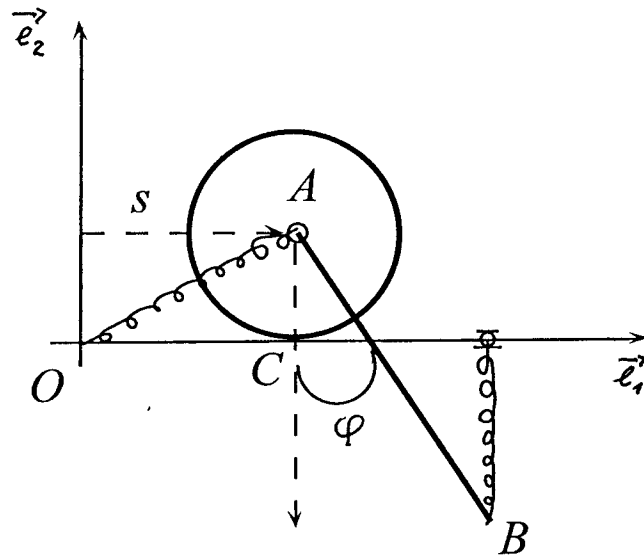


Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 2 luglio 2012

(G. Tondo)



Si consideri il sistema di figura costituito da un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio R , che rotola senza strisciare su una guida orizzontale fissa, e da un'asta omogenea di lunghezza L e massa m , incernierata nel centro A del disco. Il modello, posto nel piano verticale passante per la guida, è soggetto al peso proprio e alla forza elastica della due molle di costante elastica c , fissate, una al centro A del disco e nel punto fisso O , l'altra nell'estremo B dell'asta e sempre parallela all'asse verticale.

STATICA.

Determinare:

- 1) le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione dei parametri del sistema;
- 2) le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto C di contatto con la guida;
- 3) le reazioni vincolari interne sull'asta nell'estremo A .

DINAMICA.

- 4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;
- 5) calcolare le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto C di contatto con la guida;
- 6) le reazioni vincolari interne sull'asta nell'estremo A (solo 6 CFU);
- 6a) linearizzare le equazioni di Lagrange intorno alle configurazioni di equilibrio (solo 9 CFU).

Cinematica

Il modello è un articolato, formato da due rigidi vincolati con una cerniera cilindrica liscia in A. Con il metodo dei congelamenti successivi, si conclude facilmente che i gradi di libertà del modello sono 2. Quindi, si possono prendere come coordinate libere

$$\{ (s, \varphi) \} \quad s \in \mathbb{R}, -\pi < \varphi < \pi,$$

dove s è l'ascissa del centro A del disco \mathcal{R}_2 , alla terna $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e φ è l'angolo tra il vettore $-\vec{e}_3$ e l'asta. Pertanto, lo spazio delle configurazioni del modello vincolato è dato dalla superficie cilindrica:

$$C_v = \mathbb{R} \times S^1$$

N.B. Nel seguito ci servirà la velocità angolare del disco $\vec{\omega}^{(2)}$. Per calcolarla, occorre introdurre, come coordinata non vincolante, l'angolo di rotazione del disco Θ e ricordare che il vincolo di puro rotolamento del disco comporta

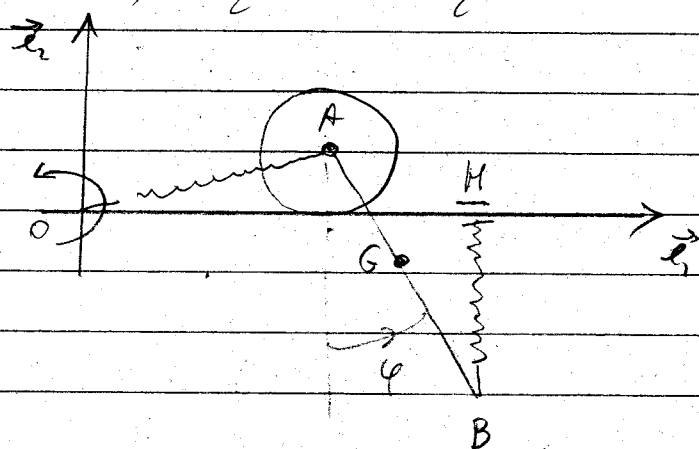
$$s = -R\Theta + r_0 \Rightarrow \dot{s} = -R\dot{\Theta}$$

