equilibri sono le soluzioni di

$$L\cos\varphi\,(mg - 4cL\sin\varphi) = 0$$



$\cos\varphi = 0 \Leftarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ vel $\sin\varphi = \frac{mg}{4cL} = \lambda$

Equilibri

$\varphi_e^{(1)} = \pi/2$, $\varphi_e^{(2)} = -\pi/2$, $\varphi_e^{(3)} = \arcsin\lambda$, $\varphi_e^{(4)} = \pi - \varphi_e^{(3)}$

Per determinare la stabilità degli equilibri, calcoliamo $V''(\varphi)$.

$$V''(\varphi) = \frac{d}{d\varphi}V'(\varphi) = \frac{d}{d\varphi}\, 4cL^2\left(\frac{mg}{4cL}\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right) =$$

$$= \frac{d}{d\varphi}\left[4cL^2\left(\lambda\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right] = 4cL^2\left(-\lambda\sin\varphi - \cos 2\varphi\right)$$
$$= 4cL^2\left(-\lambda\sin\varphi - 1 + 2\sin^2\varphi\right)$$

Valutiamo $V''(\varphi)$ negli equilibri:

$$\varphi_e^{(1)}:\ V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4cL^2(1-\lambda) = \begin{cases} >0 & \text{se } \lambda<1 \Rightarrow \text{min} \Rightarrow \text{stabile} \\ =0 & \text{se } \lambda=1 \Rightarrow \text{dubbio} \\ <0 & \text{se } \lambda>1 \Rightarrow \text{max} \Rightarrow \text{instabile} \end{cases}$$

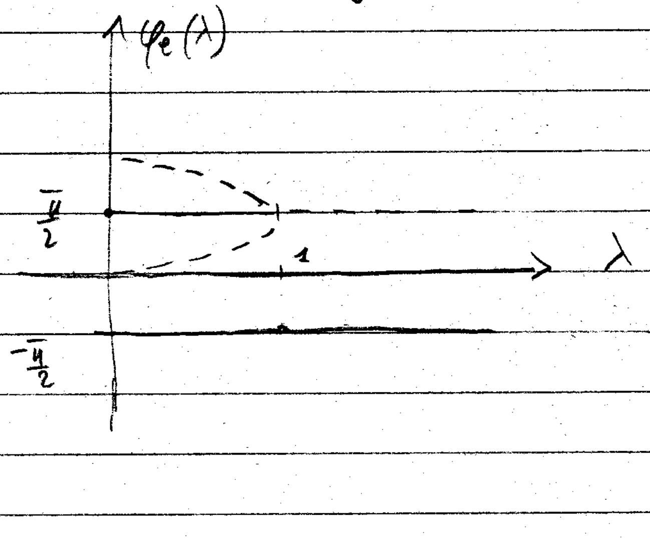
$$\varphi_e^{(2)}:\ V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4cL^2(1+\lambda) > 0 \Rightarrow \text{min} \Rightarrow \text{stabile}$$

$$\varphi_e^{(3)}:\ V''\left(\varphi_e^{(3)}\right) = 4cL^2\left(-\lambda^2 - 1 + 2\lambda^2\right) = 4cL^2\left(\lambda^2-1\right)$$

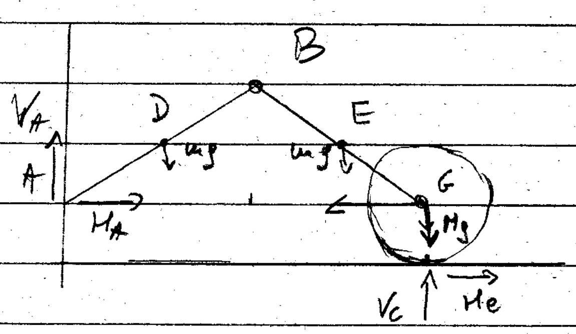
$$\begin{array}{ccccc} & -1 & & 1 & \\ + & | & - & | & + \quad \lambda \end{array}$$

$$\varphi_e^{(4)}:\ V''\left(\varphi_e^{(4)}\right) = V''\left(\varphi_e^{(3)}\right)$$

Vale il seguente diagramma di biforcazione:



