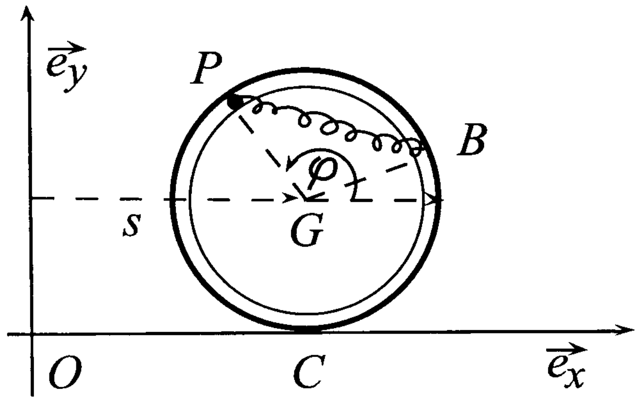
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 16 settembre 2013
(G. Tondo)



Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'interno del bordo di un disco omogeneo di massa $8m$ e raggio r, che rotola senza strisciare su una guida orizzontale fissa. Il punto P, è soggetto all'azione di una molla, di costante elastica c, fissata ad un punto B solidale al bordo del disco. Il modello è posto nel piano verticale passante per la guida, in modo che G stia sull'asse $(O, \vec{e}_y)$ quando $B - G = r\vec{e}_x$.

STATICA.
Determinare:

1) le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità;

2) le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto C di contatto con la guida, nelle configurazioni di equilibrio;

3) le reazioni vincolari interne sul punto P, nelle configurazioni di equilibrio.

DINAMICA.

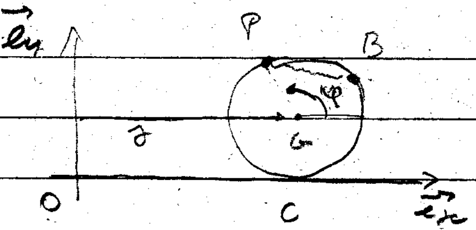
4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto;

5) calcolare le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto C di contatto con la guida durante il moto;

6) (solo 6 CFU) le reazioni vincolari interne sul punto P durante il moto;

6a) (solo 9 CFU) linearizzare le equazioni di moto intorno alla configurazione di equilibrio stabile e calcolare la pulsazione delle piccole oscillazioni.

Tema del 16/03/2013



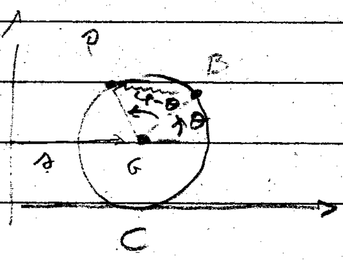
Il modello è costituito da 1 rigido più un punto materiale P.
Dal metodo dei congelamenti successivi segue immediatamente che i gradi di libertà sono 2. Come coordinate libere possiamo scegliere l'ascissa s del centro del disco G e l'angolo φ tra il versore $\vec{e}_x$ e il vettore $(P-G)$:

$$s \in \mathbb{R} \quad , \quad -\pi < \varphi \le \pi$$

$$\vec{x}_P = (P-G)+(G-O) = r(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y) + (s\,\vec{e}_x + r\,\vec{e}_y) =$$

(1.1) $$= (s + r\cos\varphi)\,\vec{e}_x + r(1+\sin\varphi)\,\vec{e}_y$$

Per scrivere il vettore $\vec{x}_B$, conviene introdurre la coordinata sovrabbondante θ, cioè l'angolo tra il versore $\vec{e}_x$ e il vettore $(B-G)$. Allora,



(1.2) $$\vec{x}_B = (B-G)+(G-O) = (s + r\cos\theta)\,\vec{e}_x + r(1+\sin\theta)\,\vec{e}_y$$

(1.3) $$\overline{BP}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{PG}^2 - 2\,\overline{BG}\,\overline{PG}\cos(\varphi-\theta)$$
$$= 2r^2\left[1-\cos(\varphi-\theta)\right] \qquad \text{(th del coseno)}$$

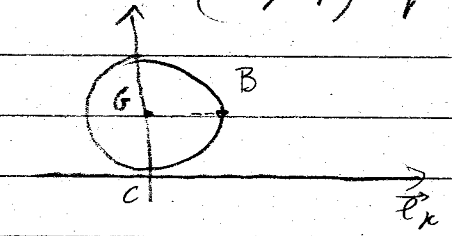
Ora, dobbiamo trovare il legame tra la coordinata sovrabbondante θ e le coordinate libere (s, φ). Dal vincolo di puro rotolamento del disco segue che

