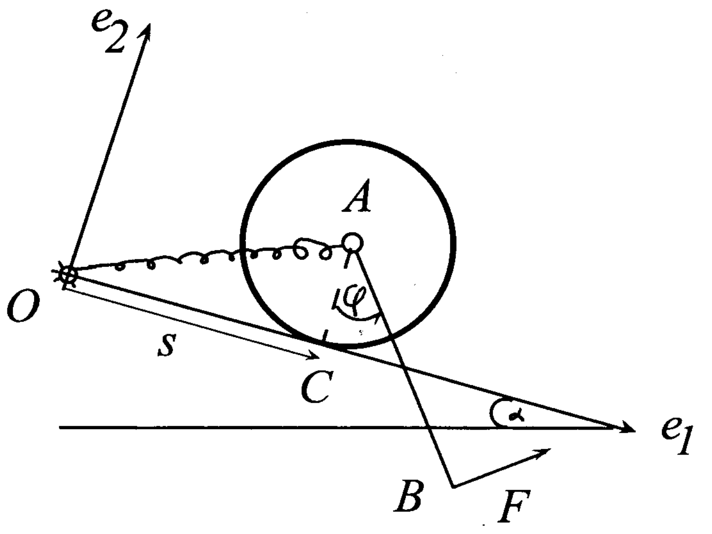
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 18 febbraio 2013

(G. Tondo)



Si consideri il sistema di figura costituito da un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio R, che rotola senza strisciare su una guida fissa e inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo α. Al centro del disco A è incernierata un'asta omogenea di lunghezza L e massa m. Il modello, posto nel piano verticale passante per la guida, è soggetto al peso proprio, alla forza della molla di costante elastica c, fissata al centro del disco e nel punto fisso O, alla forza F applicata all'estremo B dell'asta e sempre ortogonale all'asta.

STATICA.

Determinare:

1) le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema;

2) le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto C di contatto con la guida;

3) le reazioni vincolari interne sul disco nel centro A.

DINAMICA.

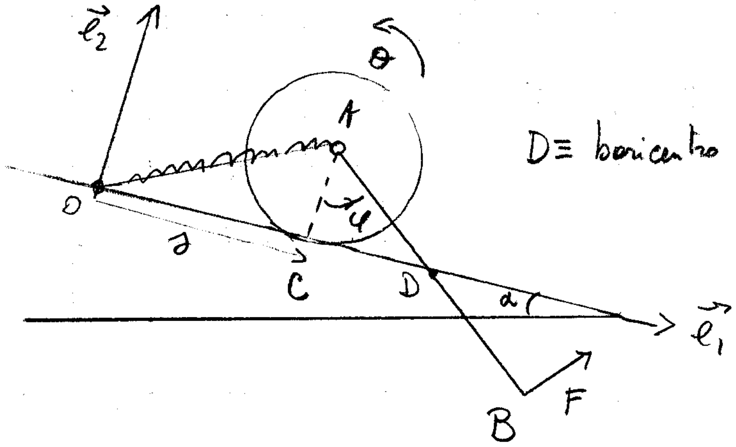
4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto;

5) calcolare le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto C di contatto con la guida, durante i moti;

6) le reazioni vincolari interne sul disco nel centro A, durante i moti; (solo 6 CFU)

6a) linearizzare le equazioni del punto **4)** intorno alle configurazioni di equilibrio (solo 9 CFU).

