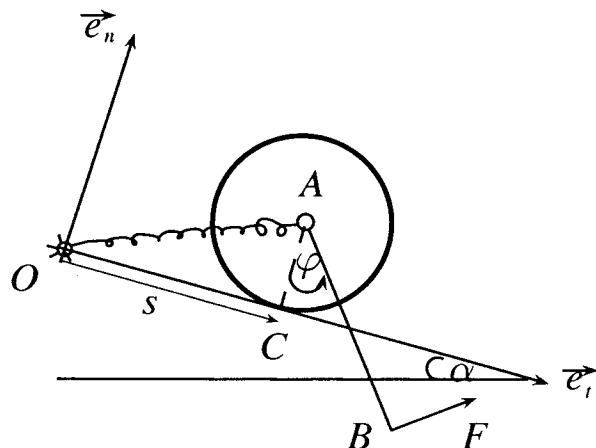


# Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 10 giugno 2013

(G. Tondo)



Si consideri il sistema di figura costituito da un disco omogeneo di massa  $3m$  e raggio  $R$ , che rotola senza strisciare su una guida fissa e inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo  $\alpha$ . Al centro del disco  $A$  è incernierata un'asta omogenea di lunghezza  $L$  e massa  $m$ . Il modello, posto nel piano verticale passante per la guida, è soggetto al peso proprio, alla forza della molla di costante elastica  $c$ , fissata all'estremo dell'asta  $A$  e nel punto fisso  $O$ , alla forza  $F$  applicata all'estremo  $B$  dell'asta e sempre ortogonale all'asta.

## STATICA.

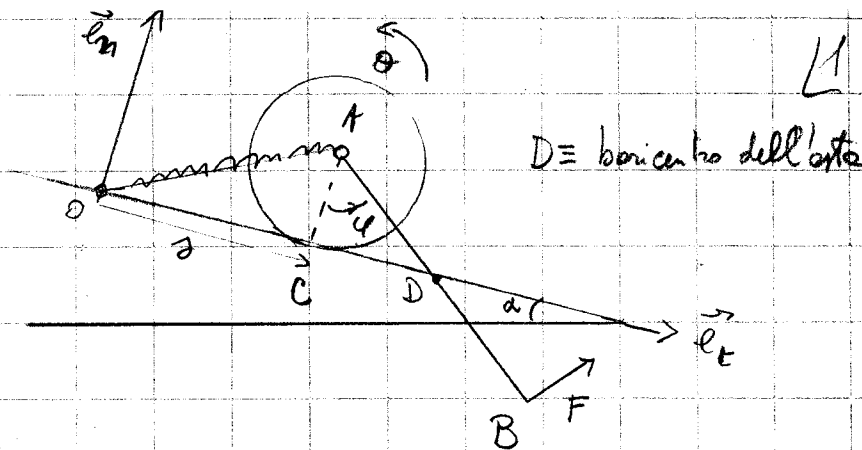
Determinare:

- 1) le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri del sistema;
- 2) le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto  $C$  di contatto con la guida;
- 3) le reazioni vincolari interne sull'estremo dell'asta  $A$ .

## DINAMICA.

- 4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto;
- 5) calcolare le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto  $C$  di contatto con la guida, durante i moti;
- 6) le reazioni vincolari interne sull'estremo dell'asta  $A$ , durante i moti (solo 6 CFU);
- 6a) linearizzare le equazioni del punto 4) intorno alle configurazioni di equilibrio (solo 9 CFU).