Quindi,

$$(1.1) \quad \vec{\omega}^{(2)} = \dot{\Theta} \vec{e}_3 = -\frac{\dot{s}}{R} \vec{e}_3$$

1) Osserviamo che la sollecitazione attiva sul modello è costituita da forze conservative, il peso e due molle, una con un estremo fisso, l'altra con un estremo il cui spostamento virtuale è sempre ortogonale alla molla. Pertanto, la sollecitazione complessiva è conservativa, cioè ammette energia potenziale data da

$$V(x, \varphi) = \frac{1}{2} c \overline{AO}^2 + \frac{1}{2} c \overline{BH}^2 - 2mg \cdot \vec{x}_A - Mg \cdot \vec{x}_G$$



$$(2.1) \vec{x}_A - \vec{x}_O = \sigma \vec{e}_1 + R \vec{e}_2 \Rightarrow \overline{AO}^2 = \sigma^2 + R^2$$

$$(2.2) \vec{x}_B - \vec{x}_O = (\vec{x}_B - \vec{x}_A) + (\vec{x}_A - \vec{x}_O) = L(\sin \varphi \vec{e}_1 - \cos \varphi \vec{e}_2) + \sigma \vec{e}_1 + R \vec{e}_2 = (\sigma + L \sin \varphi) \vec{e}_1 + (R - L \cos \varphi) \vec{e}_2$$

$$(2.3) \vec{x}_B - \vec{x}_H = (\vec{x}_B - \vec{x}_O) \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = (R - L \cos \varphi) \vec{e}_2 \Rightarrow \overline{BH}^2 = (R - L \cos \varphi)^2$$

$$(2.4) \vec{x}_G - \vec{x}_O = (\vec{x}_A - \vec{x}_O) + (\vec{x}_G - \vec{x}_A) = \left(\sigma + \frac{L}{2} \sin \varphi\right) \vec{e}_1 + \left(R - \frac{L}{2} \cos \varphi\right) \vec{e}_2$$

Allora

$$\begin{aligned} V(x, \varphi) &= \frac{1}{2} c (\sigma^2 + R^2) + \frac{1}{2} c (R - L \cos \varphi)^2 + 2mg \vec{e}_2 \cdot (\sigma \vec{e}_1 + R \vec{e}_2) + \\ &+ Mg \vec{e}_2 \cdot \left(\sigma + \frac{L}{2} \sin \varphi\right) \vec{e}_1 + \left(R - \frac{L}{2} \cos \varphi\right) \vec{e}_2 \\ &= \frac{1}{2} c (\sigma^2 + R^2) + \frac{1}{2} c (R - L \cos \varphi)^2 + 2mgR + Mg \left(R - \frac{L}{2} \cos \varphi\right) \end{aligned}$$

Trascurando i termini costanti, possiamo scrivere

$$(3.1) \quad V(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} c \rho^2 + \frac{1}{2} c (R - L \cos \varphi)^2 - mg \frac{L}{2} \cos \varphi$$

Gli equilibri del modello coincidono con i punti stazionari delle funzioni (3.1). Quindi,

$$(3.2) \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = c \rho = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = c(R - L \cos \varphi)L \sin \varphi + mg \frac{L}{2} \sin \varphi = 0$$

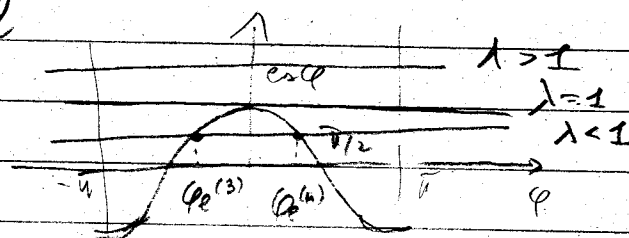
e i punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$(3.3) \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ L \sin \varphi \left[c(R - L \cos \varphi) + \frac{mg}{2} \right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \rho = 0$$

