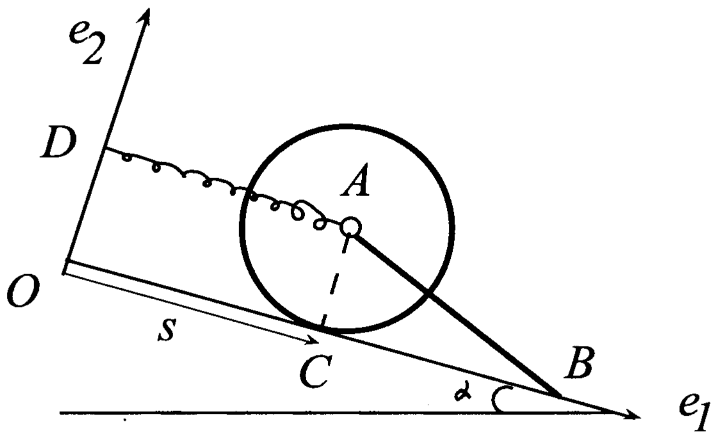
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 21 gennaio 2013

(G. Tondo)



Si consideri il sistema di figura costituito da un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio R, che rotola senza strisciare su una guida fissa e inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo α. Al centro del disco A è incernierata un'asta omogenea di lunghezza $L > R$ e massa m, il cui estremo B è vincolato a scorrere senza attrito sulla guida. Il modello, posto nel piano verticale passante per la guida, è soggetto al peso proprio e alla forza elastica della molla di costante elastica c, fissata al centro del disco e nel punto fisso D a distanza R da O.

STATICA.

Determinare:

1) le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione dei parametri del sistema;

2) le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto C di contatto con la guida e sull'estremo dell'asta B;

3) le reazioni vincolari interne sul disco nel centro A.

DINAMICA.

4) Scrivere l'equazione finita di moto a partire da condizioni iniziali nulle:

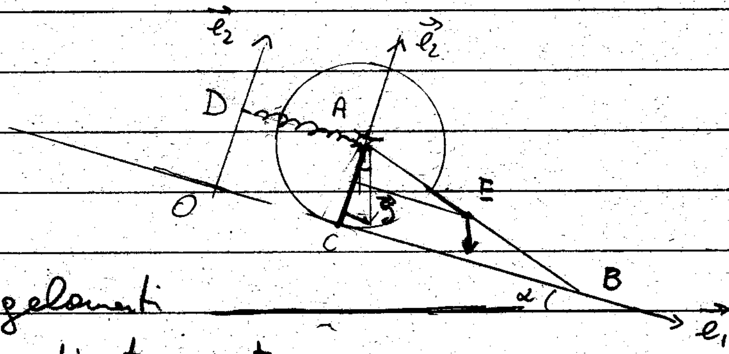
$$s(0) = 0 \ , \qquad \dot{s}(0) = 0 \ ;$$

5) calcolare le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto C di contatto con la guida e sull'estremo dell'asta B, in funzione della coordinata libera s;

6) le reazioni vincolari interne sul disco nel centro A, in funzione della coordinata libera s (solo 6 CFU);

6a) determinare la pulsazione delle piccole oscillazioni intorno alle configurazioni di equilibrio (solo 9 CFU).

Tema del 21/01/2013 L1



Analisi cinematica

Con il metodo dei congelamenti successivi, si può immediatamente concludere che il modello ha 1 g.l.
Infatti, se si congela il moto del disco (1 spostamento virtuale) è congelata anche l'asta, vincolata con l'appoggio liscio in B. Come coordinata libera scegliamo l'ascissa s di C rs. al riferimento $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$(1.1) \qquad s \in \mathbb{R}$$

Il disco si muove lungo la guida con un puro rotolamento ed ha velocità angolare pari a

$$(1.2) \qquad \vec{\omega}^{(d)} = \dot{\theta}\, \vec{e}_3 = -\frac{\dot{s}}{R}\, \vec{e}_3 ,$$

se denotiamo con θ la coordinata (sovrabbondante) angolare del disco. Invece l'asta, mantenendo costante la sua orientazione rs. a un qualsiasi riferimento fisso, ha solo un moto di traslazione, quindi ha

$$(1.3) \qquad \vec{\omega}^{(a)} = \vec{0}$$

Statica

1) Il modello (articolato) è soggetto a vincoli fissi, non dissipativi e a sollecitazione conservativa (peso e molla con un estremo fisso). Quindi, i suoi equilibri sono punti stazionari dell'energia potenziale