2) Reazioni vincolari



Consideriamo tutto il modello e la sollecitazione esterna su di esso, osservando che la forza della molla fissata in G al disco e alla cerniera fissa esterna A è una forza esterna al modello. Scriviamo le ECS su tutto il modello

$$
(4.1)\quad
\begin{array}{l}
\vec{R}^{est}\cdot\vec{e}_x \\
\vec{R}^{est}\cdot\vec{e}_y \\
\vec{M}^{est}_A\cdot\vec{e}_z
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
H_A + H_e - 2cL\cos\varphi = 0 \\
V_A + V_c - 2mg - Mg = 0 \\
-mg\frac{L}{2}\cos\varphi - mg\frac{3}{2}L\cos\varphi - Mg\,2L\cos\varphi + V_c\,2L\cos\varphi = 0
\end{array}
\right.
$$

Poichè le incognite sono 4: (H_A, V_A, H_e, V_c) il sistema precedente non basta a trovarle. Scriviamo un'altra equazione su un componente rigido del modello, ad esempio la II ECS sul disco:

$$
(4.2)\quad \vec{M}_G^{est\,disco}\cdot\vec{e}_z \qquad H_c R = 0
$$

Allora, il sistema delle eq. (4.1) più la (4.2) forniscono

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
H_e = 0 & (4.2) \\
H_A = 2cL\cos\varphi_e & \\
V_A = (2m+M)g - V_e & \\
-\cancel{2}(m+M)g\cancel{L}\cos\varphi + V_c\cancel{2}\cancel{L}\cos\varphi = 0 &
\end{array}
\right.
$$

Dunque, le reazioni vincolari esterne nelle config. di equilibrio sono:

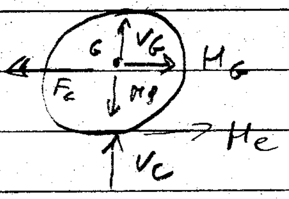
$\varphi_e^{(1)} = \frac{\pi}{2}$
$$\begin{cases} H_e = 0 \\ H_A = 0 \\ V_A + V_C = (2m+M)g \end{cases}$$
V_A e V_C: indeterminate (vincoli inefficaci)

$\varphi_e^{(2)} = -\frac{\pi}{2}$
$$\begin{cases} H_e = 0 \\ H_A = 0 \\ V_A + V_C = (2m+M)g \end{cases}$$
V_A e V_C indeterminate (vincoli inefficaci)

$\varphi_e^{(3)} = \arcsin \lambda$
$$\begin{cases} H_c = 0 \\ H_A = 2cL\sqrt{1-\lambda^2} \\ V_C = (m+M)g \\ V_A = mg \end{cases}$$

$\varphi_e^{(3)} = \pi - \varphi_e^{(3)}$
$$\begin{cases} H_e = 0 \\ H_A = -2cL\sqrt{1-\lambda^2} \\ V_C = (m+M)g \\ V_A = mg \end{cases}$$

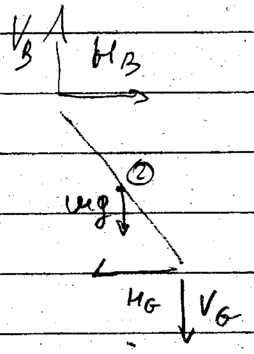
3) Reazioni interne in G e in B



$$\vec{R}^{ext\to disco}\cdot\vec{e}_x \quad \cancel{H_C} + H_G - F_G = 0$$

$$\vec{R}^{ext\to disco}\cdot\vec{e}_y \quad V_C + V_G - Mg = 0$$

$$\begin{cases} H_G = F_G = 2cL\cos\varphi_e \\ V_G = Mg - V_C \end{cases}$$



$$\vec{R}^{ext\to 2}\cdot\vec{e}_x \quad H_B - H_G = 0$$

$$\vec{R}^{ext\to 2}\cdot\vec{e}_y \quad V_B - V_G - mg = 0$$

Allora

$$\begin{cases} H_G = 2cL\cos\varphi_e \\ V_G = Mg - V_C \\ H_B = 2cL\cos\varphi_e \\ V_B = Mg - V_C + mg = (M+m)g - V_C \end{cases}$$

Dunque

$\varphi_e^{(1)} = \frac{\pi}{2}$ $\quad H_G = H_B = 0 \quad$ V_B e V_G indeterminate

$\varphi_e^{(2)} = -\frac{\pi}{2}$ $\quad H_G = H_B = 0 \quad$ V_B e V_G indeterminate

$\varphi_e^{(3)} = \arcsin\lambda$ $\quad H_G = H_B = 2cL\sqrt{1-\lambda^2}, \quad V_G = -mg, \quad V_B = 0$

$\varphi_e^{(4)} = \pi - \varphi_e^{(3)}$ $\quad H_G = H_B = -2cL\sqrt{1-\lambda^2}, \quad V_G = -mg, \quad V_B = 0$

Dinamica

4) Scriviamo la EL relativa alla coordinata φ.

