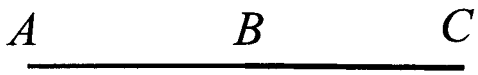
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 1 luglio 2013

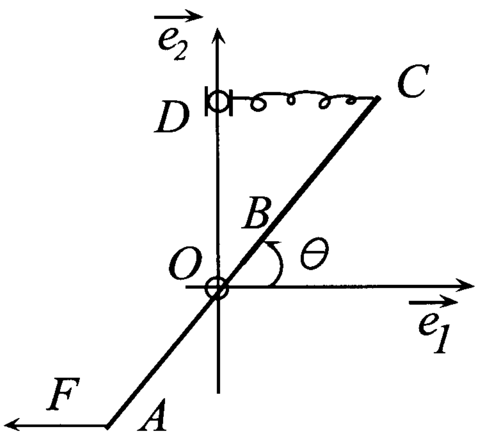
(G. Tondo)



È dato l'asta rigida di figura formato da due pezzi di materiali diversi saldati tra loro, entrambi omogenei e di lunghezza L. Il tratto AB ha massa $2m$, il tratto BC ha massa $3m$.

1) Determinare il baricentro G dell'asta e il suo momento d'inerzia rispetto a un asse passante per G e ortogonale all'asta.

STATICA.



Nel piano **orizzontale**, si vincoli l'asta a passare per un anellino liscio fissato nel punto O. La sollecitazione attiva è data dalla forza di richiamo della molla, di costante elastica c, collegata all'estremo C e sempre parallela al versore $\vec{e}_1$ e dalla forza uniforme $\vec{F}_A = -F\vec{e}_1$, con $F < 2cL$.

Dette (ρ, θ) le coordinate polari piane dell'estremo C dell'asta, $0 < \rho < 2L$, si chiede di:

2) determinare le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità;

3) calcolare la reazione vincolare esterna all'equilibrio nel punto dell'asta O', che è a contatto con l'anellino in O.

DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto dell'asta;

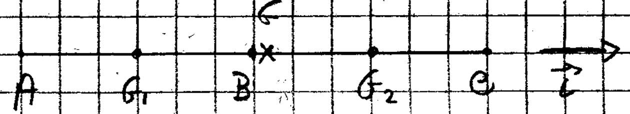
5) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, calcolarne il valore per il moto di condizioni iniziali

$$\rho = L \ , \quad \theta = \frac{\pi}{3} \ ; \qquad \dot{\rho} = 0 \ , \quad \dot{\theta} = 0 \ ;$$

6) calcolare la reazione vincolare in O' durante il moto e dimostrare che è sempre ortogonale all'asta (solo 6 CFU);

6a) linearizzare le equazioni di Lagrange intorno alle configurazioni di equilibrio (solo 9 CFU).

Tema del 1/07/2013



Consideriamo il riferimento $(A; \vec{i})$ e utilizziamo la proprietà distributiva.

$$G - A = \frac{2m(G_1 - A) + 3m(G_2 - A)}{5m} = \frac{2m\frac{L}{2}\vec{i} + 3m\frac{3}{2}L\vec{i}}{5m} = \frac{11}{10}L\vec{i}$$

$$I_G = I_G^{(AB)} + I_G^{(BC)}$$

$$I_G^{(AB)} = I_{G_1}^{(AB)} + 2m\,\overline{G_1G}^2 \qquad \overline{G_1G} = \frac{11}{10}L - \frac{L}{2} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{10}_{5}}L$$

$$= \frac{1}{\cancel{12}_6}(2m)L^2 + 2m\frac{9}{25}L^2$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{18}{25}\right)mL^2 = \frac{133}{150}mL^2$$

$$I_G^{(BC)} = I_{G_2}^{(BC)} + 3m\,\overline{G_2G}^2 \qquad \overline{G_2G} = \frac{3}{2}L - \frac{11}{10}L = \frac{2}{5}L$$

$$= \frac{1}{12}(3m)L^2 + 3m\frac{4}{25}L^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{12}{25}\right)mL^2 = \frac{73}{100}mL^2$$

