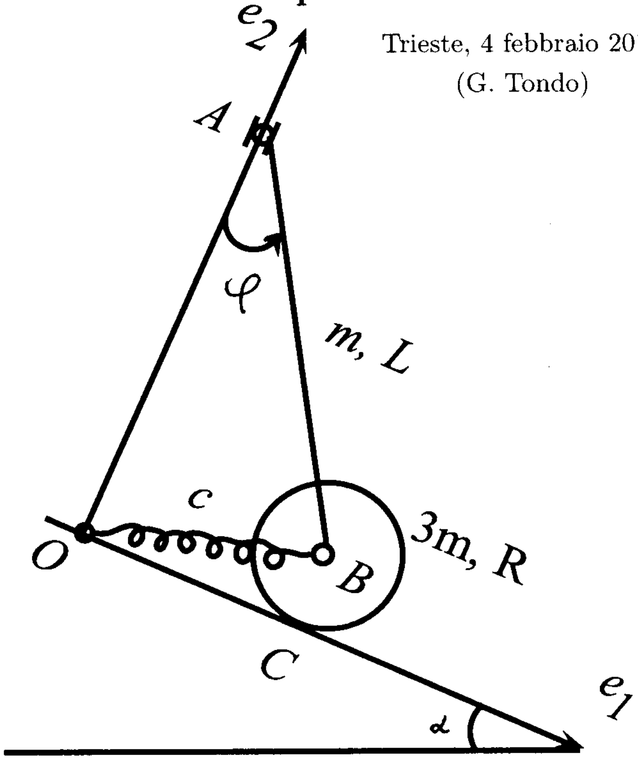
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 4 febbraio 2013
(G. Tondo)



Si consideri il modello articolato di figura costituito da un disco omogeneo di massa $3\,m$ e raggio R vincolato a rotolare *senza strisciare* su una guida *scabra* inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale. Un asta omogenea AB, di lunghezza L e massa m, ha un estremo incernierato nel centro B del disco e l'altro estremo A vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida ortogonale a quella su cui rotola il disco. Il modello è soggetto al peso proprio e alla forza elastica della molla fissata al centro B *del disco* e nel punto fisso O.

STATICA.
Determinare:

1) la costante elastica della molla c in modo che il modello sia in equilibrio nella configurazione $\varphi = \pi/3$ e, per tale valore di c, discuterne la stabilità;

2) le reazioni vincolari esterne sul modello in A e in C, all'equilibrio ;

3) le reazioni vincolari interne sul disco nel punto B.

DINAMICA.

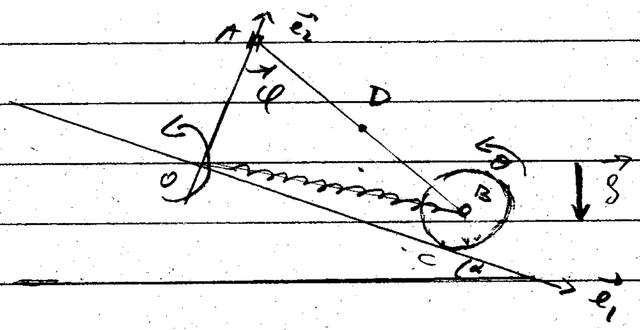
4) Scrivere un'equazione differenziale pura di moto;

5) calcolare le reazioni vincolari esterne in A e sul disco in C durante il moto, in funzione di φ, a partire dalle condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot\varphi(0) = 0$;

6) le reazioni vincolari interne sul disco nel punto B durante il moto, in funzione di φ, a partire dalle condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot\varphi(0) = 0$ (solo 6 CFU);

6a) scrivere l'equazione di Lagrange linearizzata intorno alla configurazione di equilibrio del punto 1) e calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni (solo 9 CFU).

