Compito di Meccanica Razionale

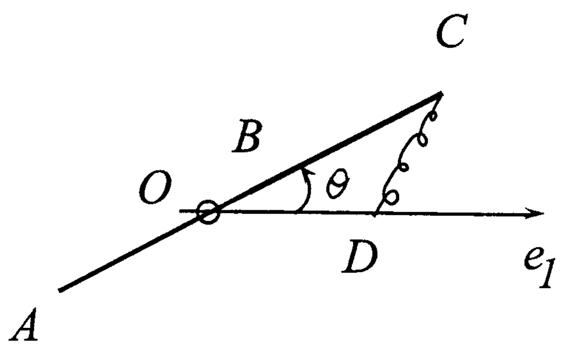
Trieste, 5 giugno 2012

(G. Tondo)

È dato l'asta rigida di figura formato da due pezzi di materiali diversi saldati tra loro, entrambi omogenei e di lunghezza L. Il tratto AB ha massa m, il tratto BC ha massa $3m$.

1) Determinare il baricentro G dell'asta e il suo momento d'inerzia rispetto a un asse passante per G e ortogonale all'asta.

STATICA.



Nel piano **orizzontale**, si vincoli l'asta a passare per un anellino liscio fissato nel punto O. La sollecitazione attiva è data dalla forza di richiamo della molla, di costante elastica c, collegata all'estremo C e al punto fisso D posto a distanza h da O, $h \ll 2L$.

Dette (ρ, θ) le coordinate polari piane dell'estremo C dell'asta, $0 < \rho < 2L$, si chiede di:

2) determinare le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità;

3) calcolare la reazione vincolare esterna all'equilibrio nel punto dell'asta O', che è a contatto con l'anellino in O.

DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto dell'asta;

5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, calcolarne il valore per il moto di condizioni iniziali

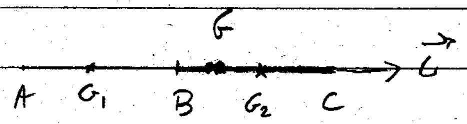
$$\rho = h\ , \quad \theta = \frac{\pi}{2}\ ; \qquad \dot\rho = 0\ , \quad \dot\theta = 0\ ;$$

6) calcolare la reazione vincolare in O' durante il moto e dimostrare che è sempre ortogonale all'asta (solo 6 CFU);

6a) linearizzare le equazioni di Lagrange intorno alle configurazioni di equilibrio, calcolarne le frequenze normali di vibrazione e scriverne l'integrale generale (solo 9 CFU).

Tema del 5/06/2012

1) Consideriamo il riferimento $(A;\vec{i})$



$$\vec{x}_G = \frac{m\vec{x}_{G_1} + 3m\vec{x}_{G_2}}{4m}$$ per la proprietà distributiva

$$= \frac{\frac{L}{2}\vec{i} + 3\,\frac{3}{2}L\vec{i}}{4} = \frac{\cancel{10}^{\,5}\,L\vec{i}}{\cancel{8}_{\,4}} = \frac{5L\vec{i}}{4} \Rightarrow \overline{G_2C} = \frac{3L}{4}$$

$$I_G = I_G^{(AB)} + I_G^{(BC)} \qquad I_G^{(AB)} = I_{G_1}^{(AB)} + m\overline{G_1G},\quad I_G^{(BC)} = I_{G_2}^{(BC)} + 3m\overline{G_2G}$$

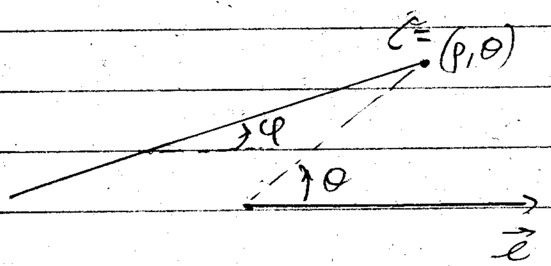
$$\overline{G_1G} = \frac{5}{4}L - \frac{L}{2} = \frac{3}{4}L, \qquad \overline{G_2G} = \frac{3}{2}L - \frac{5}{4}L = \frac{1}{4}L$$

