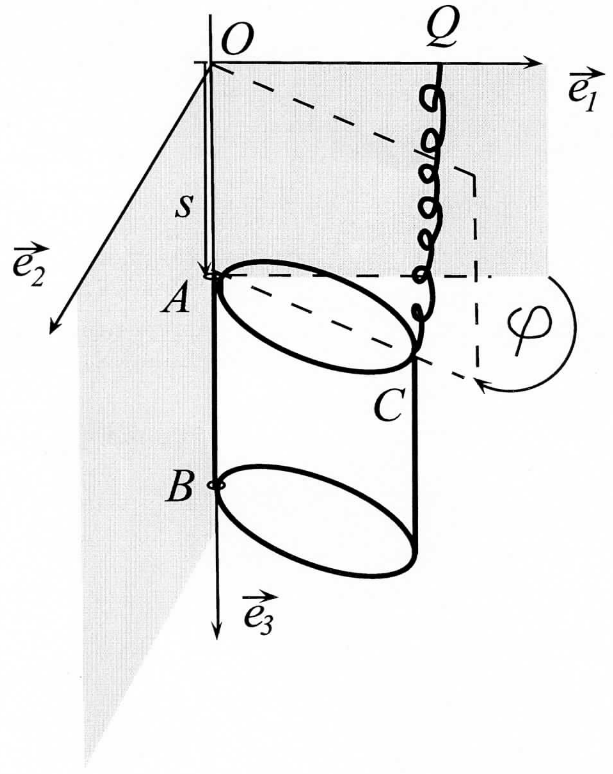
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 15 luglio 2013

(G. Tondo)



Un cilindro circolare retto, omogeneo e di massa m, raggio di base R e altezza h è vincolato ad una guida fissa verticale passante per O, con due anellini lisci negli estremi A e B di una generatrice del cilindro. Il punto C, diametralmente opposto ad A, è collegato a una molla di costante elastica c, che ha l'altro estremo fissato ad un punto fisso Q di una guida orizzontale, a distanza d da O. Scelte come coordinate libere la coordinata s di A rispetto a O lungo la guida verticale e l'angolo φ tra i piani verticali passanti per OQ e AC, si chiede di

STATICA

Determinare:

1) le configurazioni di equilibrio del cilindro in funzione dei parametri del sistema e la loro stabilità;

2) le reazioni vincolari della guida sul cilindro in B, all'equilibrio;

3) le reazioni vincolari della guida sul cilindro in A, all'equilibrio.

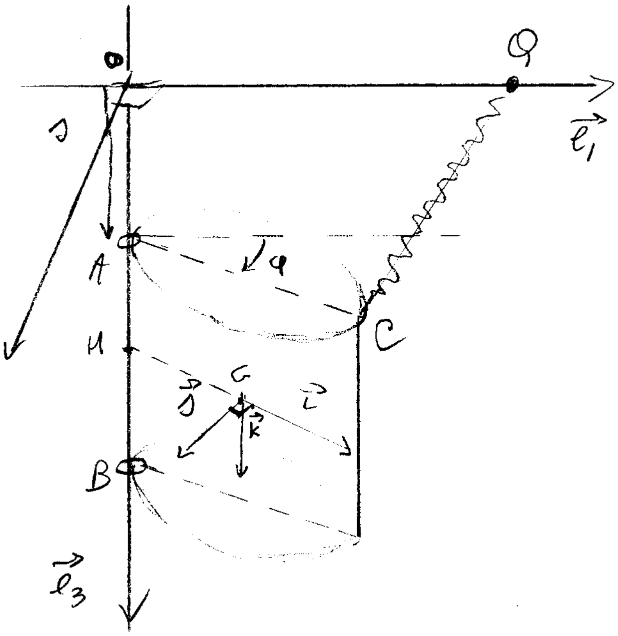
DINAMICA

4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto;

5) calcolare le reazioni vincolari della guida sul cilindro in B, durante i moti;

6) linearizzare le equazioni del punto **4)** intorno alle configurazioni di equilibrio, scriverne l'integrale generale e la frequenza delle piccole oscillazioni.

