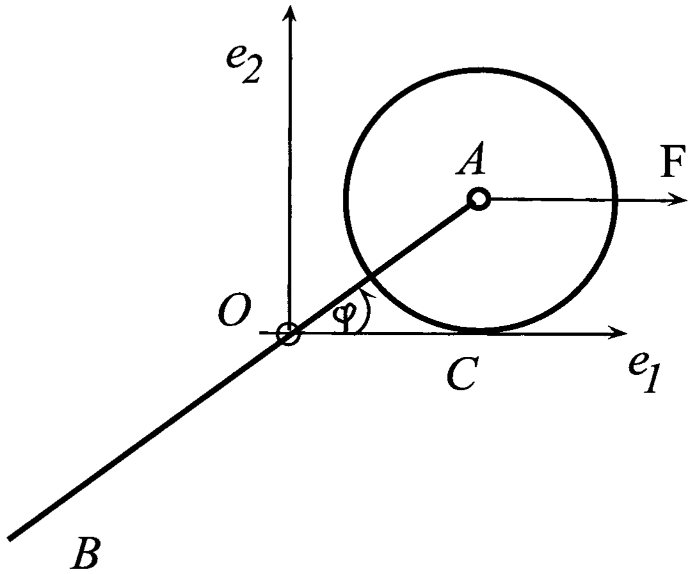
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 17 settembre 2012

(G. Tondo)



Si consideri il sistema di figura costituito da un disco omogeneo di massa $4m$ e raggio R, che rotola senza strisciare su una guida orizzontale fissa, e da un'asta omogenea di lunghezza $L \gg R$ e massa m, incernierata nel centro A del disco e vincolata a passare per l'anellino liscio e fisso in O. Il modello, posto nel piano verticale passante per la guida, è soggetto al peso proprio e alla forza uniforme di componente F, applicata al centro del disco A e parallela alla guida.

STATICA.

Calcolare:

1) Il valore di F che rende possibile l'equilibrio in $\varphi = \pi/3$ e la stabilità del suddetto equilibrio.

Da ora in poi, assegnato ad F il valore trovato al punto 1), calcolare:

2) le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto C di contatto con la guida;

3) le reazioni vincolari esterne nel punto dell'asta che passa per l'anellino O.

DINAMICA.

4) Scrivere un' equazione differenziale pura di moto;

5) calcolare le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto C di contatto con la guida e nel punto dell'asta che passa per l'anellino O, in funzione di φ durante un moto generico;

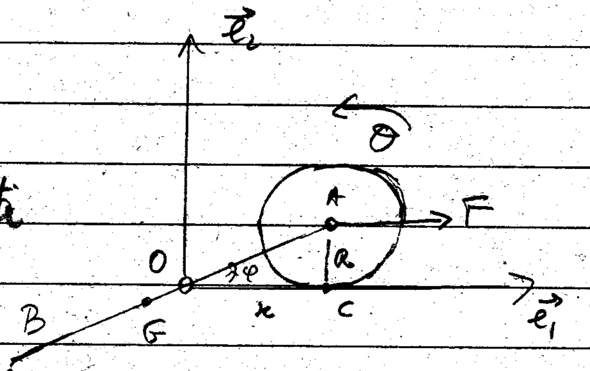
6) (solo 6 CFU) le reazioni vincolari interne sul disco in A, in funzione di φ, durante il moto di condizioni iniziali

$$\varphi = \frac{\pi}{3}\ , \qquad \dot{\varphi} = \omega_0\ ;$$

6a) (solo 9 CFU) linearizzare l'equazione di Lagrange intorno alla configurazione di equilibrio del punto 1) e calcolare la pulsazione delle piccole oscillazioni.

Tema del 17/09/2012

Cinematica



Utilizzando il metodo dei congelamenti successivi è immediato concludere che il modello ha 1 g.l. Infatti, congelando l'unico spostamento virtuale del disco, viene congelata anche l'asta. Come coordinata libera scegliamo l'angolo φ compreso tra l'asse di versore $\vec{e}_1$ e l'asta. A causa dei vincoli del modello:

$$0 < \varphi < \pi$$

Detta x l'ascissa del punto A, sarà

$$(1.1) \quad x = R \cot g\, \varphi \,, \quad \dot{x} = -\frac{R}{\sin^2\varphi}\dot{\varphi}, \quad \ddot{x} = -R\left(-\frac{2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\dot{\varphi}^2 + \frac{\ddot{\varphi}}{\sin^2\varphi}\right)$$