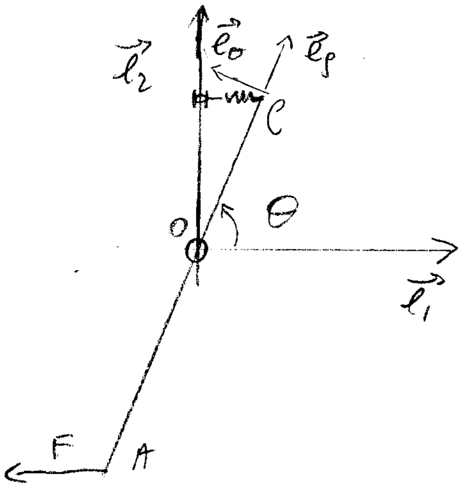
Dunque:

$$I_G = \left(\frac{133}{150} + \frac{73}{100}\right)mL^2 = \frac{485}{300}mL^2 = \frac{97}{60}mL^2$$

Il rigido ha 2 g.l, come si desume con il metodo del bilancio:

$$l = g - r = 3 - 1 = 2$$

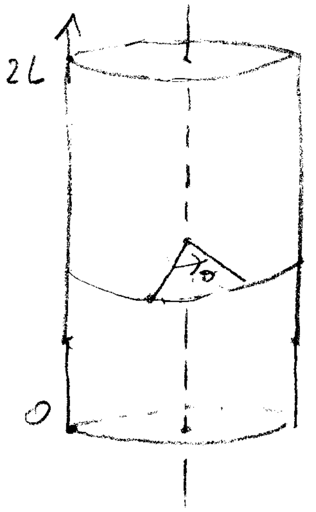
o con il metodo dei congelamenti successivi.



Introducendo le coordinate polari del punto $C = (\rho, \theta)$, si può concludere che lo spazio delle configurazioni è dato da

$$C_V =]0, 2L[\times]-\pi, \pi[$$

cioè dalla superficie di un cilindro di altezza pari a 2L



2) Statica

La sollecitazione è quella di una molla il cui estremo si muove in direzione $\perp$ alla molla sommata a quella di un campo uniforme. Quindi è conservativa e possiamo utilizzare il teo di stazionarietà dell'energia potenziale.

$$V(\rho,\theta) = \frac{1}{2} c\, \overline{DC}^2 - \vec{F}_A \cdot \vec{x}_A \qquad \overline{DC}^2 = (\rho\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2} c \rho^2 \cos^2\theta - \left(-F\vec{e}_1 \cdot (\rho-2L)\vec{e}_\rho\right) \qquad \vec{F}_A = -F\vec{e}_1$$

(3.1)
$$= \frac{1}{2} c \rho^2 \cos^2\theta + F(\rho-2L)\, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_\rho \qquad \vec{x}_A = (\vec{x}_C - \vec{x}_O) + (\vec{x}_A - \vec{x}_C)$$

$$= \rho\vec{e}_\rho - 2L\,\vec{e}_\rho$$

$$= \frac{1}{2} c \rho^2 \cos^2\theta + F(\rho-2L)\cos\theta \qquad = (\rho-2L)\,\vec{e}_\rho$$

$$= (A-O)$$

Quindi

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = c\rho\cos^2\theta + F\cos\theta = \cos\theta\,(F + c\rho\cos\theta) = -Q_\rho$$

(3.2)

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -c\rho^2\cos\theta\sin\theta - F(\rho-2L)\sin\theta = -\left[F(\rho-2L) + c\rho^2\cos\theta\right]\sin\theta = -Q_\theta$$

Allora, i punti stazionari della funzione V sono tutte e sole le soluzioni del sistema