Tema del 18/02/2013



D ≡ baricentro dell'asta

Cinematica

Il modello ha 2 g.l., come si desume con il metodo dei congelamenti successivi. Scegliamo come coordinate libere l'ascissa del centro del disco A (coincidente con quella del punto di contatto C) e l'angolo formato dal versore $(-\vec{e}_2)$ e dal versore dell'asta vers(B-A),

$$(s, \varphi) \qquad s \in \mathbb{R}, \ -\pi < \varphi \leq \pi$$

Ricordiamo che, introducendo come coordinata sovrabbondante l'angolo di rotazione del disco θ, dal vincolo di puro rotolamento segue che

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{s}}{R} \Rightarrow \vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_3 = -\frac{\dot{s}}{R}\,\vec{e}_3$$

1) Analizzando la sollecitazione attiva, osserviamo che essa è composta da una parte conservativa, il peso proprio del disco e dell'asta e la forza elastica della molla con estremo fisso in A. Invece, il carico "follower" $\vec{F}_B$ sarà non conservativo. Allora, per scrivere le equazioni pure di equilibrio, possiamo calcolare le forze generalizzate della sollecitazione conservativa, derivando l'energia potenziale rispetto alle coordinate libere. Invece, per calcolare le forze generalizzate del carico follower, possiamo usare la definizione oppure il suo lavoro virtuale.

(2.1) $V(s,\varphi) = \frac{1}{2} c\, \overline{OA}^2 - 2m\, \vec{g}\cdot\vec{x}_A - m\vec{g}\cdot\vec{x}_D = \frac{1}{2} c\, \overline{OA}^2 - m\vec{g}\cdot\left(2\vec{x}_A + \vec{x}_D\right)$

(2.2) $\vec{x}_A = s\,\vec{e}_1 + R\,\vec{e}_2 \Rightarrow \overline{OA}^2 = s^2 + R^2$

(2.3) $\vec{x}_D = \vec{x}_A + \left(\vec{x}_D - \vec{x}_A\right) = s\vec{e}_1 + R\,\vec{e}_2 + \frac{L}{2}\left(\sin\varphi\,\vec{e}_1 - \cos\varphi\,\vec{e}_2\right) =$
$= \left(s + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(R - \frac{L}{2}\cos\varphi\right)^2 \vec{e}_2$

$\vec{g} = g\left(\sin\alpha\,\vec{e}_1 - \cos\alpha\,\vec{e}_2\right)$

Quindi,

$V(s,\varphi) = \frac{1}{2}c\left(s^2 + \cancel{R^2}\right) - 2m\,g\left(\sin\alpha\,\vec{e}_1 - \cos\alpha\,\vec{e}_2\right)\cdot\left(s\,\vec{e}_1 + R\,\vec{e}_2\right) +$
$- m g\left(\sin\alpha\,\vec{e}_1 - \cos\alpha\,\vec{e}_2\right)\cdot\left[\left(s + \frac{L}{2}\sin\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(R - \frac{L}{2}\cos\varphi\right)\vec{e}_2\right]$

$$V(s,\varphi) = +\frac{1}{2} c s^2 - 2mg\sin\alpha\, s + \cancel{2mg\cos\alpha R} +$$

$$- mg\sin\alpha\left(s + \frac{L}{2}\sin\varphi\right) + mg\cos\alpha\left(\cancel{R} - \frac{L}{2}\cos\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{2} c s^2 - 3\, mg\sin\alpha\, s - mg\frac{L}{2}\left(\sin\alpha\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\right),$$

$$= \frac{1}{2} c s^2 - 3\, mg\sin\alpha\, s - mg\frac{L}{2}\cos(\varphi-\alpha)$$

le forze generalizzate del carico "follower" $\vec{F}_B$ possono essere calcolate dal lavoro virtuale nell'asta

$$LV^{(foll)} = \vec{F}_B \cdot \delta\vec{x}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\epsilon} \qquad \delta\vec{x}_A = \delta s\,\vec{e}_1$$

$$\vec{\epsilon} = \delta\varphi\,\vec{e}_3$$

$$= F\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)\cdot\delta s\,\vec{e}_1 + \qquad \vec{F}_B = F\,\vec{e}_3 \times \mathrm{vers}(B-A)$$

$$+ FL\,\delta\varphi\,\vec{e}_3 \qquad = F\,\vec{e}_3\left(\sin\varphi\,\vec{e}_1 - \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$= F\cos\varphi\,\delta s + FL\,\delta\varphi \qquad = F\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