$$(1.4) \qquad V(s) = \frac{1}{2} c\, \overline{AD}^2 - 2m\, \vec{g} \cdot \vec{x}_A - m\, \vec{g} \cdot \vec{x}_E$$

$$\vec{x}_A - \vec{x}_D = s\,\vec{e}_1 , \qquad \vec{x}_A = s\,\vec{e}_1 + R\,\vec{e}_2 , \qquad \vec{v}_A = \dot{s}\,\vec{e}_1$$

$$(2.1)\quad \vec{x}_E = \vec{x}_A + \left(\vec{x}_E - \vec{x}_A\right), \qquad \vec{x}_E - \vec{x}_A = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2}\,\vec{e}_1 - \frac{R}{2}\,\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L^2-R^2}\,\vec{e}_1 - R\,\vec{e}_2\right)$$

$$\vec{x}_E = \left(s + \frac{1}{2}\sqrt{L^2-R^2}\right)\vec{e}_1 + \frac{R}{2}\,\vec{e}_2 , \qquad \vec{g} = g\left(\sin\alpha\,\vec{e}_1 - \cos\alpha\,\vec{e}_2\right)$$

Quindi

$$V(s) = \frac{1}{2} c\, s^2 - 2mg\left(\sin\alpha\,\vec{e}_1 - \cos\alpha\,\vec{e}_2\right)\cdot\left(s\,\vec{e}_1 + R\,\vec{e}_2\right) +$$

$$- mg\left(\sin\alpha\,\vec{e}_1 - \cos\alpha\,\vec{e}_2\right)\cdot\left[\left(s + \frac{1}{2}\sqrt{L^2-R^2}\right)\vec{e}_1 + \frac{R}{2}\,\vec{e}_2\right]$$

$$= \frac{1}{2} c\, s^2 - 2mg\sin\alpha\, s + \cancel{2mg\cos\alpha\, R} +$$

$$(2.2)\qquad - mg\sin\alpha\left(s + \cancel{\frac{1}{2}\sqrt{L^2-R^2}}\right) + \cancel{mg\cos\alpha\,\frac{R}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} c\, s^2 - 3mg\sin\alpha\, s \qquad \text{trascurando le costanti}$$

I punti stazionari di $V(s)$ sono gli zeri di

$$(2.3)\quad V'(s) = c\,s - 3mg\sin\alpha = -Q_s$$

cioè

$$(2.4)\qquad s_e = \frac{3mg\sin\alpha}{c}$$

Per determinare la stabilità di s_e, calcoliamo

$$V''(s_e) = c > 0 \implies s_e = \text{pto. min } V(s) \implies s_e \text{ stabile}$$

2) Reazioni vincolari esterne in C e in B

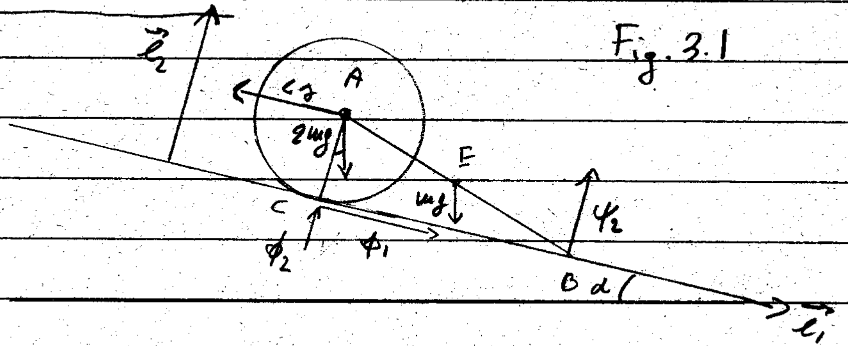


Fig. 3.1

$$\vec{\phi}_C = \phi_1 \vec{e}_1 + \phi_2 \vec{e}_2 \tag{3.1}$$
$$\vec{\Psi}_B = \Psi_2 \vec{e}_2$$

A priori, ci sono 3 reazioni incognite (ϕ_1, ϕ_2, Ψ_2). Scriviamo, allora, la I ECS su tutto il modello.

$$(3.2)\quad \begin{cases} \vec{R}^{est}\cdot\vec{e}_1: & \phi_1 - c s_2 + 2mg\sin\alpha + mg\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \phi_1 = c s_2 - 3mg\sin\alpha \overset{(2.4)}{=} 0 \\ \vec{R}^{est}\cdot\vec{e}_2: & \phi_2 + \Psi_2 - 2mg\cos\alpha - mg\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \phi_2 = -\Psi_2 + 3mg\cos\alpha \end{cases}$$

Ci serve un'altra equazione. Conviene prendere la II ECS con polo in A, applicata alla sola asta.