Tema del 10/06/2013



Cinematica

Il modello ha 2 g.l., come si determina con il metodo dei congelamenti successivi. Scegliamo come coordinate libere l'ascissa del centro del disco A (coincidente con quella del punto di contatto C) e l'angolo formato dal vettore  $(-\vec{l}_n)$  e dal vettore dell'asta verso (B-A),

$$(\sigma, \varphi) \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

Ricordiamo che, introducendo come coordinate sovradondanti l'angolo di rotazione del disco  $\theta$ , dal vincolo di puro rotolamento segue che

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{\sigma}}{R} \Rightarrow \vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{l}_3 = -\frac{\dot{\sigma}}{R} \vec{l}_3$$

1) Analizzando la sollecitazione attiva, osserviamo che essa è composta da una parte conservativa, il peso proprio del disco e dell'asta e la forza elastica della molla con estremo fisso in A. Invece, il carico "follower"  $\vec{F}_B$  sarà non conservativo. Allora, per scrivere le equazioni pure di equilibrio, possiamo calcolare le forze generalizzate della sollecitazione conservativa, derivando l'energia potenziale rispetto alle coordinate libere. Invece, per calcolare le forze generalizzate del carico follower, possiamo usare la definizione oppure il no lavoro virtuale.

$$V(s, \varphi) = \frac{1}{2} c \overline{OA}^2 - 3m \vec{g} \cdot \vec{x}_A - m \vec{g} \cdot \vec{x}_D = \frac{1}{2} c \overline{OA}^2 - m \vec{g} \cdot (3\vec{x}_A + \vec{x}_D)$$

$$\vec{x}_A = s \vec{e}_t + R \vec{e}_n \Rightarrow \overline{OA}^2 = s^2 + R^2$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_D &= \vec{x}_A + (\vec{x}_D - \vec{x}_A) = s \vec{e}_t + R \vec{e}_n + L (\sin \varphi \vec{e}_t - \cos \varphi \vec{e}_n) = \\ &= \left(s + \frac{L}{2} \sin \varphi\right) \vec{e}_t + \left(R - \frac{L}{2} \cos \varphi\right) \vec{e}_n \end{aligned}$$

$$\vec{g} = (\sin \alpha \vec{e}_t - \cos \alpha \vec{e}_n)$$

Quindi,

$$\begin{aligned} V(s, \varphi) &= \frac{1}{2} c (s^2 + R^2) + \\ &- m g (\sin \alpha \vec{e}_t - \cos \alpha \vec{e}_n) \cdot \left[ 3(s \vec{e}_t + R \vec{e}_n) + \left(s + \frac{L}{2} \vec{e}_t + \left(R - \frac{L}{2} \cos \varphi\right) \vec{e}_n\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(s, \varphi) &= +\frac{1}{2} c s^2 - mg(\sin d \vec{e}_t - \cos d \vec{e}_n) \cdot \left[ \left( 4s + \frac{L}{2} \sin \varphi \right) \vec{e}_t + \left( 4R - \frac{L}{2} \cos \varphi \right) \vec{e}_n \right] \quad (3) \\
 &= \frac{1}{2} c s^2 - mg \left[ \sin d \left( 4s + \frac{L}{2} \sin \varphi \right) - \cos d \left( 4R - \frac{L}{2} \cos \varphi \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} c s^2 - 4mg \sin d s - mg \frac{L}{2} (\sin d \sin \varphi + \cos d \cos \varphi) \\
 &= \frac{1}{2} c s^2 - 4mg \sin d s - mg \frac{L}{2} \cos(\varphi - d)
 \end{aligned}$$

le forze generalizzate del carico "follower"  $\vec{F}_B$  possono essere calcolate dal lavoro virtuale sull'arte

$$\begin{aligned}
 LV^{(art)} &= \vec{F}_B \cdot \delta \vec{x}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\epsilon} & \delta \vec{x}_A &= \delta s \vec{e}_t \\
 &= F(\cos \varphi \vec{e}_t + \sin \varphi \vec{e}_n) \cdot \delta s \vec{e}_t + & \vec{\epsilon} &= \delta \varphi \vec{e}_3 \\
 &+ FL \delta \varphi \vec{e}_3 & \vec{F}_B &= F \vec{e}_3 \times \text{vers}(B-A) \\
 &= F \cos \varphi \delta s + FL \delta \varphi & &= F \vec{e}_3 (\sin \varphi \vec{e}_t - \cos \varphi \vec{e}_n) \\
 & & &= F (\cos \varphi \vec{e}_t + \sin \varphi \vec{e}_n)
 \end{aligned}$$