Dunque

$$Q_s^{(foll)} = F\cos\varphi \quad , \quad Q_\varphi^{(foll)} = FL \qquad \frac{\partial Q_s^{(foll)}}{\partial\varphi} = -F\sin\varphi \neq \frac{\partial Q_\varphi^{(foll)}}{\partial s}$$

mentre

$$Q_s^{(con)} = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\left(cs - 3mg\sin\alpha\right)$$

$$Q_\varphi^{(con)} = -\frac{\partial V}{\partial\varphi} = -mg\frac{L}{2}\sin(\varphi-\alpha)$$

Pertanto, le forze generalizzate totali sono

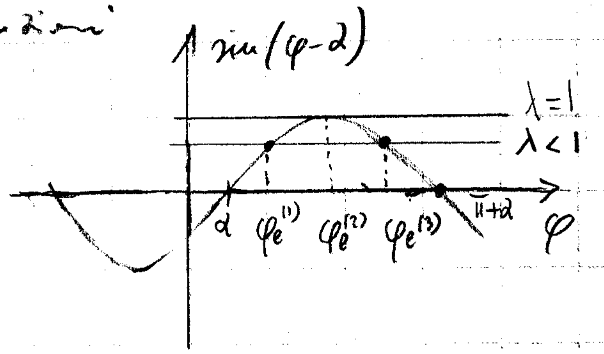
$$(4.1)\qquad \begin{aligned} Q_s &= F\cos\varphi - c s + 3 m g \sin\alpha \\ Q_\varphi &= F L - m g \frac{L}{2}\sin(\varphi-\alpha) \end{aligned}$$

e le eq. pure di equilibrio

$$(4.2)\qquad \begin{cases} F\cos\varphi - c s = -3 m g \sin\alpha \\ m g \frac{L}{2}\sin(\varphi-\alpha) = F L \end{cases}$$

La II eq. delle (4.2) ha soluzioni

$$\sin(\varphi-\alpha) = \frac{2F}{mg} = \lambda > 0$$



se $\lambda = 1$ $\qquad \varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2} + \alpha$

se $\lambda < 1$ $\qquad \varphi_e^{(1)} = \alpha + \arcsin\lambda$, $\quad \varphi_e^{(3)} = \pi+\alpha-(\varphi_e^{(1)}-\alpha) = \pi+\alpha-\arcsin\lambda$

Sostituendo nella I eq. delle (4.2) si trova

$$(4.3)\qquad s_e = \frac{3mg}{c}\sin\alpha + \frac{F}{c}\cos\varphi_e \,,$$ dove

$$(4.4)\qquad \text{se } \lambda = 1 \quad \cos\varphi_e^{(2)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cancel{\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha$$

se $\lambda < 1$

$$\cos\varphi_e^{(1)} = \cos(\alpha + \arcsin\lambda) = \cos\alpha\,\cos(\arcsin\lambda) - \sin\alpha\,\sin(\arcsin\lambda)$$

$$= \cos\alpha\,\sqrt{1-\lambda^2} - \sin\alpha\,\lambda$$

(5.1)

$$\cos\varphi_e^{(3)} = \cos(\pi+\alpha - \arcsin\lambda) = \cos(\pi+\alpha)\cos(\arcsin\lambda) + \sin(\pi+\alpha)\sin(\arcsin\lambda)$$

$$= -\cos\alpha\sqrt{1-\lambda^2} - \sin\alpha\,\lambda \quad < 0$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio sono

$$\vec{q}_e^{(1)} = \left(3\frac{mg}{c}\sin\alpha + \frac{F}{c}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\cos\alpha - \lambda\sin\alpha\right),\ \arcsin\lambda\right)$$