Quindi:

$$(1.2) \quad A-O = R\left(\cot g\,\varphi\, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\right), \quad \vec{v}_A = -\frac{R}{\sin^2\varphi}\dot{\varphi}\,\vec{e}_1, \quad \vec{a}_A = R\left(\frac{2\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - \sin\varphi\,\ddot{\varphi}}{\sin^3\varphi}\right)\vec{e}_1$$

Detto G il baricentro dell'asta, risulta

$$(1.3) \quad G-O = (G-A)+(A-O) = -\frac{L}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right) + R\left(\cot g\,\varphi\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) =$$
$$= \left(R\cot g\,\varphi - \frac{L}{2}\cos\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(R - \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\vec{e}_2$$

$$(1.4) \quad \vec{v}_G = \left(-\frac{R}{\sin^2\varphi} + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\dot{\varphi}\,\vec{e}_1 - \frac{L}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_2$$

Dal vincolo di puro rotolamento, segue che, detto θ l'angolo di rotazione del disco:

$$(1.5) \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{x}}{R} = \frac{\dot{\varphi}}{\sin^2\varphi}$$
$$\vec{\omega}^{(disco)} = \dot{\theta}\,\vec{e}_3 = \frac{\dot{\varphi}}{\sin^2\varphi}\,\vec{e}_3.$$

Inoltre, la velocità angolare dell'asta è data da

$$(2.1) \qquad \vec{\omega}^{(asta)} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 .$$

Statica

Il problema è inverso. La sollecitazione attiva è conservativa poiché la forza $\vec{F}_A$ è uniforme (cioè non dipende dalla configurazione del modello). Dunque, ammette energia potenziale data da

$$V(\varphi) = -\vec{F}\cdot\vec{x}_A - 4m\vec{g}\cdot\vec{x}_A - m\vec{g}\cdot\vec{x}_G$$

$$= -F\vec{e}_1\cdot R(\cot\varphi\,\vec{e}_1+\vec{e}_2) + 4mg\vec{e}_2\cdot R(\cot\varphi\,\vec{e}_1+\vec{e}_2) + mg\vec{e}_2\cdot\left[\left(R\cot\varphi-\frac{L}{2}\cos\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(R-\frac{L}{2}\sin\varphi\right)\vec{e}_2\right]$$

$$= -FR\cot\varphi + 4mgR + mg\left(R-\frac{L}{2}\sin\varphi\right)$$

Richiediamo che la configurazione $\varphi = \frac{\pi}{3}$ sia un punto stazionario della funzione $V(\varphi)$. A tale scopo, calcoliamo

$$V'(\varphi) = -FR\left(-\frac{1}{\sin^2\varphi}\right) - mg\frac{L}{2}\cos\varphi = -Q_\varphi$$

e imponiamo che valga

$$V'\left(\varphi=\frac{\pi}{3}\right)=0 \iff FR\frac{4}{3} - mg\frac{L}{2}\frac{1}{2} = 0 \Leftarrow \boxed{F = \frac{3}{16}\frac{mgL}{R}}$$

Quindi, se

$$F = \frac{3}{16}\,m\frac{gL}{R}$$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$ è una configurazione di equilibrio del modello.

Stabilità

Calcoliamo la derivata seconda di $V'(\varphi)$.

$$V''(\varphi) = FR\left(\frac{-2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right) + mg\frac{L}{2}\sin\varphi$$

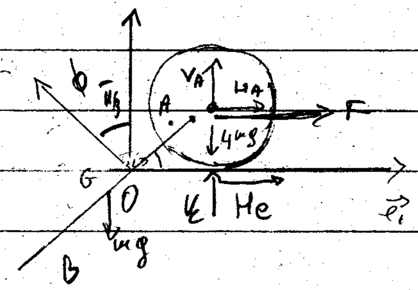
$$V''\left(\frac{\pi}{3}\right) = FR\left(\frac{-\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}\right) + mg\frac{L}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\cancel{3}}{\cancel{16}_2}\,\frac{mgL}{\cancel{R}}\,\cancel{R}\,\frac{8}{\cancel{3}\sqrt{3}} + \frac{mgL\sqrt{3}}{4} = mgL\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = mgL\left(\frac{-\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) > 0$$

La configurazione $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ è un minimo di $V(\varphi)$, quindi è una configurazione di equilibrio stabile.