(3.3)
$$\begin{cases} \cos\theta\,(F + c\rho\cos\theta) = 0 \\ \sin\theta\,\left[F(\rho-2L) + c\rho^2\cos\theta\right] = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema (3.3) si trova

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ F(\rho-2L)+c\rho^2\cos\theta = 0 \end{cases} \quad vel \quad \begin{cases} F+c\rho\cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \quad vel \quad \begin{cases} F+c\rho\cos\theta = 0 \\ F\rho+c\rho^2\cos\theta = 2LF \end{cases}$$

Dunque

$$\begin{cases} \theta = \pm\frac{\pi}{2} \\ \rho = 2L \end{cases} \quad vel \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ \rho = -\frac{F}{c} \end{cases} \quad vel \quad \begin{cases} \theta = \pi \\ \rho = \frac{F}{c} \end{cases} \quad vel \quad \begin{cases} c\rho\cos\theta = -F \\ \cancel{F\rho}-\cancel{F\rho} = 2LF \end{cases}$$

L'ultimo sistema è impossibile, mentre le soluzioni dei 3 sistemi precedenti che appartengono allo spazio delle configurazioni C_V si riducono a

$$\vec{q}_e = \left(\frac{F}{c}, \pi\right) \qquad \text{poiché } \frac{F}{c} < 2L \text{ per ipotesi.}$$

Per controllare la stabilità di $\vec{q}_e$, calcoliamo la matrice Hessiana di V e valutiamola in $\vec{q}_e$. Dalla (3.2)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} = c\cos^2\theta \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\rho} = -2c\rho\cos\theta\sin\theta - F\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} = -2c\rho\cos\theta\sin\theta - F\sin\theta \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = -\frac{c\rho^2}{\cancel{2}}\cos 2\theta\,\cancel{2} - F(\rho-2L)\cos\theta$$

Quindi, la matrice Hessiana è:

$$(5.1)\quad \mathcal{H}_V = \begin{bmatrix} c\cos^2\theta & -\sin\theta\,(F+2c\rho\cos\theta) \\ -\sin\theta\,(F+2c\rho\cos\theta) & -c\rho^2\cos 2\theta - F(\rho-2L)\cos\theta \end{bmatrix}$$

Pertanto,

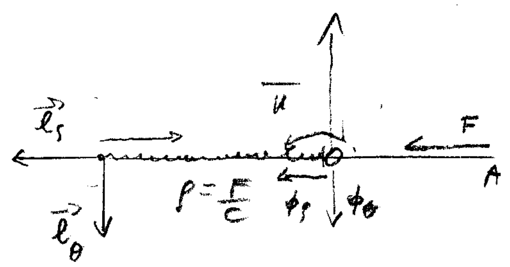
$$\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c\left(\cancel{\frac{F}{c}}\right)^2 + F\left(\cancel{\frac{F}{c}}-2L\right) \end{bmatrix} =$$

$$(5.2)\quad = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -2LF \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \left(\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e}\right)_{11} = c > 0 \\ \det\left(\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e}\right) = -2FLc < 0 \end{matrix}$$

Dunque, $\vec{q}_e$ è un punto di sella, quindi è un equilibrio <u>instabile</u>.

3) Reazione vincolare in O'

Scriviamo la I ECS.



$$\vec{R}^{est} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_c + \vec{F}_A + \vec{\phi}_{O'} = \vec{0}$$

Nella configurazione di equilibrio $\vec{q}_e = \left(\frac{F}{c}, \pi\right)$

$$\cancel{-c\rho_e \vec{e}_1 + F\vec{e}_1} - \phi_\rho \vec{e}_1 - \phi_\theta \vec{e}_2 = 0$$

$$\vec{F}_c = -c\rho_e \vec{e}_1 = -F\vec{e}_1$$

$$\vec{\phi}_{O'} = \phi_\rho \vec{e}_\rho + \phi_\theta \vec{e}_\theta = -\phi_\rho \vec{e}_1 - \phi_\theta \vec{e}_2$$