Tema del 15/07/2013



Il cilindro ha 2 g.l., come si desume dal metodo dei congelamenti successivi. Infatti, se si congela lo spostamento virtuale traslatorio lungo l'asse verticale $(O, \vec{e}_3)$, rimane uno spostamento virtuale rotatorio attorno allo stesso asse, congelato il quale, il cilindro non ammette alcun ulteriore spostamento virtuale. Scegliamo come coordinate libere l'ascissa del punto A, $s \in \mathbb{R}$ e l'angolo φ compreso tra il piano verticale fisso passante per i punti O e Q e il piano verticale solidale al rigido passante per i punti A e C, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Quindi, lo spazio delle configurazioni del modello è

$$C_V = \mathbb{R} \times S^1$$

Osserviamo che il moto del cilindro può essere solo elicoidale intorno all'asse $(O, \vec{e}_3)$, quindi la sua velocità angolare sarà

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_3$$

Determiniamo i vettori posizione dei punti A, B, Q

(2.1) $\vec{x}_A = s\,\vec{e}_3$, $\vec{x}_B = (s+h)\,\vec{e}_3$, $\vec{x}_Q = d\,\vec{e}_1$.

Per determinare i vettori posizione dei punti C e G, conviene introdurre la terna centrale $(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, con il versore $\vec{i}$ // AC. Allora,

(2.2) $\vec{x}_C = \vec{x}_A + (\vec{x}_A - \vec{x}_C) = s\,\vec{e}_3 + 2R\,\vec{i}$

(2.3) $\vec{x}_G = \vec{x}_H + (\vec{x}_G - \vec{x}_M) = \left(s + \frac{h}{2}\right)\vec{e}_3 + R\,\vec{i}$

Per avere le componenti di $\vec{x}_C$ e $\vec{x}_G$ sulla terna fissa $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ basta osservare che

(2.4) $\vec{i} = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2$,

$\vec{k} \equiv \vec{e}_3$

(2.5) $\vec{j} = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2$,

Statica

La sollecitazione attiva, data dal peso proprio del cilindro e dalla forza elastica della molla con un estremo fisso in Q è conservativa. Quindi, possiamo scriverne l'energia potenziale.

$$(3.1) \quad V(s,\varphi) = -m\vec{g}\cdot\vec{x}_G + \frac{1}{2} c\, \overline{QC}^2$$

$$\overline{QC}^2 = |\vec{x}_Q - \vec{x}_C|^2$$

$$(3.2) \quad \vec{x}_C - \vec{x}_Q = s\,\vec{e}_3 + 2R\,\vec{\imath} - d\,\vec{e}_1 = (2R\cos\varphi - d)\vec{e}_1 + 2R\sin\varphi\,\vec{e}_2 + s\,\vec{e}_3$$

$$|\vec{x}_C - \vec{x}_Q|^2 = (2R\cos\varphi - d)^2 + (2R\sin\varphi)^2 + s^2$$

$$= 4R^2\cos^2\varphi - 4Rd\cos\varphi + d^2 + 4R^2\sin^2\varphi + s^2$$

$$= 4R^2 + d^2 + s^2 - 4Rd\cos\varphi$$

Pertanto,

$$V(s,\varphi) = -mg\,\vec{e}_3\cdot\left[\left(s+\frac{l}{2}\right)\vec{e}_3 + R\,\vec{\imath}\right] + \frac{1}{2}c\left(4R^2 + d^2 + s^2 - 4Rd\cos\varphi\right)$$

$$= -mg\,s + \frac{1}{2}c\left(s^2 - 4Rd\cos\varphi\right).$$

a meno delle costanti additive.

le configurazioni di equilibrio sono tutti e soli i punti stazionari di V.

$$(4.1)\quad \frac{\partial V}{\partial s} = -mg + cs = -Q_s$$

$$(4.2)\quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2cRd\sin\varphi = -Q_\varphi$$