2), 3) Reazioni vincolari in C sul disco e in O sull'asta.

Calcoliamo il momento delle forze esterne sul disco rispetto al polo A e il risultante delle forze esterne a tutto il modello, tenendo conto che la reazione sull'asta in O è ortogonale all'asta.



$$\begin{cases} \vec{M}_A^{(disco)} \cdot \vec{e}_3: & H_C R = 0 \\ \vec{R}\cdot\vec{e}_1: & -\phi \sin\frac{\pi}{3} + F + H_C = 0 \\ \vec{R}\cdot\vec{e}_2: & \phi\cos\frac{\pi}{3} + V_C - 5mg = 0 \end{cases}$$

$H_C = 0$

$\phi = \frac{2}{\sqrt{3}}F = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\,\frac{3}{\cancel{16}_8}\,\frac{mgL}{R} = \frac{\sqrt{3}}{8}\,\frac{mgL}{R}$

$V_C = 5mg - \frac{\phi}{2} = \left(5mg - \frac{\sqrt{3}}{16}\,\frac{mgL}{R}\right) = \left(5 - \frac{\sqrt{3}}{16}\,\frac{L}{R}\right)mg$

Dinamica

Scriviamo l'eq. di Lagrange relativa a φ. A tale scopo, determiniamo l'energia cinetica del modello.

$$K = K^{(d)} + K^{(a)}$$

$$K^{(d)} = \frac{1}{2} 4m |\vec{v}_A|^2 + \frac{1}{2} J_A |\vec{\omega}^{(d)}|^2 \qquad J_A = \frac{1}{2}(4m)R^2$$

Dalla (1.2) e (1.5) segue

$$K^{(d)} = \frac{1}{2}\left[\left(4m \frac{R^2 \dot{\varphi}^2}{\sin^4\varphi}\right) + 2mR^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\sin^4\varphi}\right] = 3 \, m R^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\sin^4\varphi}$$

$$K^{(a)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} J_G |\vec{\omega}^{(a)}|^2 \qquad J_G = \frac{1}{12} m L^2$$

Dalla (1.4) segue che

$$|\vec{v}_G|^2 = \left(-\frac{R}{\sin^2\varphi} + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)^2 \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{L}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{R^2}{\sin^4\varphi} + \frac{L^2}{4}\sin^2\varphi - \frac{RL}{\sin\varphi}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2$$

$$= \left(\frac{R^2}{\sin^4\varphi} - \frac{RL}{\sin\varphi} + \frac{L^2}{4}\right)\dot{\varphi}^2$$

Quindi

$$K^{(a)} = \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2}{\sin^4\varphi} - \frac{RL}{\sin\varphi} + \frac{L^2}{4}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2}{\sin^4\varphi} - \frac{RL}{\sin\varphi} + \frac{L^2}{3}\right)\dot{\varphi}^2$$

e l'energia cinetica del modello risulta

$$K = 3mR^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\sin^4\varphi} + \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2}{\sin^4\varphi} - \frac{RL}{\sin\varphi} + \frac{L^2}{3}\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{7R^2}{\sin^4\varphi} - \frac{RL}{\sin\varphi} + \frac{L^2}{3}\right)\dot{\varphi}^2$$

Allora

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = m\left(\frac{7R^2}{\sin^4\varphi} - \frac{RL}{\sin\varphi} + \frac{L^2}{3}\right)\dot\varphi$$

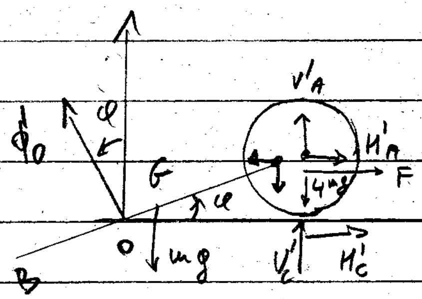
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = m\left(-\frac{28R^2}{\sin^5\varphi}\cos\varphi\,\dot\varphi + \frac{RL}{\sin^2\varphi}\cos\varphi\,\dot\varphi\right)\dot\varphi + m\left(\frac{7R^2}{\sin^4\varphi} - \frac{RL}{\sin\varphi} + \frac{L^2}{3}\right)\ddot\varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}m\left(-\frac{28R^2}{\sin^5\varphi}\cos\varphi + \frac{RL}{\sin^2\varphi}\cos\varphi\right)\dot\varphi^2$$