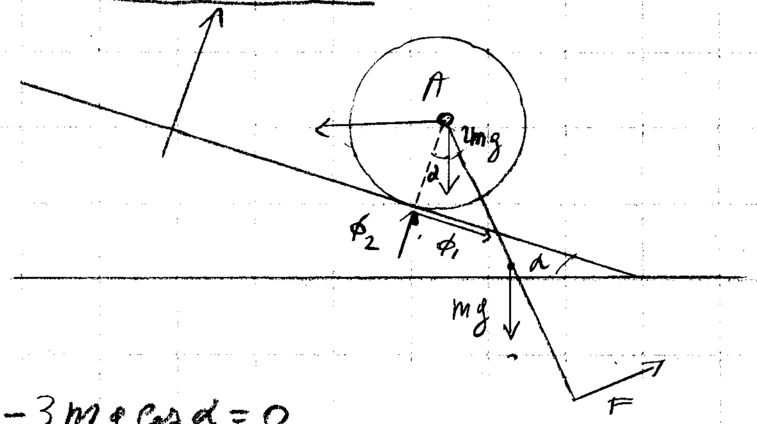
$\lambda < 1$

$$\vec{q}_e^{(3)} = \left(3\,\frac{mg}{c}\sin\alpha - \frac{F}{c}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\cos\alpha + \lambda\sin\alpha\right),\ \pi+\alpha-\arcsin\lambda\right)$$

$\lambda = 1$

$$\vec{q}_e^{(2)} = \left(3\,\frac{mg - F}{c}\sin\alpha,\ \frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

2) Reazioni esterne sul disco in C, all'equilibrio



Scriviamo la I ECS
sul sistema proiettato lungo $\vec{e}_2$
e la II ECS sul solo disco

$$\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_2 : \quad \phi_2 - cR + F \sin\varphi_e - 3mg\cos\alpha = 0$$

(6.1)

$$\vec{M}_A^{(disco)} \cdot \vec{e}_3 : \quad \phi_1 R = 0 \quad \Rightarrow \phi_1 = 0$$

Dunque,

(6.2) $$\phi_1 = 0 \,, \quad \phi_2 = cR + 3mg\cos\alpha - F\sin\varphi_e$$

Calcoliamo il $\sin\varphi_e$ nelle 3 config. di equilibrio:

$$\sin\varphi_e^{(1)} = \sin(\alpha + \arcsin\lambda) = \sin\alpha\cos(\arcsin\lambda) + \cos\alpha\sin(\arcsin\lambda) = \sin\alpha\sqrt{1-\lambda^2} + \cos\alpha\,\lambda$$

(6.3) $$\sin\varphi_e^{(2)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cancel{\cos\frac{\pi}{2}}\sin\alpha = \cos\alpha$$

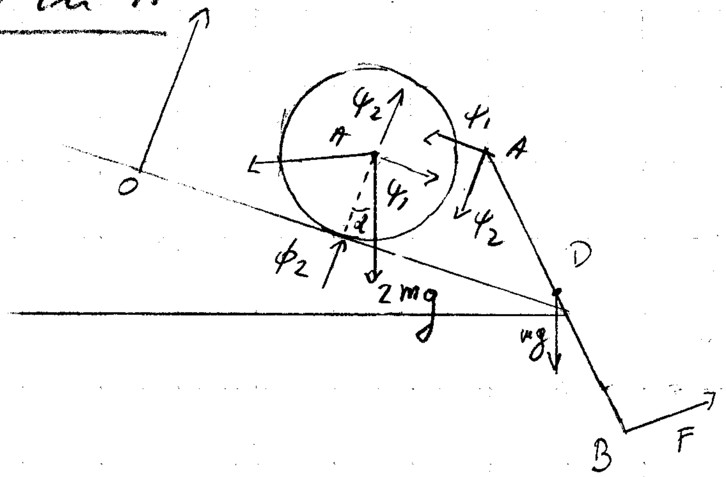
$$\sin\varphi_e^{(3)} = \sin(\pi + \alpha - \arcsin\lambda) = \sin(\pi+\alpha)\cos(\arcsin\lambda) + \\ - \cos(\pi+\alpha)\sin(\arcsin\lambda) = -\sin\alpha\sqrt{1-\lambda^2} + \cos\alpha\,\lambda$$