La seconda delle (3.3) ha soluzioni

$$\sin \varphi = 0, \quad \varphi = 0, \bar{\pi} \quad \text{vel}$$

$$\cos \varphi = \frac{R + \frac{mg}{2cL}}{L} = \lambda > 0$$

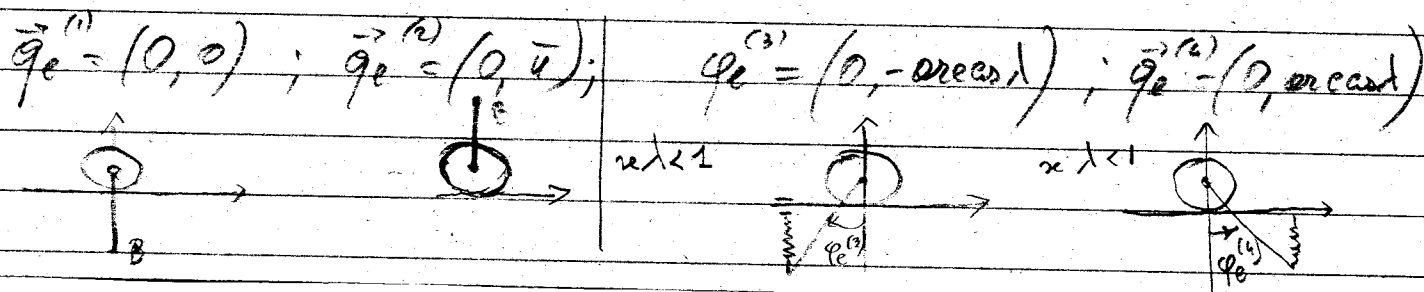


Pertanto, le soluzioni della seconda delle (3.3) sono

$$\varphi_e^{(1)} = 0, \quad \varphi_e^{(2)} = \bar{\pi} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_e^{(3)} = -\arccos \lambda, \quad \varphi_e^{(4)} = \arccos \lambda \quad \text{se } \lambda < 1$$

Pertanto, sono possibili 4 configurazioni di equilibrio:



Determiniamo la stabilità degli equilibri. A tale scopo, calcoliamo la matrice Hessiana di V e valutiamola negli equilibri.

$$(1.1) \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = c, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial \varphi} = 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = L \cos \varphi \left[c(R - L \cos \varphi) + \frac{mg}{2} \right] + c^2 \sin^2 \varphi$$

$$= cL^2 \left[\left(\frac{R}{L} + \frac{mg}{2cL} \right) \cos \varphi - c \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right]$$

Pertanto,

$$(1.2) \mathcal{H} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & cL^2 [\lambda \cos \varphi - \cos^2 \varphi] \end{bmatrix} \quad \mathcal{H}_{11} = c > 0 \text{ sempre}$$

Per valutare la segnatura di \mathcal{H} nelle configurazioni di equilibrio, basta determinare il segno del

$$\det \mathcal{H} \Big|_{q_e} = c^2 L^2 [\lambda \cos \varphi_e - \cos^2 \varphi_e]$$

Allora, otteniamo

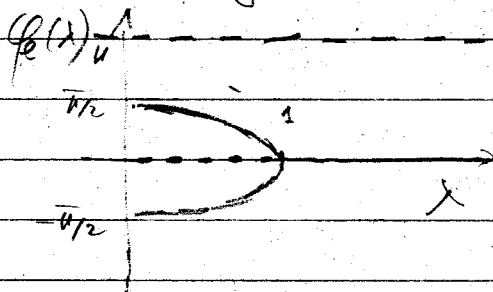
$$\det \mathcal{H} \Big|_{q_e^{(1)}} = c^2 L^2 (\lambda - 1) \quad \begin{array}{c} - \\ \longleftarrow \quad \longrightarrow \\ \lambda \end{array}$$

$$\det \mathcal{H} \Big|_{q_e^{(2)}} = -c^2 L^2 (\lambda + 1) < 0 \Rightarrow \text{sella} \Rightarrow \text{instabile}$$

$$\det \mathcal{H} \Big|_{q_e^{(3)}} = c^2 L^2 [\lambda^2 - (2\lambda^2 - 1)] = c^2 L^2 (1 + \lambda)(1 - \lambda) \stackrel{\lambda < 1}{\geq 0} \Rightarrow \text{min} \Rightarrow \text{stabile}$$