Daunque

$$Q_s^{(art)} = F \cos \varphi, \quad Q_\varphi^{(art)} = FL,$$

mentre

$$Q_s^{(con)} = -\frac{\partial V}{\partial s} = -(cs - 4mg \sin d)$$

$$Q_\varphi^{(con)} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -mg \frac{L}{2} \sin(\varphi - d)$$

Pertanto, le forze generalizzate totali sono

4

$$(4.1) \quad Q_s = F \cos \varphi - c s + 4 m g \sin d$$

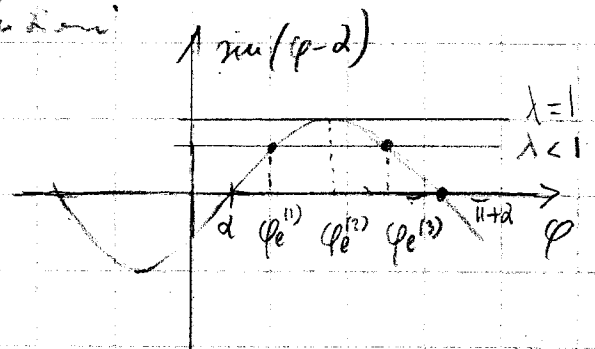
$$Q_\varphi = FL - m g \frac{L}{2} \sin(\varphi - d)$$

e le eq. pure di equilibrio

$$(4.2) \quad \begin{cases} F \cos \varphi - c s = 4 m g \sin d \\ m g \frac{L}{2} \sin(\varphi - d) = FL \end{cases}$$

La II eq. della (4.2) ha soluzioni:

$$\sin(\varphi - d) = \frac{2F}{mg} = \lambda > 0$$



se  $\lambda = 1$   $\varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2} + d$

se  $\lambda < 1$   $\varphi_e^{(1)} = d + \arcsin \lambda$ ,  $\varphi_e^{(3)} = \pi + d - (\varphi_e^{(1)} - d) = \pi + d - \arcsin \lambda$

Sostituendo nella I eq. della (4.2) si trova

$$(4.3) \quad s_e = 4 \frac{m g}{c} \sin d + \frac{F}{c} \cos \varphi_e, \quad \text{dove}$$

$$(4.4) \quad \text{se } \lambda = 1 \quad \cos \varphi_e = \cos \left( \frac{\pi}{2} + d \right) = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \cos d - \sin \frac{\pi}{2} \sin d}{2} = -\sin d$$

se  $\lambda < 1$

↳

$$\cos \varphi_e^{(1)} = \cos(d + \arccos \lambda) = \cos d \cos(\arccos \lambda) - \sin d \sin(\arccos \lambda)$$

$$= \cos d \sqrt{1-\lambda^2} - \sin d \lambda > 0$$

(5.1)

$$\cos \varphi_e^{(3)} = \cos(\pi + d - \arccos \lambda) = \cos(\pi + d) \cos(\arccos \lambda) - \sin(\pi + d) \sin(\arccos \lambda)$$

$$= -\cos d \sqrt{1-\lambda^2} - \sin d \lambda < 0$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio sono

$$\vec{q}_e^{(1)} = \left( 4 \frac{mg}{c} \sin d + \frac{F}{c} (\sqrt{1-\lambda^2} \cos d - \lambda \sin d), \arccos \lambda \right)$$

$\lambda < 1$

$$\vec{q}_e^{(3)} = \left( 4 \frac{mg}{c} \sin d - \frac{F}{c} (\sqrt{1-\lambda^2} \cos d + \lambda \sin d), \pi + d - \arccos \lambda \right)$$