Pertanto, le reazioni in C sono

(6.4) $$\vec{\phi} = (cR + 3mg\cos\alpha - F\sin\varphi_e)\,\vec{e}_2$$

con $\sin\varphi_e$ dato dalle (6.3)

3) Reazioni vincolari sul disco in A



Per calcolare le reazioni dell'asta sul disco in A, scriviamo la I ECS sul solo disco.

$$\begin{cases} \vec{R}^{\,est,\,disco} \cdot \vec{e}_1 : & -c\,s_e + 2mg\sin\alpha + \psi_1 = 0 \\ \vec{R}^{\,est,\,disco} \cdot \vec{e}_2 : & -cR - 2mg\cos\alpha + \phi_2 + \psi_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} \psi_1 &= c\,s_e - 2mg\sin\alpha \overset{(4.3)}{=} 3mg\sin\alpha + F\cos\varphi_e - mg\sin\alpha \\ &= 2mg\sin\alpha + F\cos\varphi_e \\ \psi_2 &= cR + 2mg\cos\alpha - \phi_2 \overset{(6.4)}{=} \cancel{cR} + 2mg\cos\alpha - \cancel{cR} - 3mg\cos\alpha + F\sin\varphi_e \\ &= -mg\cos\alpha + F\sin\varphi_e \end{aligned} \qquad (7.1)$$

Il risultato si ottiene sostituendo in (7.1) le (4.4), (5.1) e (6.3).

Dinamica

Scriviamo le EL non conservative. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$(8.1)\quad K = K^{(d)} + K^{(a)}$$

$$K^{(d)} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m|\vec{V}_A|^2 + \frac{1}{2}J_{3A}^{(d)}|\vec{\omega}^{(d)}|^2 \qquad J_{3A}^{(d)} = \frac{1}{2}(2m)R^2 = mR^2$$

$$(8.2)\quad \vec{V}_A = \dot{\vec{x}}_A = \dot{s}\,\vec{e}_1 \Rightarrow |\vec{V}_A|^2 = \dot{s}^2 \qquad \vec{\omega}^{(d)} = -\frac{\dot{s}}{R}\vec{e}_3$$

$$(8.3)\quad K^{(d)} = m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\cancel{R^2}\frac{\dot{s}^2}{\cancel{R^2}} = \frac{3}{2}m\dot{s}^2$$

$$K^{(a)} = \frac{1}{2}m|\vec{V}_D|^2 + \frac{1}{2}J_{3D}^{(a)}|\vec{\omega}^{(a)}|^2 \qquad J_{3D}^{(a)} = \frac{1}{12}mL^2$$

$$\vec{\omega}^{(a)} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3$$

$$(8.4)\quad \vec{V}_D = \dot{\vec{x}}_D = \left(\dot{s} + \frac{L}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)\vec{e}_1 + \frac{L}{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_2$$

$$|\vec{V}_D|^2 = \left(\dot{s} + \frac{L}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 =$$

$$= \dot{s}^2 + \frac{L^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + L\cos\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi} + \frac{L^2}{4}\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \dot{s}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2 + L\cos\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi}$$

$$K^{(a)} = \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2 + L\cos\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + \frac{1}{3}L^2\dot{\varphi}^2 + L\cos\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi}\right)$$

Dunque,

$$(9.1)\quad K = \frac{3}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{1}{3} L^2 \dot{\varphi}^2 + L \cos\varphi\, \dot{s} \dot{\varphi} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} m \left(4 \dot{s}^2 + \frac{1}{3} L^2 \dot{\varphi}^2 + L \cos\varphi\, \dot{s} \dot{\varphi} \right)$$

Pertanto,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = 4 m \dot{s} + \frac{1}{2} m L \cos\varphi\, \dot{\varphi} \ , \qquad \frac{\partial K}{\partial s} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} \right) = m \left[4 \ddot{s} + \frac{L}{2} \left(\cos\varphi\, \ddot{\varphi} - \sin\varphi\, \dot{\varphi}^2 \right) \right]$$