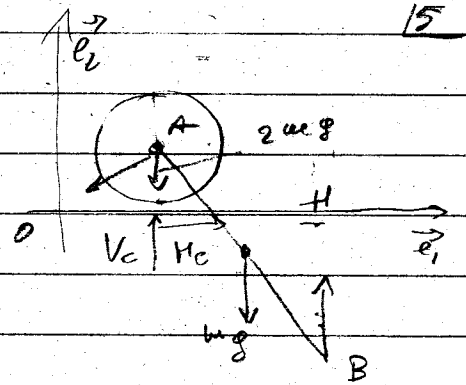
$$\det \mathcal{H} \Big|_{q_e^{(4)}} = \det \mathcal{H} \Big|_{q_e^{(3)}} \stackrel{\lambda < 1}{\geq 0} \Rightarrow \text{stabile}$$

Quindi, vale il seguente diagramma di biforcazione



2) Reoriamo nel disco in C , all'equilibrio

Applichiamo le I EIS in tutto il modello



$$(5.1) \quad \vec{F}_c + \vec{F}_A + 3m\vec{g} + \vec{F}_B = \vec{0}$$

$$\vec{F}_A = -c(\vec{x}_A - \vec{x}_0) \stackrel{(2.1)}{=} -c(r\vec{e}_1 + h\vec{e}_2)$$

$$\vec{F}_B = -c(\vec{x}_B - \vec{x}_H) \stackrel{(2.3)}{=} -c(R - L \cos \varphi) \vec{e}_2$$

Decomponendo la (5.1) lungo i vettori \vec{e}_1 ed \vec{e}_2 si trova

$$\begin{cases} Hc - c r e_2 = 0 \\ Vc - c h - 3mg - c(R - L \cos \varphi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Hc = c r e_2 \\ Vc = 2eR + 3mg - cL \cos \varphi \end{cases}$$

Quindi, nelle configurazioni di equilibrio si ha:

$$\vec{q}_e^{(1)} = (0, 0) \quad \begin{cases} Hc = 0 \\ Vc = 2eR + 3mg - cL \end{cases}$$

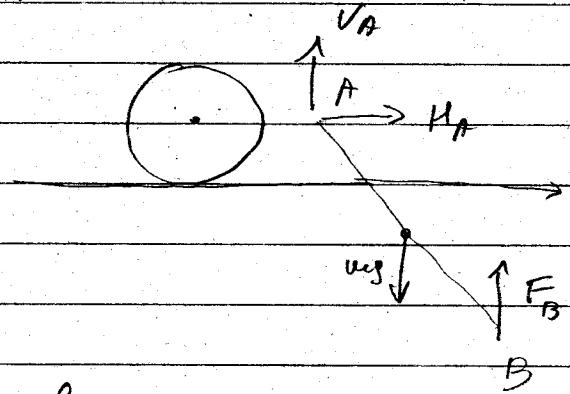
$$\vec{q}_e^{(2)} = (0, \bar{\alpha}) \quad \begin{cases} Hc = 0 \\ Vc = 2eR + 3mg + cL > 0 \end{cases}$$

$$\vec{q}_e^{(3)} = (0, -\arccos \lambda) \quad \begin{cases} Hc = 0 \\ Vc = 2eR + 3mg - cL\lambda = 2eR + 3mg - c\left(\frac{R}{L} + \frac{mg}{2cL}\right) = cR + \frac{5}{2}mg > 0 \end{cases}$$

$$\vec{q}_e^{(4)} = (0, \arccos \lambda) \quad \begin{cases} Hc = 0 \\ Vc = cR + \frac{5}{2}mg \end{cases}$$

3) Reazioni sull'asta in A, all'equilibrio

Applichiamo la I ECS alla
sola asta AB.



$$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_B = \vec{0}$$

recompone lungo i vettori \vec{e}_1, \vec{e}_2 , fornisce

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - mg - c(R - L \cos \varphi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = mg + c(R - L \cos \varphi) \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \vec{q}_e^{(1)} &= (0, 0) & H_A &= 0 \\ & & V_A &= mg + c(R - L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{q}_e^{(2)} &= (0, \bar{u}) & H_A &= 0 \\ & & V_A &= mg + c(R + L) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{q}_e^{(3)} &= (0, -\alpha \text{reccos} \lambda) & H_A &= 0 \\ & & V_A &= mg + c(R - L \lambda) = mg + c \left[R - \sqrt{R^2 + (mg)^2} \right] = \\ & & &= \frac{mg}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{q}_e^{(4)} &= (0, \alpha \text{reccos} \lambda) & H_A &= 0 \\ & & V_A &= \frac{mg}{2} \end{aligned}$$