(1.4) $$0 = \vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\omega}\times(G-C)$$

Poiché $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_z$, la (1.4) implica

(1.5) $$\dot{s} = -r\dot{\theta} \iff s = -r\theta + s_0$$

La costante s_0 viene fissata dalla condizione assegnata che G stia nell'asse $(O, \vec{e}_y)$ quando $(B-G) = r\,\vec{e}_x$



Dunque

(2.1) $$\theta = 0 \Rightarrow s = 0 \overset{(1.5)}{\Longrightarrow} s_0 = 0$$

Quindi il legame tra la coordinata sovrabbondante θ e le coordinate libere (s, φ) si riduce a

(2.2) $$s = -r\,\theta \quad \Leftrightarrow \theta = -\frac{s}{r}$$

Sostituendo la (2.2) in (1.2) e (1.3) si ottengono

(2.3) $$\vec{x}_B = \left(s + r\cos\left(-\frac{s}{r}\right)\right)\vec{e}_x + r\left(1 + \sin\left(-\frac{s}{r}\right)\right)\vec{e}_y = \left(s + r\cos\frac{s}{r}\right)\vec{e}_x + r\left(1 - \sin\frac{s}{r}\right)\vec{e}_y$$

(2.4) $$\overline{BP}^2 = 2r^2\left[1 - \cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right)\right]$$

Inoltre

(2.5) $$(\vec{x}_P - \vec{x}_B) = r\left[\cos\varphi - \cos\left(-\frac{s}{r}\right)\right]\vec{e}_x + r\left[\sin\varphi - \sin\left(-\frac{s}{r}\right)\right]\vec{e}_y = r\left[\cos\varphi - \cos\frac{s}{r}\right]\vec{e}_x + r\left[\sin\varphi + \sin\frac{s}{r}\right]\vec{e}_y$$

(2.6) $$\vec{\omega} = -\frac{\dot{s}}{r}\,\vec{e}_z$$

Statica

La sollecitazione attiva (peso e molle interne) è conservativa, quindi ammette energia potenziale.

$$(3.1)\quad V(s,\varphi) = \frac{1}{2} c\, \overline{BP}^2 - 8 m \vec{g} \cdot \vec{x}_G - m \vec{g} \cdot \vec{x}_P$$

$$= \frac{1}{2} c\, 2 r^2 \left[1 - \cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right)\right] + 8 m g r + m g r (1 + \sin\varphi)$$

$$\simeq -c r^2 \cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) + m g r \sin\varphi ,$$

trascurando le costanti.

Poichè il vincolo di puro rotolamento è non olonomo, possiamo applicare il Teo di Dirichlet-Lagrange per trovare gli equilibri. A tale scopo, determiniamo i punti stazionari della funzione $V(s,\varphi)$:

$$(3.2)\quad \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{c r^2}{r} \sin\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) = -Q_s$$

$$(3.3)\quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = c r^2 \sin\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) + m g r \cos\varphi = -Q_\varphi$$

Quindi, i punti stazionari sono tutte e sole le soluzioni di

$$(3.4)\quad \begin{cases} \sin\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) = 0 \\ \sin\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) + m g r \cos\varphi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) = 0 \\ \cos\varphi = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} \varphi + \frac{s}{r} = k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

Dunque, le soluzioni di equilibrio sono

$$(4.1)\qquad s = r\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

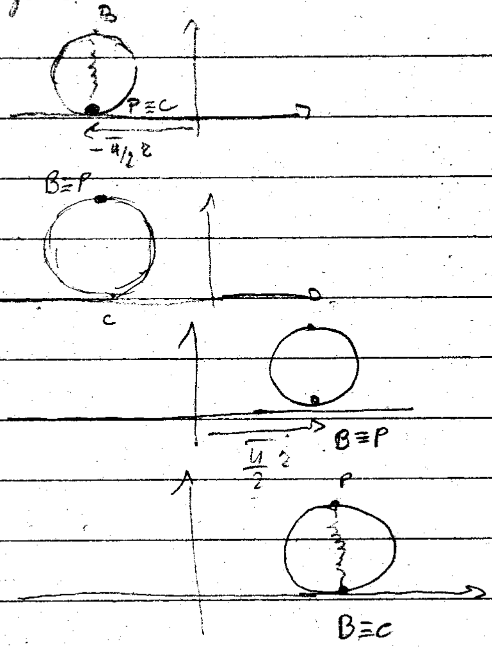
Tra le (4.1), individuiamo 4 soluzioni "fondamentali". Tutte le altre differiscono per avere l'ascissa s del centro G diversa per un multiplo intero di $r\pi$.