Dunque, le eq. pure di equilibrio sono

$$(4.3)\quad \begin{cases} -mg + cs = 0 & s_e = \frac{mg}{c} \\ 2cRd\sin\varphi = 0 & \varphi_e = 0,\ \pi \end{cases}$$

Allora, il modello ammette 2 configurazioni di equilibrio $\vec{q_e} = (s_e, \varphi_e)$, date da

$$(4.4)\quad \vec{q_e}^{(1)} = \left(\frac{mg}{c}, 0\right) \quad , \quad \vec{q_e}^{(2)} = \left(\frac{mg}{c}, \pi\right)$$

Per determinarne la stabilità, calcoliamo la matrice Hessiana di V.

$$(4.5)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = c, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial s} = 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 2cRd\cos\varphi$$

Quindi,

$$(5.1)\quad \mathcal{H}_V = \left[\begin{array}{c|c} c & 0 \\ \hline 0 & 2cRd\cos\varphi \end{array}\right] \qquad [\mathcal{H}_V]^1_1 = c > 0$$

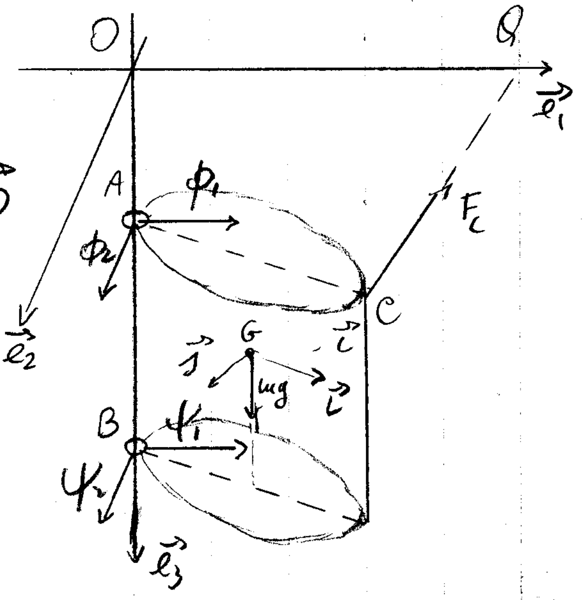
$$\det \mathcal{H}_V = 2c^2 R d \cos\varphi$$

Poiché

$$\det \mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(1)}} = 2c^2 R d > 0 \Rightarrow \vec{q}_e^{(1)} \text{ è p. min} \Rightarrow \text{stabile}$$

$$\det \mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(2)}} = -2c^2 R d < 0 \Rightarrow \vec{q}_e^{(2)} \text{ è p. sella} \Rightarrow \text{instabile}$$

2) Reazioni in B all'equilibrio



Scriviamo la II ECS con polo in A

$$(5.2)\quad \vec{M}_A:\quad (G-A)\times m\vec{g} + (C-A)\times \vec{F}_c + (B-A)\times \vec{\Psi}_B = \vec{0}$$

$$\vec{F}_c = -c\left(\vec{x}_C - \vec{x}_Q\right) = -c\left(s\vec{e}_3 + 2R\vec{\imath} - d\vec{e}_1\right) =$$

$$= -c\left(2R\cos\varphi - d\right)\vec{e}_1 + 2R\sin\varphi\, e_2 + s\vec{e}_3$$

$$\left(\frac{h}{2}\vec{e}_3 + R\vec{\imath}\right)\times mg\,\vec{e}_3 = R\,mg\,\vec{\imath}\times\vec{e}_3 = -mgR\,\vec{\jmath} = -mgR\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

$$(C-A)\times\vec{F}_c = 2R\,\vec{\imath}\times\left[-c\left(s\vec{e}_3 + 2R\vec{\imath} - d\vec{e}_1\right)\right] =$$

$$= -2cR\left(s\,\vec{\imath}\times\vec{e}_3 - d\,\vec{\imath}\times\vec{e}_1\right) = -2cR\left(-s\vec{\jmath} - d\,\vec{\imath}\times\vec{e}_1\right)$$