Tema del 4/02/2013



Il modello ha 1 grado di libertà, come si evince dal metodo dei congelamenti successivi. Infatti, se si congela lo spostamento virtuale di puro rotolamento del disco, anche l'asta rimane congelata. Scegliamo come coordinata libera l'angolo φ di figura

$$-\pi < \varphi \le \pi$$

Allora

(1.1) $\vec{x}_B = L\sin\varphi\,\vec{e}_1 + R\,\vec{e}_2$, $\dot{\vec{x}}_B = L\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_1$

(1.2) $\left(\vec{x}_D - \vec{x}_B\right) = \frac{L}{2}\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)$

(1.3) $\vec{x}_D = \vec{x}_B + \left(\vec{x}_D - \vec{x}_B\right) = \frac{L}{2}\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \left(\frac{L}{2}\cos\varphi + R\right)\vec{e}_2$

(1.4) $\vec{g} = g\left(\sin\alpha\,\vec{e}_1 - \cos\alpha\,\vec{e}_2\right)$

(1.5) $\vec{\omega}^{(asta)} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3$

(1.6) $\vec{\omega}^{(d)} = \dot{\theta}\,\vec{e}_3 = -\frac{\dot{s}}{R}\,\vec{e}_3 = -\frac{\dot{\vec{x}}_B\cdot\vec{e}_1}{R}\,\vec{e}_3 = -\frac{L}{R}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_3$

Statica

Si tratta di un problema inverso.
La sollecitazione attiva, data dal peso proprio e dalla molla con un estremo fisso è conservativa, quindi ammette energia potenziale

(2.1) $$V(\varphi) = \frac{1}{2} c\, \overline{OB}^2 - m\vec{g} \cdot \vec{x}_D - 3m\vec{g} \cdot \vec{x}_B$$

$$\overline{OB}^2 = |\vec{x}_B - \vec{x}_O|^2 = (L \sin\varphi)^2 + R^2$$

Dunque,

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} c \left(L^2 \sin^2\varphi + R^2\right) - mg\left(\sin\alpha\, \vec{e}_1 - \cos\alpha\, \vec{e}_2\right) \cdot \left[\frac{L}{2} \sin\varphi\, \vec{e}_1 + \left(\frac{L}{2}\cos\varphi + R\right)\vec{e}_2\right] +$$

$$- 3mg\left(\sin\alpha\, \vec{e}_1 - \cos\alpha\, \vec{e}_2\right) \cdot \left(L \sin\varphi\, \vec{e}_1 + R\, \vec{e}_2\right) =$$

(2.2) $$= \frac{1}{2} c \left(L^2 \sin^2\varphi + R^2\right) - mg\left(\frac{L}{2} \sin\alpha \sin\varphi - \cos\alpha \left(\frac{L}{2}\cos\varphi + R\right)\right) +$$

$$- 3mg\left(L \sin\alpha \sin\varphi - R\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2} c L^2 \sin^2\varphi - \frac{7}{2} mgL \sin\alpha \sin\varphi + \frac{mg}{2} L \cos\alpha \cos\varphi\,,$$

trascurando le costanti additive.
In base al Teo di stazionarietà dell'energia potenziale, imponiamo che $\varphi = \frac{\pi}{3}$ sia un punto stazionario per $V(\varphi)$. A tale scopo calcoliamo

(2.3) $$V'(\varphi) = cL^2 \sin\varphi \cos\varphi - \frac{7}{2} mgL \sin\alpha \cos\varphi - \frac{mg}{2} L \cos\alpha \sin\varphi$$

e richiediamo che

(2.4) $$0 = V'\left(\frac{\pi}{3}\right) = cL^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} - \frac{7}{2} mgL \sin\alpha \frac{1}{2} - mg\frac{L}{2} \cos\alpha \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La (2.4) è soddisfatta se la costante elastica della molla è pari a:

(2.5) $$c = \frac{mg}{L}\left(\frac{7}{\sqrt{3}} \sin\alpha + \cos\alpha\right)$$

Quindi, se c assume il valore (2.5) la configurazione

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

è di equilibrio. Studiamone la stabilità, valutando la derivata seconda di $V(\varphi)$.

$$(3.1)\quad V''(\varphi) = cL^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{7}{2} mgL \sin\alpha \sin\varphi - \frac{mg}{2} L \cos\alpha \cos\varphi$$

$$(3.2)\quad V''\left(\frac{\pi}{3}\right) = cL^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + \frac{7}{2} mgL \sin\alpha \frac{\sqrt{3}}{2} - mg\frac{L}{2} \cos\alpha \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{cL^2}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{4} mgL \sin\alpha - \frac{mgL}{4}\cos\alpha$$

$$= -\frac{L^2}{2}\frac{mg}{L}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\sin\alpha + \cos\alpha\right) + \frac{7\sqrt{3}}{4} mgL \sin\alpha - \frac{mgL}{4}\cos\alpha$$

$$= mgL\left[\left(-\frac{7}{2\sqrt{3}} + \frac{7\cdot 3}{4\sqrt{3}}\right)\sin\alpha - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\cos\alpha\right]$$