A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)}$$

(7.1) $$K^{(1)} = \frac{1}{2} I_A^{(1)} \|\vec{\omega}^{(1)}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m L^2 \dot{\varphi}^2\right)$$

(7.2) $$K^{(2)} = \frac{1}{2} m \|\vec{V}_E\|^2 + \frac{1}{2} I_E^{(2)} \|\vec{\omega}^{(2)}\|^2 \qquad I_E = \frac{1}{12} m L^2$$

(7.3) $$\vec{V}_E = \dot{\vec{x}}_E = \left(-\frac{3}{2} L \sin\varphi \dot{\varphi} \vec{e}_x + \frac{L}{2} \cos\varphi \dot{\varphi} \vec{e}_y\right)$$

$$\|\vec{V}_E\|^2 = \left(-\frac{3}{2} L \sin\varphi \dot{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{L}{2} \cos\varphi \dot{\varphi}\right)^2 =$$

$$= \frac{9}{4} L^2 \sin^2\varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4} \cos^2\varphi \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{4} L^2 \dot{\varphi}^2 \left(1 + 8 \sin^2\varphi\right)$$

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{4} L^2 \dot{\varphi}^2 \left(1 + 8 \sin^2\varphi\right)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2\right) \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{1}{3} + 2 \sin^2\varphi\right) \dot{\varphi}^2$$

(8.1) $K^{(3)} = \frac{1}{2} M \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} I_G^{(3)} \|\vec{\omega}^{(3)}\|^2 \qquad I_G^{(3)} = \frac{1}{2} M R^2$

(8.2) $\vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G = -2L \sin\varphi \dot{\varphi} \vec{e}_x$

$\|\vec{v}_G\|^2 = 4L^2 \sin^2\varphi \dot{\varphi}^2 \quad , \quad \|\vec{\omega}_3\|^2 \overset{(1.4)}{=} \frac{4L^2}{R^2} \sin^2\varphi \dot{\varphi}^2$

Quindi

(8.3) $K^{(3)} = \frac{1}{2} M \left(4L^2 \sin^2\varphi \dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2\right) \frac{4L^2}{R^2} \sin^2\varphi \dot{\varphi}^2$

$= \frac{1}{2} M L^2 (6 \sin^2\varphi) \dot{\varphi}^2$

Allora

(8.4) $K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m L^2 \dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{1}{3} + 2\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M L^2 (6 \sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2$

$= \left[\frac{1}{3} m + (m + 3M)\sin^2\varphi\right] L^2 \dot{\varphi}^2$

Eq. di Lagrange

$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = 2\left[\frac{1}{3} m + (m+3M)\sin^2\varphi\right] L^2 \dot{\varphi}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2\left[(m+3M) 2 \sin\varphi \cos\varphi\right] L^2 \dot{\varphi}^2 + 2\left[\frac{1}{3} m + (m+3M)\sin^2\varphi\right] L^2 \ddot{\varphi}$

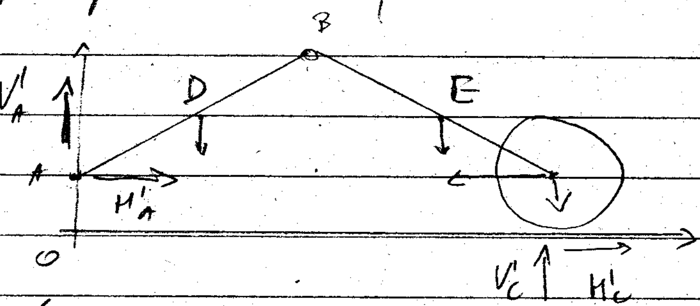
$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 2 (m+3M) \sin\varphi \cos\varphi L^2 \dot{\varphi}^2$

EL:

(8.5) $2\left[\frac{1}{3} m + (m+3M)\sin^2\varphi\right] L^2 \ddot{\varphi} + \left[(m+3M)\sin 2\varphi\right] L^2 \dot{\varphi}^2 = -mgL\cos\varphi + 2cL^2 \sin 2\varphi$

5) reazioni esterne dinamiche in A e C, in funzione di φ

incognite (H'_A, V'_A, H'_C, V'_C)