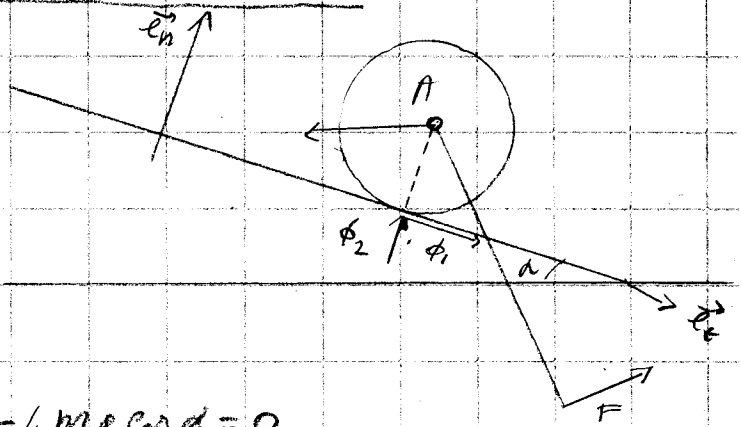
$\lambda = 1$

$$\vec{q}_e^{(2)} = \left( 4 \frac{mg}{c} \sin d - \frac{F}{c} \sin d, \frac{\pi}{2} + d \right)$$

2) Reazioni esterne nel disco in C, all'equilibrio

(6)

Scriviamo le I E C S  
nel sistema proiettato lungo  $\vec{e}_n$   
e la II E C S nel solo disco



$$(6.1) \quad \vec{R} \cdot \vec{e}_n : \phi_2 - cR + F \sin \phi_e - 4mg \cos \alpha = 0$$

$$\vec{M}_A \cdot \vec{e}_3 : \phi_1 R = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0$$

Da cui,

$$(6.2) \quad \phi_1 = 0, \quad \phi_2 = cR + 4mg \cos \alpha - F \sin \phi_e$$

Calcoliamo il  $\sin \phi_e$  nelle 3 config. di equilibrio:

$$\sin \phi_e^{(1)} = \sin(d + \alpha \cos \lambda) = \sin d \cos(\alpha \cos \lambda) + \cos d \sin(\alpha \cos \lambda) = \sin d \sqrt{1 - \lambda^2} + \cos d \lambda$$

$$(6.3) \quad \sin \phi_e^{(2)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + d\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos d + \cos \frac{\pi}{2} \sin d = \cos d$$

$$\sin \phi_e^{(3)} = \sin(\pi + d - \alpha \cos \lambda) = \sin(\pi + d) \cos(\alpha \cos \lambda) - \cos(\pi + d) \sin(\alpha \cos \lambda) = -\sin d \sqrt{1 - \lambda^2} + \cos d \lambda$$

Pertanto, le reazioni in C sono

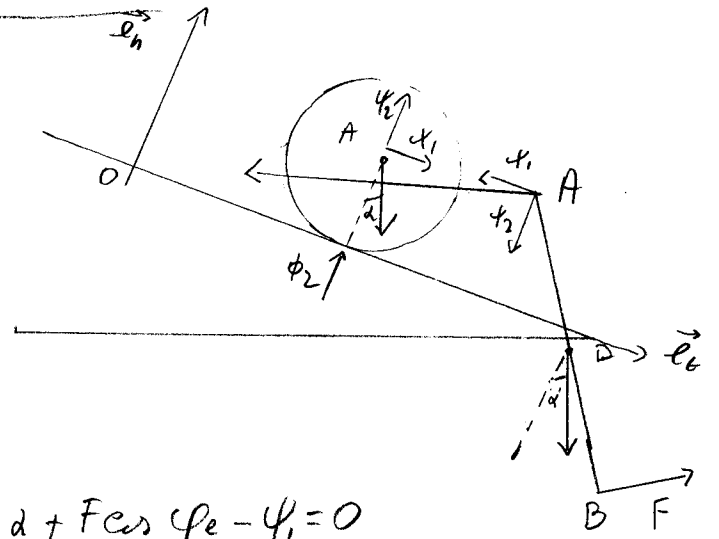
$$\vec{\phi} = (cR + 4mg \cos \alpha - F \sin \phi_e) \vec{e}_2$$

con  $\sin \phi_e$  dato dalle (6.3).

3) Reazioni nell'asta in A all'equilibrio

L7.