Dunque, l'eq. di Lagrange associata a φ è

$$(5.1)\quad m\left(\frac{7R^2}{\sin^4\varphi} - \frac{RL}{\sin\varphi} + \frac{L^2}{3}\right)\ddot\varphi + \frac{1}{2}m\left(-\frac{28R^2}{\sin^5\varphi} + \frac{RL}{\sin^2\varphi}\right)\cos\varphi\,\dot\varphi^2 = \frac{mgL}{2}\left(\cos\varphi - \frac{3}{8\sin^3\varphi}\right)$$

5) Reazioni dinamiche in C ed O



Procedendo analogamente alla Statica

$$\begin{cases} \vec{M}_A^{(disco)} \cdot \vec{e}_3 = \dfrac{d}{dt}\vec{L}_A^{(d)} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_1 = \left(m\vec{a}_G + 4m\vec{a}_A\right) \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_2 = \left(m\vec{a}_G + 4m\cancel{\vec{a}_A}\right) \cdot \vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\vec{L}_A^{(disco)} = \mathbb{I}_A\left(\vec{\omega}^{(d)}\right) = J_A\frac{\dot\varphi}{\sin^2\varphi}\vec{e}_3 = 2mR^2\frac{\dot\varphi}{\sin^2\varphi}\vec{e}_3$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_A^{(disco)}\right) = 2mR^2\left(\frac{\ddot\varphi}{\sin^2\varphi} - 2\frac{\cos\varphi\,\dot\varphi^2}{\sin^3\varphi}\right)$$

Dalle (1.2) e (1.4) segue che

$$\vec{a}_P = R\left(\frac{2\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - \sin\varphi\,\ddot{\varphi}}{\sin^3\varphi}\right)\vec{e}_1,$$

$$(6.1)\quad \vec{a}_G = \left[\left(+\frac{2R}{\sin^3\varphi}\cos\varphi + \frac{L}{2}\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{-R}{\sin^2\varphi} + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\ddot{\varphi}\right]\vec{e}_1 - \frac{L}{2}\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_2$$

Dunque,

$$\begin{cases} H'_C R = 2mR^2\left(\dfrac{\ddot{\varphi}}{\sin^2\varphi} - \dfrac{2\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2}{\sin^3\varphi}\right) \\ -\phi'\sin\varphi + F + H'_C = m\left[\left(\dfrac{2R}{\sin^3\varphi}\cos\varphi + \dfrac{L}{2}\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \left(\dfrac{-R}{\sin^2\varphi} + \dfrac{L}{2}\sin\varphi\right)\ddot{\varphi}\right] + \\ \qquad + 4mR\left(\dfrac{2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\dot{\varphi}^2 - \dfrac{\ddot{\varphi}}{\sin^2\varphi}\right) \\ \phi'\cos\varphi + V'_C - 5mg = -m\dfrac{L}{2}\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right) \end{cases}$$

cioè

$$(6.2)\quad \begin{cases} H'_C = 2mR\left(\dfrac{\ddot{\varphi}}{\sin^2\varphi} - \dfrac{2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\dot{\varphi}^2\right) \\ \phi'\sin\varphi = F + H'_C - m\left[\left(\dfrac{10R\cos\varphi}{\sin^3\varphi} + \dfrac{L}{2}\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \left(-\dfrac{5R}{\sin^2\varphi} + \dfrac{L}{2}\sin\varphi\right)\ddot{\varphi}\right] \\ V'_C = 5mg - \phi'\cos\varphi - \dfrac{mL}{2}\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right) \end{cases}$$

Il sistema (6.2) è un sistema lineare nelle 3 incognite (H'_C, V'_C, ϕ') che, risolto, fornisce la soluzione in funzione di $(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$. Per rispondere alla domanda del Compito, bisogna esprimere $\dot{\varphi}$ e $\ddot{\varphi}$ in funzione di φ. A tale scopo, utilizziamo l'integrale primo dell'energia meccanica, la quale si conserva poiché il modello è una macchina semplice a vincoli lisci e fissi e sollecitazione esterna indipendente dal tempo. Allora,

$$E = K + V = E_{|t=0}$$

cioè

(7.1) $$\frac{1}{2} m\left(\frac{7R^2}{\sin^4\varphi} - \frac{RL}{\sin\varphi} + \frac{L^2}{3}\right)\dot\varphi^2 - FR\cot\varphi - mg\frac{L}{2}\sin\varphi = E_0$$