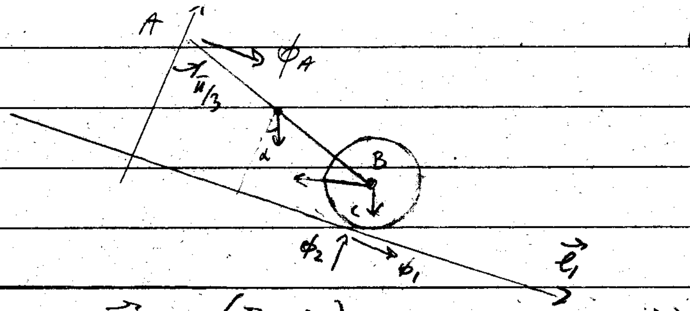
$$= mgL\left(\frac{7}{4\sqrt{3}}\sin\alpha - \frac{3}{4}\cos\alpha\right)$$

Il segno di $V''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ dipende dalla pendenza α della guida. Precisamente,

$$(3.3)\quad V''\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0 \iff \operatorname{tg}\alpha > \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

Dunque, si ha la situazione seguente

$$\alpha \begin{cases} > \arctan\frac{3\sqrt{3}}{7} \Rightarrow V''\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0 \Rightarrow V\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ min} \Rightarrow \text{stabile} \\ = \arctan\frac{3\sqrt{3}}{7} \Rightarrow V''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{caso dubbio} \\ < \arctan\frac{3\sqrt{3}}{7} \Rightarrow V''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 \Rightarrow V\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ max} \Rightarrow \text{instabile} \end{cases}$$



2) <u>Reazioni vincolari esterne</u>

Le incognite sono

$$\vec{\phi}_A = \phi_A \vec{e}_1$$

$$\vec{\phi}_C = \phi_1 \vec{e}_1 + \phi_2 \vec{e}_2$$

$$\vec{F}_B = -c\left(\vec{x}_B - \vec{x}_0\right) = -c\left(L \sin\varphi \vec{e}_1 + R \vec{e}_2\right)$$

Uso la I ECS su tutto il modello e la II ECS con polo in B sul solo disco.

$$\begin{aligned}
\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_1 &: \quad \phi_A + \phi_1 + m\vec{g} \cdot \vec{e}_1 + 3m\vec{g} \cdot \vec{e}_1 + \vec{F}_B^{(el)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\
\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_2 &: \quad \phi_2 + m\vec{g} \cdot \vec{e}_2 + 3m\vec{g} \cdot \vec{e}_2 + \vec{F}_B^{el} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\
\vec{M}_B^{(el)} \cdot \vec{e}_3 &: \quad \phi_1 R = 0
\end{aligned}$$

Quindi, il sistema risolutivo è

$$\begin{cases}
\phi_1 = 0 \\
\phi_A + 4mg \sin\alpha - cL \sin\varphi_e = 0 \\
\phi_2 - 4mg \cos\alpha - cR = 0
\end{cases}$$

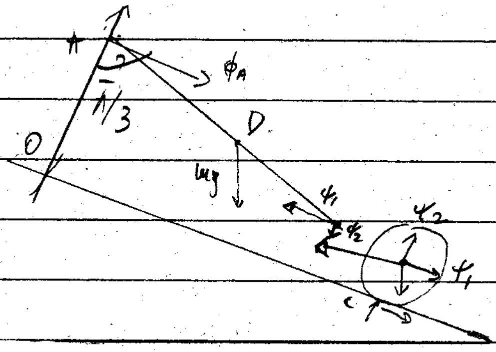
Dunque, le reazioni in A e in C risultano

$$\phi_A = -4mg \sin\alpha + \frac{mg}{L}\left(\frac{7}{\sqrt{3}} \sin\alpha + \cos\alpha\right) L \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{mg}{2}\left(-\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha\right)$$

$$\phi_1 = 0$$

$$\phi_2 = 4mg \cos\alpha + \frac{mg}{L}\left(\frac{7}{\sqrt{3}} \sin\alpha + \cos\alpha\right) R \quad > 0$$