$$= 2cR\left[s\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2\right) - d\sin\varphi\,\vec{e}_3\right]$$

$$(B-A) \times \vec{\psi}_B = h\, \vec{e}_3 \times (\psi_1 \vec{e}_1 + \psi_2 \vec{e}_2)$$

$$(6.1) \qquad = h\,(\psi_1 \vec{e}_2 - \psi_2 \vec{e}_1)$$

Allora, proiettando la (5.2) sulla terna $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ si trova

$$(6.2) \quad \vec{M}_A \cdot \vec{e}_1 \qquad mgR\sin\varphi - 2cRs\sin\varphi - h\psi_2 = 0$$

$$(6.3) \quad \vec{M}_A \cdot \vec{e}_2 \qquad -mgR\cos\varphi + 2cRs\cos\varphi + h\psi_1 = 0$$

$$(6.4) \quad \vec{M}_A \cdot \vec{e}_3 \qquad -2cRd\sin\varphi = 0$$

Dalle (6.2) e (6.3) si ottiene

$$(6.1) \qquad \psi_1 = (mg - 2cs_e)\frac{R}{h}\cos\varphi_e$$

$$(6.2) \qquad \psi_2 = (mg - 2cs_e)\frac{R}{h}\sin\varphi_e$$

mentre, la (6.4) è un'eq. pura di equilibrio equivalente alla II dell (4.3). D'altra parte, le (4.2) e (6.4) implicano

$$Q_\varphi = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_3 \,.$$

Sostituendo in (6.1) e (6.2) le (4.4), si trova

$$\psi_1(\vec{q}_e^{(1)}) = -mg\frac{R}{h} < 0, \quad \psi_1(\vec{q}_e^{(2)}) = mg\frac{R}{h}$$

$$\psi_2(\vec{q}_e^{(1)}) = 0 \qquad\qquad \psi_2(\vec{q}_e^{(2)}) = 0$$

3) Reazioni in A all'equilibrio

Scriviamo la I ECS

(7.1) $\vec{R}^{est} = 0 \qquad \vec{\phi}_A + \vec{\psi}_B + \vec{F}_C + m\vec{g} = \vec{0}$

e proiettiamola sulla terna fissa $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

(7.2) $\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_1 \qquad \phi_1 + \psi_1 - c(2R\cos\varphi - d) = 0$

(7.3) $\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_2 \qquad \phi_2 + \psi_2 - c(2R\sin\varphi) = 0$

(7.4) $\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_3 \qquad -cs + mg = 0$

Dalle (7.2) e (7.3) si ottiene

(7.5) $\phi_1 = c(2R\cos\varphi_e - d) - \psi_1$

(7.6) $\phi_2 = c(2R\sin\varphi_e) - \psi_2$

mentre la (7.4) è un'equazione pura di equilibrio equivalente alla I delle (4.3). D'altra parte, la (4.3) e la (7.4) implicano che

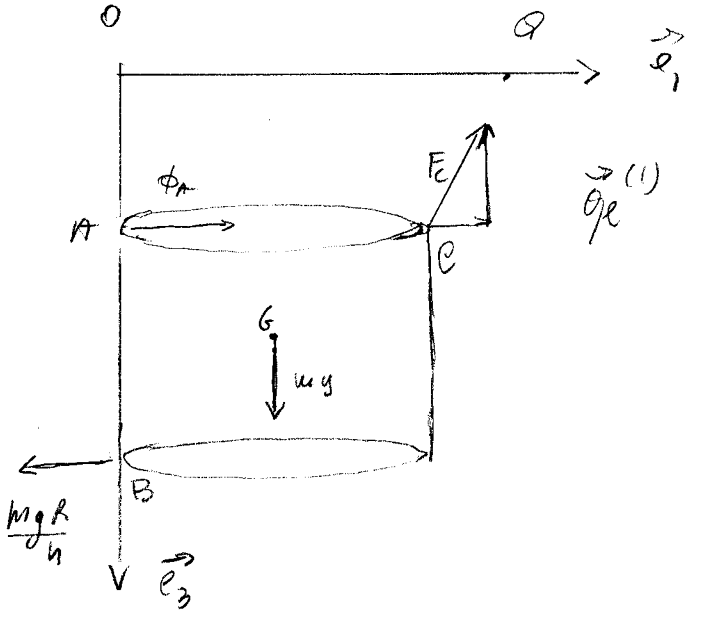
$$Q_s = \vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_3$$