$$q_e^{(1)} = \left(-\frac{\pi}{2}r, -\frac{\pi}{2}\right) \qquad k=-1$$

$$(4.2)\qquad q_e^{(2)} = \left(-\frac{\pi}{2}r, \frac{\pi}{2}\right) \qquad k=1$$

$$q_e^{(3)} = \left(\frac{\pi}{2}r, -\frac{\pi}{2}\right) \qquad k=0$$

$$q_e^{(4)} = \left(\frac{\pi}{2}r, \frac{\pi}{2}\right) \qquad k=0$$



Determiniamo la stabilità. A tale scopo, determiniamo la matrice Hessiana di $V(s, \varphi)$ e valutiamola nelle configurazioni di equilibrio.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = c\cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right), \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\,\partial s} = c r\cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = c r^2\cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) - mgr\sin\varphi$$

$$(4.3)\qquad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} c\cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) & c r\cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) \\ c r\cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) & c r^2\cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) - mgr\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$\mathcal{H}_{11} = c\cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right)$

$\det\mathcal{H} = -c\,m g r \sin\varphi\cos\left(\varphi + \frac{s}{r}\right)$

Allora

$$q_e^{(1)} = \left(-\frac{\pi}{2} r, -\frac{\pi}{2}\right) \qquad \mathcal{H}_{11} = c \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -c < 0 \qquad \det \mathcal{H} = -c\, m g r (-1)(-1) < 0$$

sella $\Rightarrow$ instabile

$$q_e^{(2)} = \left(-\frac{\pi}{2} r, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \mathcal{H}_{11} = c \cos\left(+\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = c > 0 \qquad \det \mathcal{H} = -c\, m g r < 0$$

sella $\Rightarrow$ instabile

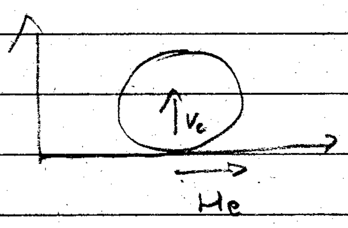
$$q_e^{(3)} = \left(\frac{\pi}{2} r, -\frac{\pi}{2}\right) \qquad \mathcal{H}_{11} = c \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = c > 0 \qquad \det \mathcal{H} = -c\, m g r (-1) > 0$$

$\Rightarrow$ min $\Rightarrow$ stabilità

$$q_e^{(4)} = \left(\frac{\pi}{2} r, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \mathcal{H}_{11} = c \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -c < 0 \qquad \det \mathcal{H} = -c\, m g r (-1) > 0$$

max $\Rightarrow$ instabilità

Reazioni in C all'equilibrio

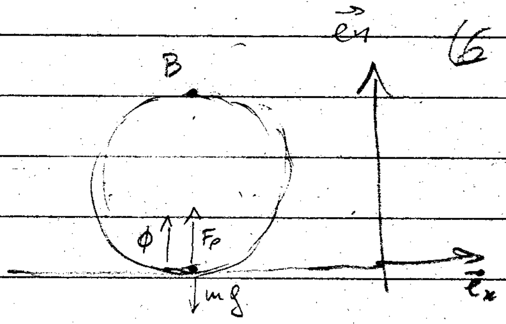


In ogni configurazione di equilibrio vale la I ECS

$$\begin{cases} \vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_x & H_e = 0 \\ \vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_y & V_c - 9 m g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} H_c = 0 \\ V_c = 9 m g \end{cases}$$

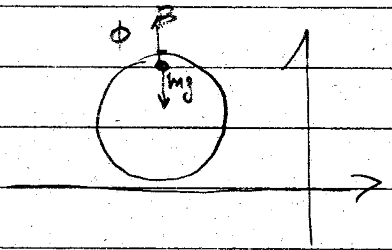
Reazioni all'equilibrio in P

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(-\frac{\bar{u}}{2} r, -\frac{\bar{u}}{2}\right) \qquad \vec{\phi} + \vec{F}_p - m\vec{g} = 0$$