3) <u>Reazioni interne in B sul disco</u>



Le incognite sono 2, ψ_1 e ψ_2, le azioni interne dell'asta sul disco. La maniera più semplice per calcolarle è quella di applicare la I ECS alla sola asta

$$(5.1)\quad \vec{R}^{est\to asta}\cdot\vec{e}_1 : \quad \phi_A + mg\sin\alpha - \psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = mg\sin\alpha + \frac{mg}{2}(-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha) = \frac{mg}{2}(\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha) > 0$$

$$(5.2)\quad \vec{R}^{est\to asta}\cdot\vec{e}_2 : \quad -mg\cos\alpha - \psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_2 = -mg\cos\alpha < 0$$

Quindi, la reazione sul disco è $\vec{\psi}_B = \frac{mg}{2}(\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)\vec{e}_1 - mg\cos\alpha\,\vec{e}_2$.

4) <u>Eq. pura di moto</u>

Scriviamo l'EL relativa alla coordinata libera φ.
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$(5.3)\quad K = K^{(a)} + K^{(d)}$$

$$(5.4)\quad K^{(a)} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_D|^2 + \frac{1}{2}J_D^{(a)}|\vec{\omega}^{(a)}|^2$$

$$(5.5)\quad \vec{v}_D = \dot{\vec{x}}_D \overset{(1.3)}{=} \frac{L}{2}(\cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_2)\dot{\varphi}$$

$$(5.6)\quad |\vec{v}_D|^2 = \frac{L^2}{4}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

$$(5.7)\quad J_D^{(a)} = \frac{1}{12}mL^2$$

Quindi

$$(5.8)\quad K^{(a)} = \frac{1}{2}\left(m\frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{12}mL^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{6}mL^2\dot{\varphi}^2$$

(6.1) $K^{(d)} = \frac{1}{2}(3m)|\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2} J_B^{(d)} |\vec{\omega}^{(d)}|^2 \qquad J_B^{(d)} = \frac{1}{2}(3m)R^2$

(6.2) $\vec{v}_B \overset{(1.1)}{=} L\cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_1 \qquad \vec{\omega}^{(d)} \overset{(1.6)}{=} -\frac{L}{R}\cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_3$

(6.3) $|\vec{v}_B|^2 = L^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 \qquad |\vec{\omega}^{(d)}|^2 = \frac{L^2}{R^2}\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2$

(6.4)
$$K^{(d)} = \frac{1}{2}\left(3m L^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{3}{2} m \cancel{R^2}\frac{L^2}{\cancel{R^2}}\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} m L^2 \cos^2\varphi\right)\dot\varphi^2$$

Dunque

(6.5) $K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m L^2\dot\varphi^2 + \frac{9}{2} m L^2 \cos^2\varphi\,\dot\varphi^2\right) = \frac{1}{2} m L^2\left(\frac{1}{3}+\frac{9}{2}\cos^2\varphi\right)\dot\varphi^2$

Scriviamo l'EL.

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi} = mL^2\left(\frac{1}{3}+\frac{9}{2}\cos^2\varphi\right)\dot\varphi$$

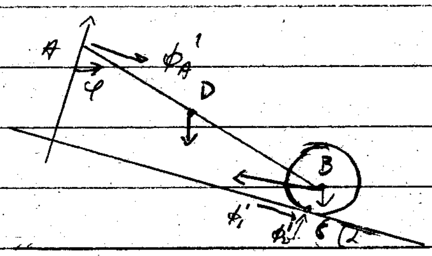
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi}\right) = mL^2\left(\frac{1}{3}+\frac{9}{2}\cos^2\varphi\right)\ddot\varphi - mL^2\, 9\cos\varphi\sin\varphi\,\dot\varphi^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial\varphi} = -mL^2\frac{9}{2}\cos\varphi\sin\varphi\,\dot\varphi^2$$

Allora, l'EL risulta

(6.6) $mL^2\left(\frac{1}{3}+\frac{9}{2}\cos^2\varphi\right)\ddot\varphi - mL^2\frac{9}{2}\cos\varphi\sin\varphi\,\dot\varphi^2 = -cL^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{mg}{2}L\left(7\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi\right)$