ECD sul modello + II ECD sul disco

$$
\begin{array}{ll}
\vec{R}^{ext}\cdot\vec{e}_x & \\
\vec{R}^{ext}\cdot\vec{e}_y \quad (9.1) & \\
\vec{M}^{ext}_A\cdot\vec{e}_z & \\
\vec{M}^{ext\to disco}_G\cdot\vec{e}_z &
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
H'_A+H'_C-2cL\cos\varphi=\left(m\vec{a}_D+m\vec{a}_E+M\vec{a}_G\right)\cdot\vec{e}_x\\
V'_A+V'_C-(2m+M)g=\left(m\vec{a}_D+m\vec{a}_E+M\vec{a}_G\right)\cdot\vec{e}_y\\
\left(-2mg-2Mg+2V'_C\right)L\cos\varphi+H'_C R=\dfrac{d\vec{L}_A}{dt}\cdot\vec{e}_z\\
\vec{M}_G\cdot\vec{e}_z=\dfrac{d\vec{L}_G}{dt}\cdot\vec{e}_z
\end{array}\right.
$$

$$\vec{a}_D=\ddot{\vec{x}}_D\overset{(1.2)}{=}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{L}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x+\sin\varphi\,\vec{e}_y\right)\right]=\frac{L}{2}\frac{d}{dt}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_x+\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y\right)$$

$$=\frac{L}{2}\left[\left(-\sin\varphi\,\ddot{\varphi}-\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_x+\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi}-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_y\right]$$

$$\vec{a}_E=\dot{\vec{v}}_E\overset{(7.3)}{=}-\frac{3}{2}L\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi}+\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_x+\frac{L}{2}\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi}-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{a}_G=\dot{\vec{v}}_G\overset{(8.2)}{=}-2L\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi}+\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_x$$

$$\vec{L}_A=\vec{L}_A^{(1)}+\vec{L}_A^{(2)}+\vec{L}_A^{(3)}$$

$$\vec{L}_A^{(1)}=I_A^{(1)}\vec{\omega}^{(1)}=\frac{1}{3}mL^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{L}_A^{(2)}=\vec{L}_E^{(2)}+\left(\vec{x}_E-\vec{x}_A\right)\times m\vec{V}_E$$

$$\vec{L}_E^{(2)}=I_E^{(2)}\vec{\omega}^{(2)}=\frac{1}{12}mL^2\left(-\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\right)$$

$$\left(\vec{x}_E-\vec{x}_A\right)\times m\vec{V}_E=m\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{3}{2}L\cos\varphi & \frac{L}{2}\sin\varphi & 0\\ -\frac{3}{2}L\sin\varphi\,\dot{\varphi} & \frac{L}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi} & 0\end{vmatrix}=\vec{e}_z m\left(\frac{3}{4}L^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}+\frac{3}{4}L^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}mL^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

Quindi

(10.1) $$\vec{L}_A^{(2)} = \left(\frac{-9}{12} + \frac{3}{4}\right) m L^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z = \frac{2}{3} m L^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

$$\vec{L}_A^{(3)} = \vec{L}_G^{(3)} + \cancel{(\vec{x}_G - \vec{x}_A) \times M \cdot \vec{V}_G} \quad \text{poiché } (\vec{x}_G - \vec{x}_A) \parallel \vec{V}_G$$

(10.2) $$\vec{L}_G^{(3)} = I_G^{(3)} \vec{\omega}^{(3)} \overset{(1.4)}{=} \left(\frac{1}{2} M R^2\right) \frac{2L}{R} \sin\varphi\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

$$= M R L \sin\varphi\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

Dunque

$$\vec{L}_A = \frac{1}{3} m L^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z + \frac{2}{3} m L^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z + M R L \sin\varphi\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

(10.3) $$= \left(m L^2 + M R L \sin\varphi\right) \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \left[M R L \left(\sin\varphi\, \ddot{\varphi} + \cos\varphi\, \dot{\varphi}^2\right) + M L^2 \ddot{\varphi}\right] \vec{e}_z$$

Quindi, il sistema (9.1) diventa

(10.4) $$\begin{cases} H'_A + H'_C - 2cL\cos\varphi \quad - 2mL\left(\sin\varphi\, \ddot{\varphi} + \cos\varphi\, \dot{\varphi}^2\right) - 2ML\left(\sin\varphi\, \ddot{\varphi} + \cos\varphi\, \dot{\varphi}^2\right) \\ V'_A + V'_C = (2m + M) g + mL\left(\cos\varphi\, \ddot{\varphi} - \sin\varphi\, \dot{\varphi}^2\right) \\ 2V'_C L\cos\varphi + H'_C R = 2(m+M) g L\cos\varphi + MRL\left(\frac{L}{R}\ddot{\varphi} + \sin\varphi\, \ddot{\varphi} + \cos\varphi\, \dot{\varphi}^2\right) \\ H'_C R = MLR \sin\varphi\, \ddot{\varphi} \quad + MRL\cos\varphi\, \dot{\varphi}^2 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si trovano le reazioni vincolari in funzione di $(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$. Per eliminare la dipendenza da $(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ bisogna utilizzare l'EL e un integrale primo di moto: l'energia meccanica.