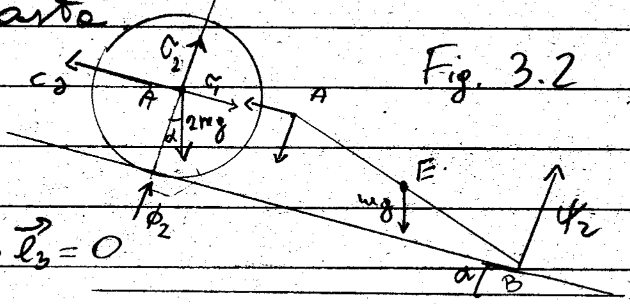


Fig. 3.2

$$(3.3)\quad \vec{M}_A^{(asta)}\cdot\vec{e}_3:\ (\vec{x}_E - \vec{x}_A)\times m\vec{g}\cdot\vec{e}_3 + (B-A)\times\Psi_2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = 0$$

Quindi

$$(3.4)\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{L^2-R^2} & -\frac{R}{2} & 0 \\ mg\sin\alpha & -mg\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sqrt{L^2-R^2} & -R & 0 \\ 0 & \Psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$(3.5)\quad -\frac{mg\cos\alpha}{2}\sqrt{L^2-R^2} + \frac{R}{2}mg\sin\alpha + \Psi_2\sqrt{L^2-R^2} = 0$$

Quindi

$$(3.6)\quad \Psi_2 = \frac{mg}{2}\left(\frac{\cos\alpha\sqrt{L^2-R^2} - \sin\alpha\, R}{\sqrt{L^2-R^2}}\right) = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha - \sin\alpha\,\frac{R}{\sqrt{L^2-R^2}}\right)$$

N.B. Affinché il vincolo d'appoggio unilatero dell'asta in B sia rispettato, deve essere $\psi_2 > 0$, altrimenti si ha il distacco. Nel nostro caso, risulta

$$(4.1) \qquad \psi_2 > 0 \iff tg\,\alpha < \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 1},$$

cioè l'asta rimane appoggiata alla guida nella configurazione di equilibrio solo se

$$(4.2) \qquad \alpha < \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{L^2}{R^2} - 1}$$

Infine, sostituendo la (3.6) nella (3.2) ricaviamo ϕ_2

$$(4.3) \qquad \phi_2 = \frac{mg}{2}\left(5\cos\alpha + \sin\alpha \frac{R}{\sqrt{L^2-R^2}}\right) > 0$$

Dunque, le reazioni vincolari in A e B all'equilibrio sono

$$(4.4) \quad \phi_1 = 0, \quad \phi_2 = \frac{mg}{2}\left(5\cos\alpha + \sin\alpha \frac{R}{\sqrt{L^2-R^2}}\right), \quad \psi_2 = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha - \sin\alpha \frac{R}{\sqrt{L^2-R^2}}\right)$$

e il vincolo di appoggio liscio dell'asta è rispettato se e solo se

$$(4.5) \qquad \alpha < \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{L^2}{R^2} - 1} .$$

3) Reazioni interne in A sul disco

Denotata con $\vec{\Gamma} = \Gamma_1 \vec{e}_1 + \Gamma_2 \vec{e}_2$ la reazione interna in A dell'asta sul disco, determiniamola applicando la I ECS sul solo disco. Con riferimento alla Fig. 3.2, risulta

$$
(4.1) \qquad
\begin{array}{ll}
\vec{R}^{\,est \to disco} \cdot \vec{e}_1 : & \left\{ \begin{array}{l} -c\, s_e + 2mg \sin\alpha + \Gamma_1 = 0 \\[2ex] \phi_2 + \Gamma_2 - 2mg\cos\alpha = 0 \end{array} \right. \\
\vec{R}^{\,est \to disco} \cdot \vec{e}_2 : &
\end{array}
$$

Quindi

$$\Gamma_1 = c\, s_e - 2mg\sin\alpha \overset{(2.4)}{=} mg\sin\alpha \quad > 0$$

$$\Gamma_2 = 2mg\cos\alpha - \phi_2 = -\frac{mg}{2}\left(\cos\alpha + \sin\alpha \frac{R}{\sqrt{L^2-R^2}}\right) < 0$$