Per calcolare le reazioni del disco nell'asta in A, scriviamo le IECS nella sola asta.



$$(7.2) \quad \begin{cases} \vec{R}^{\text{ext, asta}} \cdot \vec{e}_t : -C \sin \alpha + mg \sin \alpha + F \cos \varphi_e - \psi_1 = 0 \\ \vec{R}^{\text{ext, asta}} \cdot \vec{e}_n : -CR - mg \cos \alpha + F \sin \varphi_e - \psi_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi,

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= -C \sin \alpha + mg \sin \alpha + F \cos \varphi_e = -4mg \sin \alpha - F \cos \varphi_e + mg \sin \alpha + F \cos \varphi_e \\ &= -3mg \sin \alpha \\ \psi_2 &= -CR - mg \cos \alpha + F \sin \varphi_e \end{aligned}$$

Il risultato si ottiene sostituendo in (7.2) le (6.3).



# Dinamica

18

Scriviamo le EL non conservative. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$K = K^{(d)} + K^{(e)}$$

$$K^{(d)} = \frac{1}{2} 3m |\vec{V}_A|^2 + \frac{1}{2} J_{3A}^{(d)} |\vec{\omega}^{(d)}|^2$$

$$J_{3A}^{(d)} = \frac{1}{2} (3m) R^2$$

$$\vec{V}_A = \dot{x}_A \vec{e}_1 \Rightarrow |\vec{V}_A|^2 = \dot{x}^2$$

$$\vec{\omega}^{(d)} = -\frac{\dot{x}}{R} \vec{e}_3$$

$$K^{(d)} = \frac{1}{2} 3m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{3mR^2}{2} \right) \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{9}{4} m \dot{x}^2$$

$$K^{(e)} = \frac{1}{2} m |\vec{V}_D|^2 + \frac{1}{2} J_{3D}^{(e)} |\vec{\omega}^{(e)}|^2$$

$$J_{3D}^{(e)} = \frac{1}{12} m L^2$$

$$\vec{V}_D = \dot{x}_D \vec{e}_2 = \left( \dot{x} + \frac{L}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \vec{e}_2 + \frac{L}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \vec{e}_3$$

$$\vec{\omega}^{(e)} = \dot{\varphi} \vec{e}_3$$

$$|\vec{V}_D|^2 = \left( \dot{x} + \frac{L}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right)^2 + \left( \frac{L}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \right)^2 =$$

$$= \dot{x}^2 + \frac{L^2}{4} \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + L \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi} + \frac{L^2}{4} \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \dot{x}^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}^2 + L \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi}$$

$$K^{(e)} = \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}^2 + L \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m L^2 \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 + \frac{1}{3} L^2 \dot{\varphi}^2 + L \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi} \right)$$

# Dinamica

18

Scriviamo le EL non conservative. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$K = K^{(d)} + K^{(e)}$$

$$K^{(d)} = \frac{1}{2} 3m |\vec{v}_A|^2 + \frac{1}{2} J_{3A}^{(d)} |\vec{\omega}^{(d)}|^2$$

$$J_{3A}^{(d)} = \frac{1}{2} (3m) R^2$$

$$\vec{v}_A = \dot{x}_A \vec{e}_1 \Rightarrow |\vec{v}_A|^2 = \dot{x}^2$$

$$\vec{\omega}^{(d)} = -\frac{\dot{x}}{R} \vec{e}_3$$

$$K^{(d)} = \frac{1}{2} 3m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{3mR}{2} \right) \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{9}{4} m \dot{x}^2$$

$$K^{(e)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2} J_{3B}^{(e)} |\vec{\omega}^{(e)}|^2$$

$$J_{3B}^{(e)} = \frac{1}{12} m L^2$$

$$\vec{\omega}^{(e)} = \dot{\varphi} \vec{e}_3$$

$$\vec{v}_B = \dot{x}_B \vec{e}_1 = \left( \dot{x} + \frac{L}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \vec{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \vec{e}_2$$

$$|\vec{v}_B|^2 = \left( \dot{x} + \frac{L}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right)^2 + \left( \frac{L}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \right)^2 =$$

$$= \dot{x}^2 + \frac{L^2}{4} \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + L \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi} + \frac{L^2}{4} \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \dot{x}^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}^2 + L \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi}$$

$$K^{(e)} = \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}^2 + L \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m L^2 \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 + \frac{1}{3} L^2 \dot{\varphi}^2 + L \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi} \right)$$