Reazioni dinamiche in A e C



Le incognite sono $(\phi_A', \phi_1', \phi_2')$.
Come in statica, uso la I ECD
su tutto il modello e la II ECD sul disco.

$$(7.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{est} = m\,\ddot{\vec{x}}_D + 3m\,\ddot{\vec{x}}_B \\ \vec{M}_B^{est \to disco} = \dfrac{d\vec{L}_B^{(d)}}{dt} \end{cases}$$

$$(7.2)\quad \ddot{\vec{x}}_D = \dot{\vec{v}}_D = \frac{L}{2}\left[\left(-\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_1 - \left(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_2\right]$$

$$(7.3)\quad \ddot{\vec{x}}_B = \dot{\vec{v}}_B = L\left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right)\vec{e}_1$$

$$(7.4)\quad \vec{L}_B^{(d)} = \mathbb{I}_B^{(d)}(\vec{\omega}) = J_B^{(d)}\,\vec{\omega}^{(d)} = \frac{3}{2}mR^2\left(-\frac{L}{R}\cos\varphi\,\dot\varphi\right)\vec{e}_3 = -\frac{3}{2}mLR\cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_3$$

$$(7.5)\quad \frac{d\vec{L}_B^{(d)}}{dt} = -\frac{3}{2}mLR\left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right)\vec{e}_3$$

Allora, il sistema (7.1) si scrive

$$(7.6)\quad \begin{cases} \vec{e}_1: & \phi_A' + \phi_1' + 4mg\sin\alpha - cL\sin\varphi = m\dfrac{L}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi\right) + 3mL\left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right) \\ \vec{e}_2: & \phi_2' - 4mg\cos\alpha - cR = -m\dfrac{L}{2}\left(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right) \\ \vec{e}_3: & \phi_1' R = -\dfrac{3}{2}mLR\left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right) \end{cases}$$

e le reazioni, in funzione di φ e delle sue derivate, risultano

$$(7.7)\quad \begin{aligned} \phi_1' &= -\frac{3}{2}mL\left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right) \\ \phi_2' &= 4mg\cos\alpha + cR - m\frac{L}{2}\left(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right) \\ \phi_A' &= -4mg\sin\alpha + cL\sin\varphi + 5mL\left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right) \end{aligned}$$

Per scrivere le reazioni (7.7) in funzione della sola coordinata libera φ, dobbiamo eliminare dalle (7.7) $\dot\varphi$ e $\ddot\varphi$. A tale scopo, osserviamo che il modello è una macchina semplice e i vincoli sono non dissipativi e fissi. Quindi si conserva l'energia meccanica. Dunque

$$(8.1)\qquad E(t) = K + V = E\big|_{t=0}$$

cioè

$$(8.2)\qquad \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{9}{2}\cos^2\varphi\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} c L^2 \sin^2\varphi + \frac{mg}{2} L \left(\cos\alpha\cos\varphi - 7\sin\alpha\sin\varphi\right) = E\big|_{t=0}$$

dove la costante dell'energia in base alle condizioni iniziali, è data da

$$(8.3)\qquad E\big|_{t=0} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha$$

Dunque, risolvendo la (8.2) rs. a $\dot\varphi^2$ e tenendo conto della (8.3) si ottiene

$$(8.4)\qquad \dot\varphi^2 = \frac{-\frac{1}{2} c L^2 \sin^2\varphi + mg\frac{L}{2}\cos\alpha\,(1-\cos\varphi) + \frac{7}{2} mgL\sin\alpha\sin\varphi}{\frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{9}{2}\cos^2\varphi\right)} = f(\varphi)$$