4) Per scrivere l'eq. finita di moto, prima scriviamo un'eq. differenziale pura di moto e poi integriamola con le condizioni iniziali assegnate. A tale scopo, scriviamo l'eq. di Lagrange relativa alla coordinata libera s. Calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$(6.1) \qquad K = K^{(d)} + K^{(a)}.$$

$$K^{(d)} = \frac{1}{2}(2m)|\vec{v}_A^{\,2}| + \frac{1}{2} I_A^{(d)} |\vec{\omega}^{(d)}|^2 \qquad I_A^{(d)} = \frac{1}{2}(2m)R^2 = mR^2$$

$$(6.2) \qquad \overset{(1.2)}{=} m\dot{s}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \left(-\frac{\dot{s}}{R}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2} m \dot{s}^2.$$

L'energia cinetica dell'asta è data da

$$K^{(a)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B|^2 + \cancel{\frac{1}{2} I_G^{(a)} |\vec{\omega}^{(a)}|^2}$$

$$\overset{(1.3)}{=} \frac{1}{2} m \dot{s}^2$$

Dunque,

$$(6.4) \qquad K = 2 m \dot{s}^2,$$

$$(6.5) \qquad \frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = 4 m \dot{s}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{s}}\right) = 4 m \ddot{s}, \quad \frac{\partial K}{\partial s} = 0,$$

quindi, tenendo conto della (2.3) l'EL si scrive

$$(6.6) \qquad 4m\ddot{s} + c s = 3 m g \sin\alpha$$

Questa è un eq. differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti. Riscrivendola come

$$(6.7) \qquad \ddot{s} + \frac{c}{4m} s = \frac{3}{4} g \sin\alpha$$

Dobbiamo trovare la soluzione particolare di (6.7) corrispondente a condizioni iniziali nulle. Si può fare ricordando la teoria delle EDO del II ordine a coefficienti costanti studiata in Analisi II. Oppure, osservando che, introducendo la variabile scarto dalla configurazione di equilibrio

(7.1) $$x(t) = s(t) - s_e = s(t) - \frac{3mg}{c}\sin\alpha,$$

l'eq. (6.7) diventa omogenea

(7.2) $$\ddot{x} + \frac{c}{4m}x = 0$$

e un caso particolare dell'eq. (15.1.18) a pag. 220 degli Appunti. Quindi, il suo integrale generale è

(7.3) $$x(t) = x_0\cos\nu t + \frac{v_0}{\nu}\sin\nu t, \qquad \nu = \sqrt{\frac{c}{4m}},$$

x_0, v_0 costanti arbitrarie. Riscrivendo la (7.3) nella variabile s si ottiene

(7.4) $$s(t) = \frac{3mg}{c}\sin\alpha + x_0\cos\nu t + \frac{v_0}{\nu}\sin\nu t$$

Imponendo le condizioni iniziali nulle alla (7.4)

(7.5) $$s(0) = 0, \qquad \dot{s}(0) = 0$$

si determina il valore delle costanti x_0, v_0

(7.6) $$x_0 = -\frac{3mg}{c}\sin\alpha, \qquad v_0 = 0$$

Dunque, il moto corrispondente a condizioni iniziali nulle è un moto armonico dato da

(7.7) $$s(t) = \frac{3mg}{c}\sin\alpha\left(1 - \cos\sqrt{\frac{c}{4m}}\,t\right)$$

5) Reazioni vincolari esterne in C e B durante il moto

Scriviamo la I ECD su tutto il modello e la II ECD con polo in A sulla sola asta.

$$(8.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{ext} = 2m\,\vec{a}_A + m\,\vec{a}_E \\ \vec{M}_A^{ext\,asta} = \dfrac{d\vec{L}_A^{(a)}}{dt} + \cancel{\vec{v}_A \times m\,\vec{v}_E} \end{cases}$$

Si noti l'annullarsi del termine $\vec{v}_A \times m\vec{v}_E$, dovuto al fatto che l'asta trasla e quindi

$$(8.2)\qquad \vec{v}_A = \vec{v}_E = \vec{v}_P \qquad \forall\, P \in \text{asta}$$

Calcoliamo il lato destro delle (8.1). Dalle (8.2) segue che

$$(8.3)\quad \vec{a}_E = \vec{a}_A \overset{(2.1)}{=} \ddot{s}\,\vec{e}_1 .$$

Il momento della quantità di moto dell'asta è

$$(8.4)\quad \vec{L}_A^{(a)} = (\vec{x}_E - \vec{x}_A) \times m\,\vec{v}_A + \cancel{\mathbb{I}_A(\vec{\omega}^{(a)})}$$

$$\overset{(2.1),(1.3)}{=} \frac{1}{2}\left(\sqrt{L^2-R^2}\,\vec{e}_1 - R\,\vec{e}_2\right) \times m\,\dot{s}\,\vec{e}_1$$

$$= \frac{mR}{2}\,\dot{s}\,\vec{e}_3 ,$$

quindi

$$(8.5)\quad \frac{d\vec{L}_A^{(a)}}{dt} = m\,\frac{R}{2}\,\ddot{s}$$

Allora le (8.1) si scrivono scalarmente come

$$(9.1)\quad \begin{cases} \phi_1' - c s + 3 m g \sin\alpha = 3 m \ddot{s} \\ \phi_2' + \psi_2' - 3 m g \cos\alpha = 0 \\ \dfrac{mg}{2}\left(R \sin\alpha - \sqrt{L^2-R^2}\cos\alpha\right) + \psi_2' \sqrt{L^2-R^2} = \dfrac{mR}{2}\ddot{s} \end{cases}$$