Scriviamo le 2 eq. di Lagrange relative alle coordinate (s, φ)
 A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica K del modello.

$$K = K^{(d)} + K^{(o)}$$

$$(7.1) \quad K^{(d)} = \frac{1}{2} (2m) v_A^2 + \frac{1}{2} J_{A3} \dot{\theta}^2$$

$$J_{A3} = \frac{1}{2} (2m) R^2 = mR^2$$

$$(7.2) \quad \vec{v}_A = \dot{\vec{x}}_A \stackrel{(2.1)}{=} \dot{s} \vec{e}_1$$

$$\dot{\theta} \stackrel{(1.1)}{=} -\frac{\dot{s}}{R}$$

Quindi,

$$(7.3) \quad K^{(d)} = m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{-\dot{s}}{R} \right)^2 = \frac{3}{2} m \dot{s}^2$$

$$(7.4) \quad K^{(o)} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{G3} \dot{\varphi}^2$$

$$J_{G3} = \frac{1}{12} m L^2$$

$$(7.5) \quad \vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G = \left(\dot{s} + \frac{L}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \vec{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \vec{e}_2$$

$$v_G^2 = \left(\dot{s} + \frac{L}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right)^2 + \left(\frac{L}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \right)^2 =$$

$$= \dot{s}^2 + L \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} + \frac{L^2}{4} \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4} \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2$$

$$= \dot{s}^2 + L \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} + \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}^2$$

$$K^{(o)} = \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + L \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} + \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m \right) L^2 \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + L \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} + \frac{L^2}{3} \dot{\varphi}^2 \right)$$

Pertanto, l'energia cinetica del modello è

$$K = \frac{3}{2} m \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{\sigma}^2 + L \cos \varphi \dot{\sigma} \dot{\varphi} + \frac{L^2}{3} \dot{\varphi}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(4 \dot{\sigma}^2 + L \cos \varphi \dot{\sigma} \dot{\varphi} + \frac{L^2}{3} \dot{\varphi}^2 \right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\sigma}} = 4 m \dot{\sigma} + \frac{1}{2} m L \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \sigma} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\sigma}} \right) = 4 m \ddot{\sigma} + \frac{1}{2} m L \left(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \right)$$

Pertanto, $EL(\sigma)$ è

$$4 m \ddot{\sigma} + \frac{1}{2} m L \left(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \right) = -e \sigma$$

Inoltre,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m L \cos \varphi \dot{\sigma} + \frac{m L^2}{3} \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} m L \sin \varphi \dot{\sigma} \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{1}{2} m L \left(\cos \varphi \ddot{\sigma} - \sin \varphi \dot{\sigma} \dot{\varphi} \right) + \frac{m L^2}{3} \ddot{\varphi}$$

Quindi, $EL(\varphi)$ è

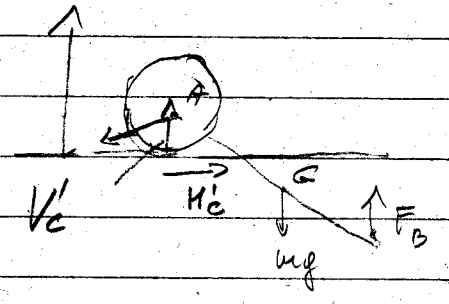
$$\frac{1}{2} m L \cos \varphi \ddot{\sigma} - \frac{1}{2} m L \sin \varphi \dot{\sigma} \dot{\varphi} + \frac{m L^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m L \sin \varphi \dot{\sigma} \dot{\varphi} = Q_\varphi$$

cioè

$$\frac{1}{2} m \cos \varphi \ddot{\sigma} + \frac{m L}{3} \ddot{\varphi} = -c(R - L \cos \varphi) \sin \varphi - \frac{m g}{2} \sin \varphi$$

5) Reazioni esterne dinamiche sul disco in C

Applichiamo la I ECD a tutto il modello.



$$(9.1) \vec{\phi}_C + \vec{F}_A + 3mg + \vec{F}_B = 9m \vec{a}_A + m \vec{a}_C$$

$$(9.2) \vec{a}_A \stackrel{(7.2)}{=} \ddot{\varphi} \vec{e}_1$$

$$(9.3) \vec{a}_C \stackrel{(7.5)}{=} \vec{v}_C = \left[\ddot{\varphi} + \frac{L}{2} (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) \right] \vec{e}_1 + \frac{L}{2} (\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2) \vec{e}_2$$