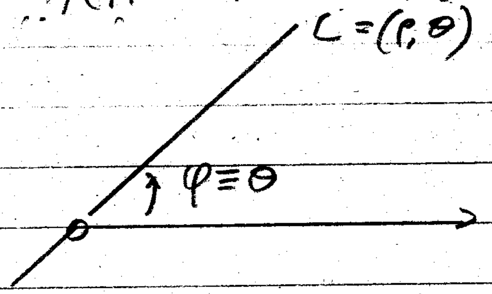
$$I_G^{(AB)} = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{31}{48}mL^2;\quad I_G^{(BC)} = 3m\frac{1}{12}L^2 + 3m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}mL^2$$

Quindi

$$I_G = \frac{31}{48}mL^2 + \frac{7}{16}mL^2 = \frac{52}{48}mL^2 = \frac{13}{12}mL^2$$

2) Finché l'asta è infilata nell'anellino ha 2 g.l. poiché ammette 2 spostamenti virtuali indipendenti: lo scorrimento lungo la direzione dell'asta e la rotazione intorno all'asse ortogonale al piano e passante per O. Del resto, se scegliamo come coordinate sovrabbondanti le coordinate $\{(\rho, \theta, \varphi)\}$ di figura





dell'asta libera nel piano, quando l'asta è vincolata a passare nell'anellino, l'equazione di vincolo è data da

$$\theta - \varphi = 0$$

che è sempre un vincolo semplice ed efficace.

Equilibri

Poiché la molla ha un estremo fisso in D, esercita una sollecitazione conservativa di energia potenziale

$$V(\rho,\theta) = \frac{1}{2} c\, \overline{CD}^2 \qquad \overline{CD}^2 = \rho^2 + h^2 - 2\rho h \cos\theta$$

$$= \frac{1}{2} c \left(\rho^2 - 2\rho h \cos\theta\right) \qquad \text{trascurando il termine costante}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = c(\rho - h\cos\theta) = -Q_\rho$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = c\rho h \sin\theta = Q_\theta$$

le equazioni pure di equilibrio sono:

$$\begin{cases} c(\rho - h\cos\theta) = 0 \\ c\rho\, h \sin\theta = 0 \end{cases}$$

La seconda implica (poichè $\rho > 0$)

$$\sin\theta = 0 \quad \Leftarrow \theta = 0, \pi$$

che, sostituite nella prima forniscono

$$\rho = h \quad , \quad \rho = -h .$$

Di queste, solo la prima soluzione è accettabile poichè $\rho > 0$, quindi, l'unica configurazione di equilibrio è data da

$$\vec{q}_e = (h, 0) .$$

Determiniamone la stabilità. A tale scopo, calcoliamo

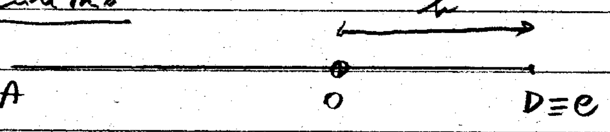
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = c , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \rho} = c h \sin\theta = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \theta} , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = c\rho h \cos\theta$$

Quindi, la matrice Hessiana valutata in $\vec{q}_e$ è data da

$$\mathcal{H}_{|\vec{q}_e} = \left[\begin{array}{c|c} c & c h \sin\theta \\ \hline c h \sin\theta & c\rho h \cos\theta \end{array}\right]_{|\vec{q}_e = (h,0)} = \left[\begin{array}{c|c} c & 0 \\ \hline 0 & c h^2 \end{array}\right] ,$$

che è definita positiva. Quindi $\vec{q}_e$ è un punto di minimo per V e ciò implica la stabilità dell'equilibrio

3) Reazione vincolare su O' all'equilibrio



Dalla I ECS

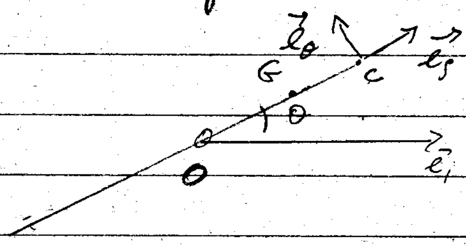
$$\vec{\phi}_{O'} + \cancel{\vec{F}_c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\phi}_{O'} = \vec{0}$$