Quindi

$$(9.2)\quad \begin{cases} \phi_1' = c s - 3 m g \sin\alpha + 3 m \ddot{s} \\ \psi_2' = \dfrac{mg}{2}\left(\cos\alpha - \dfrac{R}{\sqrt{L^2-R^2}}\sin\alpha\right) + \dfrac{mR}{2\sqrt{L^2-R^2}}\ddot{s} \\ \phi_2' = \dfrac{mg}{2}\left(5\cos\alpha + \dfrac{R}{\sqrt{L^2-R^2}}\sin\alpha\right) - \dfrac{mR}{2\sqrt{L^2-R^2}}\ddot{s} \end{cases}$$

Per scrivere le (9.2) in funzione di s, basta risolvere l'EL (6.7) rispetto a $\ddot{s}$

$$\ddot{s} = -\frac{c}{4m} s + \frac{3}{4} g \sin\alpha$$

e sostituire in (9.2). Così si ottiene

$$\phi_1' = c s - 3 m g \sin\alpha + 3m\left(-\frac{c}{4m}s + \frac{3}{4} g \sin\alpha\right) = \frac{1}{4}\left(c s - 3 m g \sin\alpha\right)$$

$$\phi_2' = \frac{mg}{2}\left(5\cos\alpha + \frac{R}{\sqrt{L^2-R^2}}\sin\alpha\right) - \frac{mR}{2\sqrt{L^2-R^2}}\left(-\frac{c}{4m}s + \frac{3}{4} g \sin\alpha\right)$$

$$(9.3)\quad = \frac{mg}{2}\left(5\cos\alpha + \frac{R}{4\sqrt{L^2-R^2}}\sin\alpha\right) + \frac{R}{8\sqrt{L^2-R^2}} c s$$

$$\psi_2' = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha - \frac{R}{\sqrt{L^2-R^2}}\sin\alpha\right) + \frac{mR}{2\sqrt{L^2-R^2}}\left(-\frac{c}{4m}s + \frac{3}{4} g \sin\alpha\right)$$

$$= \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha - \frac{R}{4\sqrt{L^2-R^2}}\sin\alpha\right) - \frac{R}{8\sqrt{L^2-R^2}} c s$$

6) Reazioni vincolari interne sul disco in A, durante il moto.

Scriviamo la I ECD sul solo disco.

(10.1) $$\vec{R}^{\,est \to disco} = 2m\,\vec{a}_A$$

Scomponendo lungo i versori $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ si ottiene

(10.2) $$\begin{cases} \vec{e}_1: \ \phi_1' - c s + 2mg\sin\alpha + \sigma_1' = 2m\ddot{s} \\ \vec{e}_2: \ \phi_2' + \sigma_2' - 2mg\cos\alpha = 0 . \end{cases}$$

Quindi

(10.3) $$\sigma_1' = -\phi_1' + cs - 2mg\sin\alpha + 2m\ddot{s} \overset{(9.2)}{=} -(\cancel{cs} - 3mg\sin\alpha + 3m\ddot{s}) + \cancel{cs} - 2mg\sin\alpha + 2m\ddot{s} = mg\sin\alpha - m\ddot{s} \overset{(9.3)}{=} mg\sin\alpha - m\left(-\frac{c}{4m}s + \frac{3}{4}g\sin\alpha\right) = (mg\sin\alpha + cs)\frac{1}{4}$$

$$\sigma_2' = 2mg\cos\alpha - \phi_2' = -\frac{mg}{2}\left(\cos\alpha + \frac{R}{4\sqrt{L^2-R^2}}\sin\alpha\right) - \frac{R}{8\sqrt{L^2-R^2}}\,cs$$

6a) Osserviamo che, essendo l'EL (6.6) già lineare, il moto esatto (non approssimato) è il moto armonico (7.7) intorno alla configurazione di equilibrio, con pulsazione

$$\nu = \sqrt{\frac{c}{4m}} .$$