dove

$$E_0 := E_{|t=0} = -FR\cot\varphi_0 - mg\frac{L}{2}\sin\varphi_0 .$$

Dalla (7.1) si può ricavare

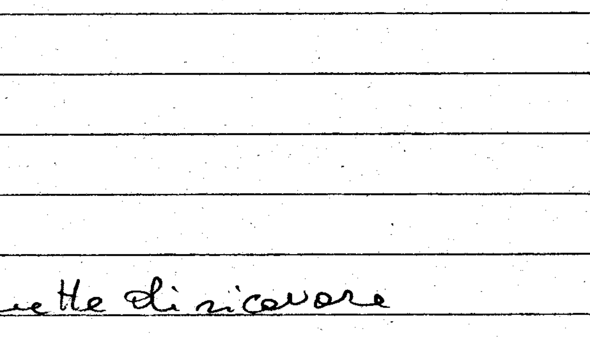
(7.2) $$\dot\varphi^2 = f(\varphi),$$

che, sostituita nella EL (5.1) permette di ricavare

(7.3) $$\ddot\varphi = g(\varphi).$$

Sostituendo la (7.2) e la (7.3) nella soluzione del sistema (6.2), si ottiene la risposta.

6) Una volta risolto il punto 5) e trovata la reazione sul disco in C (H'_C, V'_C), si può scrivere la I ECD sul solo disco per ricavare le reazioni interne sul disco in A.



$$\begin{cases} \vec{R}^{(disco)} \cdot \vec{e}_1 = 4m\, \vec{a}_A \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{R}^{(disco)} \cdot \vec{e}_2 = 4m\, \cancel{\vec{a}_A \cdot \vec{e}_2} \end{cases}$$

(7.4) $$\begin{cases} H'_A + H'_C + F = 4mR\left(\dfrac{2\cos\varphi\,\dot\varphi^2}{\sin^3\varphi} - \dfrac{\ddot\varphi}{\sin^2\varphi}\right) \\ V'_A + V'_C + 4mg = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema (7.4) rs. ai (H'_A, V'_A) e sostituendo al II termine della (7.4a) la (7.2) e la (7.3), valutate su

$$E_{|t=0} = \frac{1}{2} m\left(\frac{7R^2}{\sin^4\frac{\pi}{3}} - \frac{RL}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{L^2}{3}\right)\omega_0^2 - FR\cot\frac{\pi}{3} - mg\frac{L}{2}\frac{\pi}{3},$$

si ottiene la risposta.

5a) Linearizzazione intorno a $\varphi_e = \frac{\pi}{3}$

Poiché il modello è una macchina semplice conservativa, l'equazione di Lagrange linearizzata intorno alle configurazioni di equilibrio, si scrive

$$a\ddot{\xi} + v\xi = 0$$

dove $\xi = \frac{\varphi - \varphi_e}{\varepsilon}$, $a = \left.\frac{d^2 K}{d\dot{q}^2}\right|_{\varphi=\varphi_e}$, $v = V''(\varphi_e)$

In questo caso,

$$\varepsilon\xi = \varphi - \frac{\pi}{3}, \quad a = m\left(\frac{7R^2}{\sin^4\frac{\pi}{3}} - \frac{RL}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{L^2}{3}\right) = m\left(\frac{7R^2 16}{9} - \frac{RL\,2}{\sqrt{3}} + \frac{L^2}{3}\right)$$

$$= \frac{mL^2}{3}\left(\frac{112}{3}\frac{R^2}{L^2} - 6\frac{R}{L} + 1\right) > 0$$

$$v = V''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{mgL\sqrt{3}}{12} > 0$$

Quindi, l'eq. linearizzata è

$$\frac{mL^2}{3}\left(\frac{112}{3}\frac{R^2}{L^2} - 6\frac{R}{L} + 1\right)\ddot{\xi} + mgL\frac{\sqrt{3}}{12}\xi = 0.$$

Le soluzioni sono oscillatorie del tipo

$$\xi(t) = A\cos(\nu t + \alpha)$$

con pulsazione ν pari a

$$\nu = \sqrt{\frac{mgL\sqrt{3}}{12}\,\frac{1}{\frac{mL^2}{3}\left(\frac{112}{3}\frac{R^2}{L^2} - 6\frac{R}{L} + 1\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{L}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{1}{\frac{112}{3}\frac{R^2}{L^2} - 6\frac{R}{L} + 1}}$$