Quindi,

$$K = \frac{9}{4} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m \left( \dot{s}^2 + \frac{1}{3} L^2 \dot{\varphi}^2 + L \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} \right)$$

$$(9.1) = \frac{1}{2} m \left( \frac{11}{2} \dot{s}^2 + \frac{1}{3} L^2 \dot{\varphi}^2 + L \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} \right)$$

Pertanto,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = \frac{11}{2} m \dot{s} + \frac{1}{2} m L \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial s} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{m}{2} \left[ 11 \ddot{s} + L (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) \right]$$

Quindi, l'EL relative alle coordinate  $s$  è

$$(9.2) \quad \frac{m}{2} \left[ 11 \ddot{s} + L (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) \right] \stackrel{(9.1)}{=} F \cos \varphi - c s + k s$$

Inoltre,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m \frac{L^2}{3} \dot{\varphi} + \frac{L}{2} \cos \varphi \dot{s}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = -\frac{mL}{2} \sin \varphi \dot{s}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{mL^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{mL}{2} (\cos \varphi \ddot{s} - \sin \varphi \dot{s} \dot{\varphi})$$

Pertanto, l'EL relative alle coordinate  $\varphi$  è

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{mL}{2} (\cos \varphi \ddot{s} - \sin \varphi \dot{s} \dot{\varphi}) + \frac{mL}{2} \sin \varphi \dot{s} = Q_\varphi, \text{ cioè}$$

$$(9.3) \quad m \left( \frac{L^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cos \varphi \ddot{s} \right) \stackrel{(9.1)}{=} = L - m g \frac{L}{2} \sin(\varphi - \alpha)$$

5) Reazioni dinamiche in C nel disco. 10

Analogamente alle Statiche, scriviamo

$$(10.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \cdot \vec{e}_n = \left( m \ddot{x}_A + m \ddot{x}_D \right) \cdot \vec{e}_n \\ \vec{M}_A^{(disco)} \cdot \vec{e}_3 = \frac{d\vec{L}_A^{(disco)}}{dt} \cdot \vec{e}_3 \end{array} \right.$$

$$(10.2) \quad \ddot{x}_A = \dot{v}_A = \ddot{\sigma} \vec{e}_t, \quad \ddot{x}_D = \left[ \ddot{\sigma} + \frac{L}{2} (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) \right] \vec{e}_t + \frac{L}{2} (\sin \varphi \dot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2) \vec{e}_n$$

$$(10.3) \quad \vec{L}_A^{(disco)} = \vec{I}_A(\vec{\omega}) = \vec{J}_{3A} \left( -\frac{\dot{\sigma}}{R} \right) \vec{e}_3 = \frac{1}{2} (3mR^2) \left( -\frac{\dot{\sigma}}{R} \right) \vec{e}_3 = -\frac{3mR}{2} \dot{\sigma} \vec{e}_3$$

Dunque, le (10.1) si scrivono

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_2' - cR + F \sin \varphi - 4mg \cos \alpha = m \frac{L}{2} (\sin \varphi \dot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2) \\ \phi_1' R = -\frac{3mR}{2} \ddot{\sigma} \end{array} \right.$$

cioè

$$(10.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_2' = cR - F \sin \varphi + 4mg \cos \alpha + m \frac{L}{2} (\sin \varphi \dot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2) \\ \phi_1' = -\frac{3m}{2} \ddot{\sigma} \end{array} \right.$$