Sostituendo la (8.4) nell'EL (6.6) e risolvendola rs. a $\ddot\varphi$ otteniamo

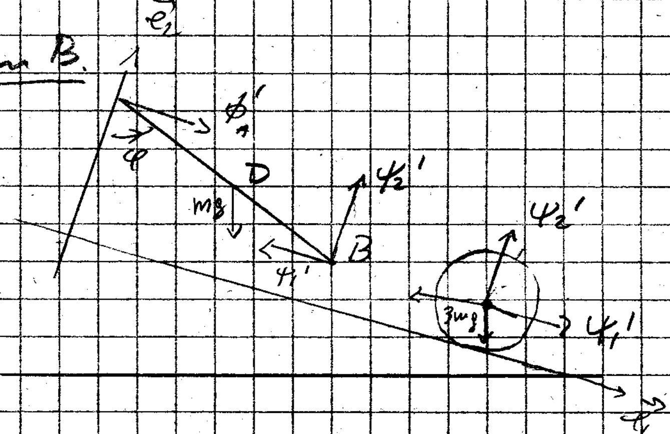
$$(8.5)\qquad \ddot\varphi = \frac{\frac{9}{2} m L^2 \sin\varphi\cos\varphi\, f(\varphi) - c L^2 \sin\varphi\cos\varphi + \frac{mgL}{2}\left(7\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi\right)}{m L^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{9}{2}\cos^2\varphi\right)} = g(\varphi)$$

Sostituendo la (8.4) e la (8.5) nelle (7.7) si ottiene la risposta

6) Reazioni dinamiche sul disco in B.

L'incognita è $\vec{\Psi}'_B = \Psi_1'\vec{e}_1 + \Psi_2'\vec{e}_2$.

Per determinarla, conviene applicare la I ECD all'asta



(9.1) $$\vec{R}^{\,ext \to asta} = m\,\ddot{\vec{x}}_D$$

Scomponendo lungo i versori $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ si ottiene

(9.2) $$\begin{cases} \vec{e}_1: & \phi_A' + mg\sin\alpha - \Psi_1' = m\dfrac{L}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi\right) \\ \vec{e}_2: & -mg\cos\alpha - \Psi_2' = -m\dfrac{L}{2}\left(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right) \end{cases}$$

Quindi

$$\Psi_1' = +mg\sin\alpha + \phi_A' - m\frac{L}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi\right)$$

$$\overset{(7.7)}{=} mg\sin\alpha - 4mg\sin\alpha + cL\sin\varphi + 5mL\left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right) + - m\frac{L}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi\right)$$

$$= -3mg\sin\alpha + cL\sin\varphi + \frac{9}{2}mL\left(\cos\varphi\,\ddot\varphi - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right)$$

$$\Psi_2' = -mg\cos\alpha + m\frac{L}{2}\left(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right)$$

Sostituendo la (8.4) e la (8.5) si ottiene la risposta.

6a) EL linearizzata intorno all'equilibrio $\varphi_e = \frac{\pi}{3}$

Introducendo la variabile scarto:

(10.1) $$\eta = \frac{\varphi - \frac{\pi}{3}}{\varepsilon}$$

la EL (6.6) linearizzata sarà:

(10.2) $$a(q_e)\,\ddot{\eta} + V''(q_e)\,\eta = 0 \qquad q_e = \frac{\pi}{3}$$

Allora, poiché

(10.3) $$a(q) = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\varphi}^2} = mL^2\left(\frac{1}{3} + \frac{9}{2}\cos^2\varphi\right),$$

tenendo conto della (3.7) si ottiene l'eq. lineare

(10.4) $$\frac{35}{24}\,mL^2\,\ddot{\eta} + \frac{mgL}{4}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\sin\alpha - 3\cos\alpha\right)\eta = 0$$

L'integrale generale della (10.4) è di 3 tipi:

(10.5) $$\eta(t) = \begin{cases} \eta_0\cos\nu t + \frac{v_0}{\nu}\sin\nu t & \alpha > \arctan\frac{3\sqrt{3}}{7} \\ \eta_0 + v_0 t & \alpha = \arctan\frac{3\sqrt{3}}{7} \\ \eta_0\cosh\nu t + \frac{v_0}{\nu}\sinh\nu t & \alpha < \arctan\frac{3\sqrt{3}}{7} \end{cases}$$

dove

(10.6) $$\nu = \sqrt{\frac{\left|\frac{mgL}{4}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\sin\alpha - 3\cos\alpha\right)\right|}{\frac{35}{24}\,mL^2}} = \sqrt{\frac{6}{35}\,\frac{g}{L}\left|\frac{7}{\sqrt{3}}\sin\alpha - 3\cos\alpha\right|}$$

Il moto è oscillatorio solo se $\alpha > \arctan\frac{3\sqrt{3}}{7}$; in questo caso la pulsazione è pari a

(10.7) $$\sqrt{\frac{6}{35}\,\frac{g}{L}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\sin\alpha - 3\cos\alpha\right)}$$