Quindi, l'EL relativa alla coordinata s è

$$(9.2)\quad m \left[4 \ddot{s} + \frac{L}{2} \left(\cos\varphi\, \ddot{\varphi} - \sin\varphi\, \dot{\varphi}^2 \right) \right] \overset{(4.1)}{=} F \cos\varphi - c s + 3 m g \sin\alpha .$$

Inoltre,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m \left(\frac{L^2}{3} \dot{\varphi} + \frac{L}{2} \cos\varphi\, \dot{s} \right) , \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} m L \sin\varphi\, \dot{s} \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m \left[\frac{L^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{L}{2} \left(\cos\varphi\, \ddot{s} - \sin\varphi\, \dot{s} \dot{\varphi} \right) \right] .$$

Pertanto, l'EL relativa alla coordinata φ è

$$m \left[\frac{L^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{L}{2} \left(\cos\varphi\, \ddot{s} \cancel{- \sin\varphi\, \dot{s} \dot{\varphi}} \right) \right] \cancel{+ \frac{1}{2} m L \sin\varphi\, \dot{s} \dot{\varphi}} = Q_\varphi \ , \ \text{cioè}$$

$$(9.3)\quad m \left(\frac{L^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{L}{2} \cos\varphi\, \ddot{s} \right) \overset{(4.1)}{=} F L - m g \frac{L}{2} \sin(\varphi - \alpha)$$

5) Reazioni dinamiche in C nel disco.

Analogamente alla Statica, scriviamo

$$(10.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{\,est}\cdot\vec{e}_2 = \left(\cancel{2m\ddot{\vec{x}}_A} + m\,\ddot{\vec{x}}_D\right)\cdot\vec{e}_2 \\ \vec{M}_A^{(disco)}\cdot\vec{e}_3 = \dfrac{d\vec{L}_A^{(disco)}}{dt}\cdot\vec{e}_3 \end{cases}$$

$$(10.2)\quad \ddot{\vec{x}}_A = \dot{\vec{V}}_A = \ddot{s}\,\vec{e}_1\,, \qquad \ddot{\vec{x}}_D = \left[\ddot{s} + \frac{L}{2}\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_1 + \frac{L}{2}\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_2$$

$$(10.3)\quad \vec{L}_A^{(disco)} = \mathbb{I}_A(\vec{\omega}) = J_{3A}\left(-\frac{\dot{s}}{R}\right)\vec{e}_3 = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}mR^2\right)\left(-\frac{\dot{s}}{\cancel{R}}\right)\vec{e}_3 = -mR\dot{s}\,\vec{e}_3$$

Dunque, le (10.1) si scrivono

$$\begin{cases} \phi_2' - cR + F\sin\varphi - 3mg\cos\alpha = m\dfrac{L}{2}\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right) \\ \phi_1'\,\cancel{R} = -m\,\cancel{R}\,\ddot{s} \end{cases}$$

cioè

$$(10.4)\quad \begin{cases} \phi_2' = cR - F\sin\varphi + 3mg\cos\alpha + m\dfrac{L}{2}\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right) \\ \phi_1' = -m\ddot{s} \end{cases}$$

6) Reazioni dinamiche sul disco in A

Analogamente al caso statico,

(11.1)
$$\vec{R}^{\,est,\,disco} \cdot \vec{e}_1 = 2m\, \ddot{\vec{x}}_A \cdot \vec{e}_1$$
$$\vec{R}^{\,est,\,disco} \cdot \vec{e}_2 = 2m\, \ddot{\vec{x}}_A \cdot \vec{e}_2$$

Quindi,

(11.2)
$$\begin{cases} -c\,s + 2mg\sin\alpha + \varphi_1' = 2m\ddot{s} \\ -cR - 2mg\cos\alpha + \phi_2' + \varphi_2' = 0 \end{cases}$$

Allora, risolvendo la I eq. rispetto a φ_1' e la seconda rispetto a φ_2' dopo aver sostituito la ϕ_2' dalla (10.4), si trova