Pertanto,

$$\vec{\phi}_{O'} = 0$$

Dinamica

4) Scriviamo le 2 eq. di Lagrange relative a (ρ, θ).
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica K.

$$(7.1) \quad K = \frac{1}{2}(5m)|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} J_{3G}|\vec{\omega}|^2 \qquad \vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_3, \quad J_{3G} = I_G = \frac{97}{60} m L^2$$

$$(7.2) \quad \vec{x}_G = G - O = (G-A) + (A-O) = \frac{11}{10} L\,\vec{e}_\rho + (\rho - 2L)\,\vec{e}_\rho$$

$$= \left(\rho - \frac{9}{10}L\right)\vec{e}_\rho$$

$$(7.3) \quad \vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \left(\rho - \frac{9}{10}L\right)\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \left(\rho - \frac{9}{10}L\right)\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$|\vec{v}_G|^2 = \dot{\rho}^2 + \left(\rho - \frac{9}{10}L\right)^2\dot{\theta}^2$$

Dunque,

$$K = \frac{5}{2} m\left[\dot{\rho}^2 + \left(\rho - \frac{9}{10}L\right)^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{2}\frac{97}{60} m L^2 \dot{\theta}^2$$

$$(7.4) \quad \frac{1}{2} m\left[5\dot{\rho}^2 + \left(5\left(\rho - \frac{9}{10}L\right)^2 + \frac{97}{60}L^2\right)\dot{\theta}^2\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\rho} = 5m\dot\rho \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\rho}\right) = 5m\ddot\rho$$

$$\frac{\partial K}{\partial \rho} = m \cdot 5\left(\rho - \frac{9}{10}L\right)\dot\theta^2$$

Quindi, l'eq. di Lagrange associata alla coordinata ρ è

$$(8.1) \quad 5m\ddot\rho - m\left(5\rho - \frac{9}{2}L\right)\dot\theta^2 = -\cos\theta\left(F + e\rho\cos\theta\right).$$

Inoltre,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = m\left[5\left(\rho - \frac{9}{10}L\right)^2 + \frac{97}{60}L^2\right]\dot\theta \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = m\,10\left(\rho - \frac{9}{10}L\right)\dot\rho\,\dot\theta + m\left[5\left(\rho - \frac{9}{10}L\right)^2 + \frac{97}{60}L^2\right]\ddot\theta$$

Dunque, l'eq di Lagrange associata alla coordinata θ è:

$$(8.2) \quad m\left[5\left(\rho - \frac{9}{10}L\right)^2 + \frac{97}{60}L^2\right]\ddot\theta + m\left(10\rho - 9L\right)\dot\rho\dot\theta = \left[F(\rho - 2L) + e\rho^2\cos\theta\right]\sin\theta$$

N.B. Si osservi che la (8.1) coincide con la I ECD proiettata lungo $\vec{e}_\rho$, mentre la (8.2) coincide con la II ECD proiettata lungo $\vec{e}_3$, con la scelta del punto fisso O come polo.

5) Il modello è olonomo con vincoli non dissipativi e indipendenti dal tempo, sollecitazione conservative. Quindi, l'energia meccanica si conserva durante i moti, cioè

$$E_{|t=0} = E = K + V = \frac{1}{2} m\left[5\dot\rho^2 + \left(5\rho^2 - 8L\rho + \frac{17}{3}L^2\right)\dot\theta^2\right] + \frac{1}{2} c\rho^2\cos^2\theta + F(\rho - 2L)\cos\theta$$

Quindi

$$(9.1) \quad E_{|t=0} = \frac{1}{2} c L^2 \frac{1}{4} + F(L - 2L)\frac{1}{2} = \frac{1}{8} cL^2 - F\frac{L}{2}$$

6) Reazione vincolare dinamica in O'.