Dinamica

4) Scriviamo le eq. di Lagrange. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica dell'asta

$$K = \frac{1}{2}(4m)\, v_G^2 + \frac{1}{2} I_G\, \dot{\theta}^2$$

Per il calcolo di $\vec{v}_G$ usiamo le coordinate polari di G.



$$\vec{x}_G = \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\vec{e}_\rho$$

$$\vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\dot{\vec{e}}_\rho =$$

$$= \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$v_G^2 = \dot{\rho}^2 + \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)^2\dot{\theta}^2$$

Pertanto

$$K = 2m\left[\dot{\rho}^2 + \left(\rho - \frac{3L}{4}\right)^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{13}{24}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$= m\left[2\dot{\rho}^2 + 2\rho^2\dot{\theta}^2 - 3L\rho\dot{\theta}^2 + \left(\frac{9}{8}L^2 + \frac{13}{24}L^2\right)\dot{\theta}^2\right] =$$

$$= m\left[2\dot{\rho}^2 + \left(2\rho^2 - 3L\rho + \frac{5}{3}L^2\right)\dot{\theta}^2\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\rho} = 4m\dot\rho \;, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\rho}\right) = 4m\ddot\rho \;, \quad \frac{\partial K}{\partial \rho} = \left(4m\rho - 3mL\right)\dot\theta^2$$

$$EL(\rho): \quad 4\ddot\rho - \left(4\rho - 3L\right)\dot\theta^2 = \frac{c}{m}\left(h\cos\theta - \rho\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = 2m\left(2\rho^2 - 3L\rho + \frac{5}{3}L^2\right)\dot\theta \,, \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = 2m\left(4\rho\dot\rho - 3L\dot\rho\right)\dot\theta + 2m\left(2\rho^2 - 3L\rho + \frac{5}{3}L^2\right)\ddot\theta$$

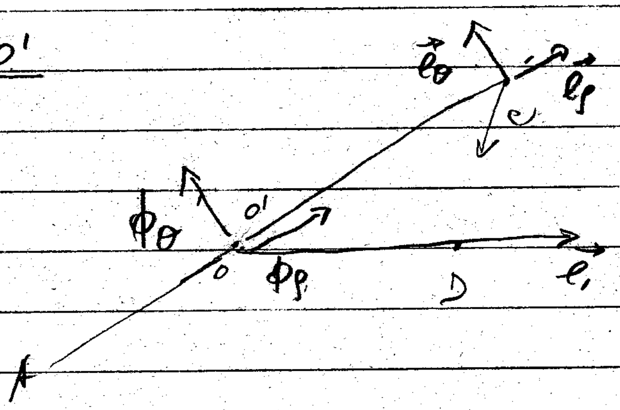
$$EL(\theta): \quad \left(2\rho^2 - 3L\rho + \frac{5}{3}L^2\right)\ddot\theta + \left(4\rho - 3L\right)\dot\rho\dot\theta = \frac{-c}{2m}\rho h\sin\theta$$

5) La sollecitazione attiva è conservativa, i vincoli sono olonomi, bilateri, non dissipativi e fissi, quindi l'energia meccanica si conserva.

$$E = K + V = m\left[2\dot\rho^2 + \left(2\rho^2 - 3L\rho + \frac{5}{3}L^2\right)\dot\theta^2\right] + \frac{1}{2}c\left(\rho^2 - 2\rho h\cos\theta\right)$$

$$= E(t=0) = V\left(\rho = h, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}ch^2$$

6) Reazioni vincolari dinamiche in O'