(11.3)
$$\begin{cases} \varphi_1' = cs - 2mg\sin\alpha + 2m\ddot{s} \\ \varphi_2' = cR + 2mg\cos\alpha - \phi_2' = \\ = \cancel{cR} + 2mg\cos\alpha - \left[\cancel{cR} - F\sin\varphi + 3mg\cos\alpha + \frac{mL}{2}(\sin\varphi\ddot{\varphi} + \cos\varphi\dot{\varphi}^2)\right] \\ = -mg\cos\alpha + F\sin\varphi - \frac{mL}{2}(\sin\varphi\ddot{\varphi} + \cos\varphi\dot{\varphi}^2) \end{cases}$$

6a) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

La sollecitazione non è conservativa, quindi, introdotto il vettore degli scarti

$$\vec{x} = \frac{\vec{q}-\vec{q}_e}{\varepsilon}$$

dobbiamo usare la forma

$$A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C x = 0 ,$$

dove

$$A = A(\vec{q}_e) , \quad \cancel{B_{ij} = -\left.\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\right|_{\vec{q}_e}} , \quad C_{ij} = -\left.\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right|_{\vec{q}_e}$$

Quindi

$$A = m\begin{bmatrix} 4 & \frac{L}{2}\cos\varphi_e \\ \frac{L}{2}\cos\varphi_e & \frac{1}{3}L^2 \end{bmatrix} ,$$

$$C = -\left.\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_s}{\partial s} & \frac{\partial Q_s}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} \end{bmatrix}\right|_{\vec{q}_e} = -\begin{bmatrix} -c & -F\sin\varphi_e \\ 0 & -\frac{mgL}{2}\cos(\varphi_e-\alpha) \end{bmatrix}$$

Dunque,

$$m\begin{bmatrix} 4 & \frac{L}{2}\cos\varphi_e \\ \frac{L}{2}\cos\varphi_e & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & F\sin\varphi_e \\ 0 & \frac{mgL}{2}\cos(\varphi_e-\alpha) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto, le EL intorno a $\vec{q}e^{(1)}$, sono

$$\begin{cases} 4m\ddot{x}_1 + \frac{mL}{2}\left(\cos\alpha\sqrt{1-\lambda^2} - \lambda\sin\alpha\right)\ddot{x}_2 + c\,x_1 + F\left(\sin\alpha\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda\cos\alpha\right)x_2 = 0 \\ \frac{mL}{2}\left(\cos\alpha\sqrt{1-\lambda^2} - \lambda\sin\alpha\right)\ddot{x}_1 + \frac{mL^2}{3}\ddot{x}_2 + \frac{mgL}{2}\sqrt{1-\lambda^2}\,x_2 = 0 \end{cases},$$

quelle intorno a $\vec{q}e^{(2)}$

$$\begin{cases} 4m\ddot{x}_1 - \frac{mL}{2}\sin\alpha\,\ddot{x}_2 + c\,x_1 + F\cos\alpha\,x_2 = 0 \\ -\frac{mL}{2}\sin\alpha\,\ddot{x}_1 + \frac{mL^2}{3}\ddot{x}_2 + \frac{mgL}{2}\left(-\sqrt{1-\lambda^2}\right)x_2 = 0 \end{cases}$$

quelle intorno a $\vec{q}e^{(3)}$

$$\begin{cases} 4m\ddot{x}_1 - \frac{mL}{2}\left(\cos\alpha\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda\sin\alpha\right)\ddot{x}_2 + c\,x_1 + F\left(-\sin\alpha\sqrt{1-\lambda^2} + \cos\alpha\,\lambda\right)x_2 = 0 \\ -\frac{mL}{2}\left(\cos\alpha\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda\sin\alpha\right)\ddot{x}_1 + \frac{mL^2}{3}\ddot{x}_2 + \frac{mgL}{2}\left(-\sqrt{1-\lambda^2}\right)x_2 = 0 \end{cases}.$$