Sostituendo,

$\phi_1(\vec{q}_e^{(1)}) = c(2R - d) + \frac{mgR}{\ell_1}$, $\phi_1(\vec{q}_e^{(2)}) = -c(2R + d) - \frac{mgR}{\ell_1} < 0$

$\phi_2(\vec{q}_e^{(1)}) = 0 \qquad \phi_2(\vec{q}_e^{(2)}) = 0$

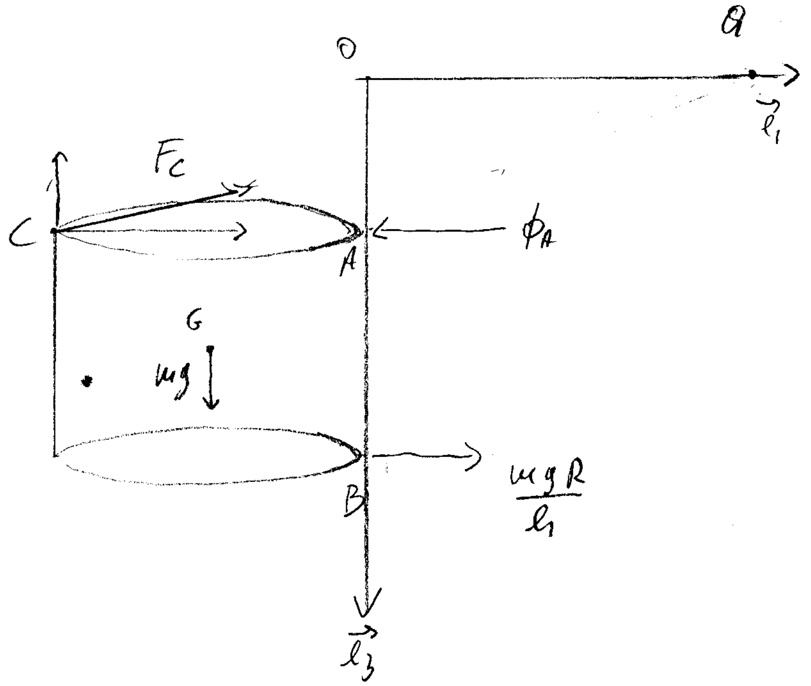
Ricapitolando,



$$\vec{q}_e^{(1)} = \left(\frac{mg}{C}, 0\right)$$

$$\vec{\phi}_A = c\,(2R-d) + mg\frac{R}{h}\,\vec{e}_1$$

$$\vec{\psi}_B = -\,mg\,\frac{R}{h}\,\vec{e}_2$$



$$\vec{q}_e^{(2)} = \left(\frac{mg}{C}, \pi\right)$$

$$\vec{\phi}_A = -\left[c\,(2R+d) + \frac{mgR}{h}\right]\vec{e}_1$$

$$\vec{\Psi}_B = \frac{mg\,R}{h}\,\vec{e}_2$$

Dinamica

4) Scriviamo le eq. di Lagrange. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica del rigido

(9.1) $$K = \frac{1}{2} m|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I_G(\vec{\omega})$$

(9.2) $$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (G-A) = \dot{s}\, \vec{e}_3 + \dot{\varphi}\, \vec{e}_3 \times \left(\frac{h}{2}\vec{e}_3 + R\vec{i}\right)$$
$$= \dot{s}\, \vec{e}_3 + \dot{\varphi} R \vec{j} = \dot{s}\, \vec{e}_3 + R\left(-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2\right)\dot{\varphi}$$

(9.3) $$|\vec{v}_G|^2 = \dot{s}^2 + R^2\dot{\varphi}^2$$

$$K = \frac{1}{2} m\left(\dot{s}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}\, \vec{k} \cdot I_G(\dot{\varphi}\vec{k}) =$$

(9.4) $$= \frac{1}{2} m\left(\dot{s}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2} J_{3G}\, \dot{\varphi}^2 \qquad J_{3G} = \frac{1}{2} m R^2$$
$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{3}{2} R^2 \dot{\varphi}^2\right),$$

dove si è utilizzato il fatto che l'asse $(G, \vec{k})$ è API(G).