6) Reazioni sull'asta in A durante i moti

Analogamente al caso statico, scriviamo la I ECD sull'asta

$$(11.1) \quad \begin{aligned} \vec{R}^{\rightarrow \text{est, asta}} \cdot \vec{l}_t &= m \ddot{x}_D \cdot \vec{l}_t \\ \vec{R}^{\rightarrow \text{est, asta}} \cdot \vec{l}_n &= m \ddot{x}_D \cdot \vec{l}_n \end{aligned}$$

Quindi, tenendo conto delle (7.2) e delle (10.2), si ottiene

$$(11.2) \quad \begin{cases} -CS + mg \sin d + F \cos \varphi - \Psi_1' = m \left[ \ddot{s} + \frac{L}{2} (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) \right] \\ -CR - mg \cos d + F \sin \varphi - \Psi_2' = m \frac{L}{2} (\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2) \end{cases}$$

Pertanto, le reazioni dinamiche interne sull'asta sono

$$(11.3) \quad \begin{cases} \Psi_1' = -CS + mg \sin d + F \cos \varphi - m \left[ \ddot{s} + \frac{L}{2} (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) \right] \\ \Psi_2' = -CR - mg \cos d + F \sin \varphi - m \frac{L}{2} (\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2) \end{cases}$$

6a) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

La sollecitazione non è conservativa, quindi, introdotto il vettore degli scarti

$$\vec{x} = \vec{q} - \vec{q}_e$$

obteniamo un'equazione la forma

$$A \ddot{\vec{x}} + B \dot{\vec{x}} + C \vec{x} = 0,$$

dove

$$A = A(\vec{q}_e), \quad B_{ij} = - \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{\vec{q}_e}, \quad C_{ij} = - \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Big|_{\vec{q}_e}$$

Quindi

$$A = m \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & \frac{L}{2} \cos \varphi_e \\ \frac{L}{2} \cos \varphi_e & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix},$$

$$C = - \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial s} & \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial s} & \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \Big|_{\vec{q}_e} = \begin{bmatrix} -c & -F \sin \varphi_e \\ 0 & -\frac{mgL}{2} \cos(\varphi_e - \alpha) \end{bmatrix}$$

Dunque,

$$m \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & \frac{L}{2} \cos \varphi_e \\ \frac{L}{2} \cos \varphi_e & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & F \sin \varphi_e \\ 0 & \frac{mgL}{2} \cos(\varphi_e - \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto, le EL intorno a  $\vec{q}e^{(1)}$ , sono

13

$$\begin{cases} \frac{11}{2} m \ddot{x}_1 + \frac{mL}{2} (\cos 2\sqrt{1-\lambda^2} - \lambda \sin 2) \ddot{x}_2 + c x_1 + F (\sin 2\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda \cos 2) x_2 = 0 \\ \frac{mL}{2} (\cos 2\sqrt{1-\lambda^2} - \lambda \sin 2) \ddot{x}_1 + \frac{mL^2}{3} \ddot{x}_2 + \frac{mgL}{2} \sqrt{1-\lambda^2} x_2 = 0 \end{cases}$$

quelle intorno a  $\vec{q}e^{(2)}$

$$\begin{cases} \frac{11}{2} m \ddot{x}_1 - \frac{L}{2} \sin 2 \ddot{x}_2 + c x_1 + F \cos 2 x_2 = 0 \\ -\frac{mL}{2} \sin 2 \ddot{x}_1 + \frac{mL^2}{3} \ddot{x}_2 + \frac{mgL}{2} (-\sqrt{1-\lambda^2}) x_2 = 0 \end{cases}$$

quelle intorno a  $\vec{q}e^{(3)}$

$$\begin{cases} \frac{11}{2} m \ddot{x}_1 - \frac{L}{2} (\cos 2\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda \sin 2) \ddot{x}_2 + c x_1 + F (-\sin 2\sqrt{1-\lambda^2} + \cos 2) x_2 = 0 \\ -\frac{Lm}{2} (\cos 2\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda \sin 2) \ddot{x}_1 + \frac{mL^2}{3} \ddot{x}_2 + \frac{mgL}{2} (-\sqrt{1-\lambda^2}) x_2 = 0 \end{cases}$$