Se scomponendo lungo i versori \vec{e}_1 ed \vec{e}_2 si trova:

$$H'_C - c\alpha = m \left[2\ddot{\varphi} + \ddot{\varphi} + \frac{L}{2} (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) \right] \Rightarrow$$

$$H'_C = c\alpha + m \left[3\ddot{\varphi} + \frac{L}{2} (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) \right]$$

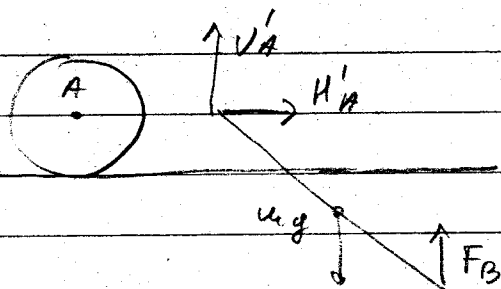
$$V'_C - cR - 3mg - c(R - L \cos \varphi) = m \frac{L}{2} (\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2) \Rightarrow$$

$$V'_C = 2cR + 3mg + cL \cos \varphi + m \frac{L}{2} (\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2)$$

6) Reazioni dinamiche all'estremità in A

Applicando la I ECD sulle
solo asta, si ha

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_B = m\vec{a}_G$$



Scomponendo lungo i versori \vec{e}_1 , \vec{e}_2 si trova

$$H'_A = m \left[\ddot{s} + \frac{L}{2} (\cos\varphi \ddot{\varphi} - \sin\varphi \dot{\varphi}^2) \right]$$

$$V'_A = mg + c(R - L\cos\varphi) + m \frac{L}{2} (\sin\varphi \ddot{\varphi} + \cos\varphi \dot{\varphi}^2)$$

6e) linearizzazione delle EL intorno alle conf. di equilibrio.

Il modello è conservativo. Allora, introducendo il vettore degli scarti dalle configurazioni di equilibrio

$$\vec{x} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} r - r_e \\ \varphi - \varphi_e \end{bmatrix}$$

il sistema delle EL linearizzate si scrive

$$A \ddot{\vec{x}} + V \vec{x} = \vec{0}$$

dove A è V sono, rispettivamente, la matrice di massa e la matrice di molla, entrambe valutate nelle configurazioni di equilibrio. Quindi.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{r}^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{r} \partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{r}} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\varphi}^2} \end{bmatrix} \Big|_{\vec{q}_e} = m \begin{bmatrix} 4 & \frac{L \cos \varphi}{2} \\ \frac{L \cos \varphi}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \Big|_{\vec{q}_e}$$

mentre la V è data dalla (1.2) valutata negli equilibri.

Pertanto, il sistema è

$$m \begin{bmatrix} 4 & \frac{L \cos \varphi_e}{2} \\ \frac{L \cos \varphi_e}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c l^2 (\lambda \cos \varphi_e - \cos 2 \varphi_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto,

$$\vec{q}_e = (0, 0) \quad \begin{cases} 4m \ddot{x}_1 + \frac{mL}{2} \ddot{x}_2 + c x_1 = 0 \\ \frac{mL}{2} \ddot{x}_1 + \frac{mL^2}{3} \ddot{x}_2 + c l^2 (\lambda - 1) x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{q}_e^{(2)} = (0, \bar{u})$$

$$4m\ddot{x}_1 - \frac{mL}{2}\ddot{x}_2 + c x_1 = 0$$

$$-\frac{mL}{2}\ddot{x}_1 + \frac{mL^2}{3}\ddot{x}_2 - cL^2(\lambda+1)x_2 = 0$$

$$\vec{q}_e^{(3)} = (0, \text{arccos } \lambda)$$

$$4m\ddot{x}_1 + \frac{mL}{2}\lambda\ddot{x}_2 + c x_1 = 0$$

$$\vec{q}_e^{(4)} = (0, \text{arccos } \lambda)$$

$$\left(\frac{mL}{2}\lambda\ddot{x}_1 + \frac{mL^2}{3}\ddot{x}_2 + cL^2(1-\lambda^2)x_2 = 0\right)$$