(9.5) $$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}, \quad \frac{\partial K}{\partial s} = 0$$
$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

Le EL sono

$$(10.1)\quad EL(s):\qquad m\ddot{s} = mg - cs$$

$$(10.2)\quad EL(\varphi)\qquad \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} = -2cRd\sin\varphi$$

Si osservi che esse sono disaccoppiate e la (10.1) è lineare in $s(t)$.

5) Scriviamo la II ECD con polo in A.

$$(10.3)\quad \vec{M}_A^{est} = \frac{d\vec{L}_A}{dt} + m\vec{V}_A \times \vec{V}_G$$

Calcoliamo $\vec{L}_A$.

$$\vec{L}_A = \vec{L}_G + (G-A)\times m\vec{V}_G$$

$$\vec{L}_G = I_G(\vec{\omega}) = I_G(\dot{\varphi}\vec{K}) = \dot{\varphi}J_{3G}\vec{K}\quad \text{poiché } (G,\vec{K}) \text{ è } API(G)$$

$$(G-A)\times m\vec{V}_G = \left(\frac{h}{2}\vec{K} + R\vec{i}\right)\times m\left(\dot{s}\vec{K} + \dot{\varphi}R\vec{j}\right)$$

$$= m\left(\frac{h}{2}R\dot{\varphi}\vec{K}\times\vec{j} + R\dot{s}\vec{i}\times\vec{K} + R^2\dot{\varphi}\vec{i}\times\vec{j}\right)$$

$$= mR\left(-\frac{h}{2}\dot{\varphi}\vec{i} - \dot{s}\vec{j} + R\dot{\varphi}\vec{K}\right)$$

Quindi

$$\vec{L}_A = mR\left(-\frac{h}{2}\dot{\varphi}\vec{i} - \dot{s}\vec{j} + \frac{3}{2}R\dot{\varphi}\vec{K}\right) =$$

$$= mR\left[\left(\dot{s}\sin\varphi - \frac{h}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\vec{e}_1 - \left(\dot{s}\cos\varphi + \frac{h}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\vec{e}_2 + \frac{3}{2}R\dot{\varphi}\vec{e}_3\right]$$

Si osservi che, contrariamente al caso piano, il momento angolare NON è parallelo a $\vec{\omega}$.

$$(11.1)\quad \frac{d\vec{L}_A}{dt} = mR\left(\ddot{s}\sin\varphi + \dot{s}\cos\varphi\dot{\varphi} - \frac{h}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{h}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_1 +$$

$$-mR\left(\ddot{s}\cos\varphi - \dot{s}\sin\varphi\dot{\varphi} + \frac{h}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi + \frac{h}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_2 +$$

$$+\frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi}\,\vec{e}_3$$

$$(11.2)\quad \vec{V}_A \times m\vec{V}_G \overset{(9.2)}{=} \vec{V}_A \times m\left(V_A + \vec{\omega}\times(G-A)\right) = m\vec{V}_A \times \left(\vec{\omega}\times(G-A)\right)$$

$$= m\dot{s}\vec{K}\times\left(\dot{\varphi}\vec{K}\times\left(\frac{h}{2}\vec{K} + R\vec{\imath}\right)\right)$$

$$= m\dot{s}\dot{\varphi}\vec{K}\times\left(R\vec{K}\times\vec{\imath}\right) = mR\dot{s}\dot{\varphi}\vec{K}\times\vec{J} = -mR\dot{s}\dot{\varphi}\vec{\imath}$$