Dalla I ECD

$$\begin{cases} \phi'_\rho + \vec{F}_c \cdot \vec{e}_\rho = 4m\, \vec{a}_G \cdot \vec{e}_\rho \\ \phi'_\theta + \vec{F}_c \cdot \vec{e}_\theta = 4m\, \vec{a}_G \cdot \vec{e}_\theta \end{cases}$$

$$\vec{F}_c = -c(C-D) = -c\left[(C-O)+(O-D)\right] = -c\left(\rho \vec{e}_\rho - h\vec{e}_1\right)$$
$$= -c\left[\rho \vec{e}_\rho - h\left(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_\rho\, \vec{e}_\rho + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_\theta\, \vec{e}_\theta\right)\right]$$
$$= -c\left[\rho \vec{e}_\rho - h\left(\cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_\theta\right)\right]$$
$$= -c\left[(\rho - h\cos\theta)\vec{e}_\rho + h\sin\theta\, \vec{e}_\theta\right]$$

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\vec{e}}_\rho + \left[\dot{\rho}\dot{\theta} + \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\ddot{\theta}\right]\vec{e}_\theta + \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_\theta$$
$$= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \left[\dot{\rho}\dot{\theta} + \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\ddot{\theta}\right]\vec{e}_\theta - \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\dot{\theta}^2\,\vec{e}_\rho$$
$$= \left[\ddot{\rho} - \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\dot{\theta}^2\right]\vec{e}_\rho + \left[2\dot{\rho}\dot{\theta} + \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\ddot{\theta}\right]\vec{e}_\theta$$

Pertanto,

$$\phi'_\rho = \cancel{c(\rho - h\cos\theta) + 4m\left[\ddot{\rho} - \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\dot{\theta}^2\right]}$$
$$\phi'_\theta = c\,h\sin\theta + 4m\left[2\dot{\rho}\dot{\theta} + \left(\rho - \frac{3}{4}L\right)\ddot{\theta}\right]$$

Inoltre, dalla $EL(\rho)$ segue che

$$\phi'_\rho = 0$$

6a) linearizzazione delle EL intorno a $\vec{q}_e$

Poiché la sollecitazione è conservativa, le eq. di Lagrange linearizzate intorno alla configurazione di equilibrio sono

$$A\ddot{\vec{x}} + \mathcal{V}\vec{x} = \vec{0} \qquad \vec{x} := \frac{1}{\varepsilon}\left(\vec{q} - \vec{q}_e\right),$$

dove la matrice di massa A è data da

$$A = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 K}{\partial \dot{\rho}^2} & \dfrac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta}\partial\dot{\rho}} \\ \dfrac{\partial^2 K}{\partial\dot{\rho}\partial\dot{\theta}} & \dfrac{\partial^2 K}{\partial\dot{\theta}^2} \end{bmatrix}\right|_{\vec{q}_e} = m\left.\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2\left(2\rho^2 - 3L\rho + \frac{5}{3}L^2\right) \end{bmatrix}\right|_{\vec{q}_e = (h,0)} =$$

$$= m\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2\left(2h^2 - 3Lh + \frac{5}{3}L^2\right) \end{bmatrix},$$

e la matrice di rigidezza $\mathcal{V}$ da

$$\mathcal{V} = \mathcal{H}\big|_{\vec{q}_e} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & ch^2 \end{bmatrix}$$

Pertanto, le eq. di Lagrange linearizzate sono

$$\begin{cases} 4m\ddot{x}_1 + cx_1 = 0 \\ 2m\left(2h^2 - 3hL + \frac{5}{3}L^2\right)\ddot{x}_2 + ch^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che le equazioni sono già disaccoppiate, quindi si possono integrare immediatamente e forniscono.

$$x_1(t) = x_{10} \cos \nu_1 t + \frac{v_{10}}{\nu_1} \sin \nu_1 t$$

$$x_2(t) = x_{20} \cos \nu_2 t + \frac{v_{20}}{\nu_2} \sin \nu_2 t \ ,$$

cioè 2 moti oscillatori con frequenze di vibrazione pari, rispettivamente a

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{c}{4m}} \ , \qquad \nu_2 = \sqrt{\frac{c\,h^2}{2m\left(2h^2 - 3hL + \frac{5}{3}L^2\right)}}$$

In questo caso, i modi normali di vibrazione sono

$$\vec{n}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(a_{11} \cos \nu_1 t + a_{12} \sin \nu_1 t\right)$$

$$\vec{n}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(a_{21} \cos \nu_1 t + a_{22} \sin \nu_2 t\right)$$