Dalla IECD: $\vec{R}^{est} = 5m\vec{a}_G$

$$(9.2) \quad \vec{F}_c + \vec{F}_A + \vec{\Phi}_{O'} = 5m\vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G \overset{(7.3)}{=} \ddot\rho\,\vec{e}_\rho + \dot\rho\,\dot{\vec{e}}_\rho + \left[\dot\rho\,\dot\theta + \left(\rho - \frac{8}{10}L\right)\ddot\theta\right]\vec{e}_\theta + \left(\rho - \frac{8}{10}L\right)\dot\theta\,\dot{\vec{e}}_\theta$$

$$(9.3) \quad = \left[\ddot\rho - \left(\rho - \frac{8}{10}L\right)\dot\theta^2\right]\vec{e}_\rho + \left[\left(\rho - \frac{8}{10}L\right)\ddot\theta + 2\dot\rho\,\dot\theta\right]\vec{e}_\theta$$

tenuto conto che

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot\theta\,\vec{e}_\theta \quad , \quad \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot\theta\,\vec{e}_\rho$$

Dunque, proiettando la (9.2) sui versori $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ segue

$$(10.1)\quad \begin{cases} (-c\rho\cos\theta - F)\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_\rho + \phi'_\rho = 5m\left[\ddot{\rho} - \left(\rho - \frac{9}{10}L\right)\dot{\theta}^2\right] \\ (-c\rho\cos\theta - F)\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_\theta + \phi'_\theta = 5m\left[\left(\rho - \frac{9}{10}L\right)\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right] \end{cases}$$

Poichè $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_\rho = \cos\theta$, $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_\theta = -\sin\theta$, le (10.1) si scrivono

$$\begin{cases} -(c\rho\cos\theta + F)\cos\theta + \phi'_\rho = 5m\left[\ddot{\rho} - \left(\rho - \frac{9}{10}L\right)\dot{\theta}^2\right] \\ (c\rho\cos\theta + F)\sin\theta + \phi'_\theta = 5m\left[\left(\rho - \frac{9}{10}\right)L\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right] \end{cases}$$

Pertanto,

$$\phi'_\rho = (c\rho\cos\theta + F)\cos\theta + 5m\left[\ddot{\rho} - \left(\rho - \frac{9}{10}L\right)\dot{\theta}^2\right] \overset{(8.1)}{=} 0$$

$$\phi'_\theta = -(c\rho\cos\theta + F)\sin\theta + 5m\left[\left(\rho - \frac{9}{10}\right)L\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right]$$

6o) <u>Linearizzazione delle EL intorno a</u> $\vec{q}_e = \left(\frac{F}{C}, \pi\right)$

introdotto il vettore degli scarti

$$(11.1) \qquad \vec{x} = \frac{\vec{q} - \vec{q}_e}{\varepsilon}$$

le eq. di Lagrange linearizzate sono

$$(11.2) \qquad A \ddot{\vec{x}} + V \vec{x} = 0, \qquad V = \mathcal{H}_{V|\vec{q}_e}$$

dove la matrice di massa A è data da quella dell'energia cinetica valutata in $\vec{q}_e$. Quindi, dalla (7.4) segue

$$(11.3) \quad A(\vec{q}_e) = m \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5\left(\rho_e - \frac{9}{10}L\right)^2 + \frac{97}{60}L^2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5\left(\frac{F}{C} - \frac{9}{10}L\right)^2 + \frac{97}{60}L^2 \end{bmatrix}$$

Tenendo conto della (5.2) le (11.3) si scrivono

$$(11.4) \quad \begin{cases} 5m\,\ddot{x}_1 + C x_1 = 0 \\ m\left[5\left(\frac{F}{C} - \frac{9}{10}L\right)^2 + \frac{97}{60}L^2\right]\ddot{x}_2 - 2LF\,x_2 = 0 \end{cases}$$

N.B. Si osservi che le 2 eq. linearizzate sono disaccoppiate, quindi si integrano immediatamente e forniscono, soluzioni oscillatorie, la prima, iperboliche, la seconda.