$$= -mR\dot{s}\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2\right)$$

Allora, proiettando la (10.3) sulla terna fissa $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ e tenendo conto delle (6.2), (6.3), (6.4) si trova

$$(11.3)\quad \vec{e}_1:\quad mgR\sin\varphi - 2cRs\sin\varphi - h\varphi_2' = mR\left(\ddot{s}\sin\varphi - \frac{h}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{h}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}^2\right)$$

$$(11.4)\quad \vec{e}_2:\quad -mgR\cos\varphi + 2cRs\cos\varphi + h\varphi_1' = -mR\left(\ddot{s}\cos\varphi + \frac{h}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi + \frac{h}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}^2\right)$$

$$(11.5)\quad \vec{e}_3:\quad -2cRd\sin\varphi = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi}$$

Risolvendo le (11.3) e (11.4) rispetto a φ_1' e φ_2' si trova la reazione dinamica in B, mentre la (11.5) coincide con la (10.2)

6) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

Il modello è conservativo, Quindi, introducendo il vettore degli scarti dalle configurazioni di equilibrio

$$\vec{\eta}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\vec{q}(t) - \vec{q}_e\right)$$

le equazioni linearizzate sono

$$(12.1) \qquad A\ddot{\vec{\eta}} + \mathcal{V}\vec{\eta} = 0$$

dove A è la matrice dell'energia cinetica e $\mathcal{V}$ la matrice Hessiana di V, entrambe calcolate nelle configurazioni di equilibrio.

$$(12.2) \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{s}^2} & \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}\partial \dot{s}} \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{s}\partial \dot{\varphi}} & \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}^2} \end{bmatrix}_{\Big|\vec{q}_e} \overset{(8.5)}{=} m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}R^2 \end{bmatrix}$$

$$(12.3) \qquad \mathcal{V} = \mathcal{H}_{V|\vec{q}_e} \overset{(5.1)}{=} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 2cRd\cos\varphi_e \end{bmatrix}$$

. Pertanto, l'eq. linearizzate sono

$$(12.4) \qquad \begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + c\eta_1 = 0 \\ \frac{3}{2}mR^2\ddot{\eta}_2 + 2cRd\cos\varphi_e\,\eta_2 = 0 \end{cases}$$

disaccoppiate!

Allora, intorno a $\vec{q_e}^{(1)} = \left(\frac{mg}{c}, 0\right)$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \frac{c}{m}\eta_1 = 0 & \iff \eta_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \alpha_1\right) \\ \ddot{\eta}_2 + \frac{4cd}{3mR}\eta_2 = 0 & \iff \eta_2(t) = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{4cd}{3mR}}\, t + \alpha_2\right) \end{cases}$$

cioè il moto è oscillatorio. Le coordinate (η_1, η_2) sono coordinate normali e i modi normali sono

$$n_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \alpha_1\right) \; ; \; n_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{4cd}{3mR}}\, t + \alpha_2\right)$$

con frequenze normali rispettivamente

$$f_1 = 2\pi \sqrt{\frac{c}{m}} \quad ; \quad f_2 = 2\pi \sqrt{\frac{4cd}{3mR}}.$$

Invece, nell'intorno di $\vec{q_e}^{(2)} = \left(\frac{mg}{c}, \pi\right)$ le eq. linearizzate sono

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \frac{c}{m}\eta_1 = 0 & \iff \eta_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \alpha_1\right) \\ \ddot{\eta}_2 - \frac{4}{3}\frac{c}{m}\frac{d}{R}\eta_2 = 0 & \iff \eta_2(t) = A_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{4cd}{3mR}}\, t + \alpha_2\right) \end{cases}$$

I modi normali sono

$$n_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \alpha_1\right) \; , \; n_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} A_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{4cd}{3mR}} + \alpha_2\right).$$

Il primo modo $n_1(t)$ è oscillatorio con frequenza $f_1 = 2\pi\sqrt{\frac{c}{m}}$, il secondo $n_2(t)$ è iperbolico.