Infatti, il modello è una macchina semplice con vincoli non dissipativi e fissi, quindi vale il Teo di conservazione dell'energia meccanica. 11
Allora

(11.1) $$E(t)=E_0 = K+V = \left[\frac{1}{3}m + (m+3M)\sin^2\varphi\right] L^2\dot{\varphi}^2 + mgL\sin\varphi + 2cL^2\cos^2\varphi$$

e

(11.2) $$\dot{\varphi}^2 = \frac{E_0 - \left(mgL\sin\varphi + 2cL^2\cos^2\varphi\right)}{\left[\frac{1}{3}m + (m+3M)\sin^2\varphi\right]L^2} = f(\varphi)$$

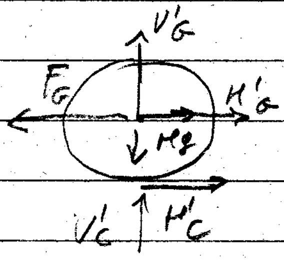
Sostituendo la (11.2) nella EL (8.5) si ricava

(11.3) $$\ddot{\varphi} = g(\varphi)$$

Per finire, sostituendo la (11.2) e la (11.3) nel sistema (10.4) e risolvendo rs. alle incognite (H'_A, V'_A, H'_C, V'_C) si trova la risposta alla domanda (5).

6) Reazioni vincolari dinamiche in G, in funzione di φ.

Scriviamo la I ECD nel disco



$$\begin{cases} H'_C + H'_G - F_G = M\,\vec{a}_G \cdot \vec{e}_x \\ V'_C + V'_G - Mg = \cancel{M\,\vec{a}_G \cdot \vec{e}_y} \end{cases}$$

(11.4) $$\begin{cases} H'_G = -H'_C + 2cL\cos\varphi - 2L\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right) \\ V'_G = -V'_C + Mg \end{cases}$$

Sostituendo in (11.4) le soluzioni del punto 5) per H'_C e V'_C e sostituendo la (112) e la (113) a $\dot{\varphi}$ e $\ddot{\varphi}$ si trova la risposta.

7) Linearizzazione dell'EL intorno agli equilibri

Per una macchina semplice a vincoli fissi e non dissipativi, l'EL linearizzata intorno alle configurazioni di equilibrio è

$$a(q_e)\,\ddot{\xi} + V''(q_e)\,\xi = 0 \qquad \xi := q - q_e$$

In questo caso: $\xi := \varphi - \varphi_e$

$$a(q_e) = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^2}\Big|_{q_e} \overset{(8.4)}{=} 2\left[\frac{1}{3}m + (m+3M)\sin^2\varphi_e\right]L^2$$

$$V''(q_e) = 4cL^2\left(2\sin^2\varphi_e - \lambda\sin\varphi_e - 1\right)$$

Allora

$$\varphi_e^{(1)} = \frac{\pi}{2}: \quad \cancel{2}\left(\frac{1}{3}m + (m+3M)\right)\cancel{L^2}\,\ddot{\xi} + \overset{2}{\cancel{4}}c\cancel{L^2}(1-\lambda)\,\xi = 0$$

se $\lambda < 1$ i moti sono oscillatori di pulsazione

$$\nu^{(1)} = \sqrt{\frac{2c\,(1-\lambda)}{\frac{1}{3}m + (m+3M)}}$$

se $\lambda = 1$ i moti sono lineari

se $\lambda > 1$ i moti sono iperbolici

$\varphi_e^{(2)} = -\frac{\pi}{2}$: $\left[\frac{1}{3}m + (m+3M)\right]\ddot{\xi} + 2c\,(1+\lambda)\,\xi = 0,$

poiché $\lambda > 0$ i moti sono sempre oscillatori di pulsazione

$$\nu^{(2)} = \sqrt{\frac{2c\,(1+\lambda)}{\frac{1}{3}m + (m+3M)}}$$

$\varphi_e^{(3)}$ e $\varphi_e^{(4)}$: $\left[\frac{1}{3}m + (m+3M)\lambda^2\right]\ddot{\xi} - 2c\,(1-\lambda^2)\,\xi = 0,$

poiché in questi equilibri $\lambda < 1$, i moti sono sempre iperbolici.