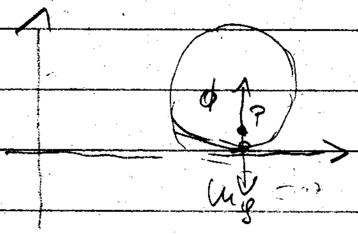
$$\phi + e\,2r - mg = 0$$

$$\phi = mg - 2er$$



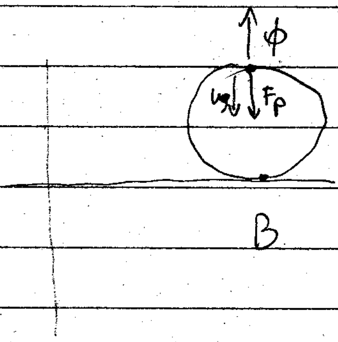
$$q_e^{(2)} = \left(-\frac{\bar{u}}{2} r, \frac{\bar{u}}{2}\right) \qquad \vec{\phi} - m\vec{g} = 0$$

$$\phi = mg$$



$$q_e^{(3)} = \left(\frac{\bar{u}}{2} r, -\frac{\bar{u}}{2}\right) \qquad \vec{\phi} - m\vec{g} = 0$$

$$\phi = mg$$



$$q_e^{(4)} = \left(\frac{\bar{u}}{2} r, \frac{\bar{u}}{2}\right) \qquad \vec{\phi} + \vec{F}_p + m\vec{g} = 0$$

$$\phi - 2er - mg = 0$$

$$\phi = mg + 2er$$

Dinamica

Scriviamo le eq. di Lagrange (EL). A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$K = K^{(d)} + K^{(p)}$$

(7.1) $$K^{(d)} = \frac{1}{2} 8m|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} J_{3G}|\vec{\omega}|^2 . \qquad J_{3G} = \frac{1}{2} 8m\, r^2$$

(7.2) $$\vec{v}_G = \dot{s}\,\vec{e}_x \qquad |\vec{v}_G|^2 = \dot{s}^2$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_z = -\frac{\dot{s}}{r}\,\vec{e}_z \qquad |\vec{\omega}|^2 = \frac{\dot{s}^2}{r^2}$$

Dunque,

(7.3) $$K^{(d)} = 4m\dot{s}^2 + 2m\cancel{r^2}\frac{\dot{s}^2}{\cancel{r^2}} = 6m\dot{s}^2$$

Inoltre,

$$K^{(p)} = \frac{1}{2} m|\vec{v}_P|^2$$

Poiché

(7.4) $$\vec{v}_P = \dot{\vec{r}}_P^{(1.1)} = (\dot{s} - r\sin\varphi\,\dot{\varphi})\vec{e}_x + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y$$

$$|\vec{v}_P|^2 = (\dot{s} - r\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2 + r^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 =$$

(7.5) $$= \dot{s}^2 - 2r\sin\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi} + \underline{r^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2} + \underline{r^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2} =$$

$$= \dot{s}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - 2r\sin\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi}$$

Allora

(7.6) $$K^{(p)} = \frac{1}{2} m\left(\dot{s}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - 2r\sin\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi}\right)$$

Dunque,

$$K = 6\, m\, \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{s}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - 2r \sin\varphi\, \dot{s}\dot{\varphi}\right)$$

$$(8.1) \qquad = \frac{1}{2} m\left(13\, \dot{s}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - 2r \sin\varphi\, \dot{s}\dot{\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = 13\, m\, \dot{s} - m r \sin\varphi\, \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial s} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{s}}\right) = 13\, m\, \ddot{s} - m r\left(\sin\varphi\, \ddot{\varphi} + \cos\varphi\, \dot{\varphi}^2\right)$$

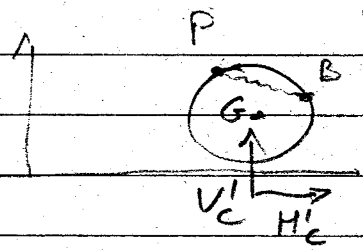
$$EL(s): \quad 13\, m\, \ddot{s} - m r \sin\varphi\, \ddot{\varphi} - m r \cos\varphi\, \dot{\varphi}^2 = -c r \sin\left(\varphi + \frac{s}{r}\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} - m r \sin\varphi\, \dot{s}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = -m r \cos\varphi\, \dot{s}\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m r^2 \ddot{\varphi} - m r\left(\sin\varphi\, \ddot{s} + \cos\varphi\, \dot{s}\dot{\varphi}\right)$$

$$EL(\varphi): \quad m r^2 \ddot{\varphi} - m r \sin\varphi\, \ddot{s} = -c r^2 \sin\left(\varphi + \frac{s}{r}\right) - m g r \cos\varphi$$

5) Reazioni vincolari dinamiche in C



Dalla I ECD si ottiene

$$(9.1)\quad \begin{cases} H_C' = 8m\,\vec{a}_G\cdot\vec{e}_x + m\,\vec{a}_P\cdot\vec{e}_x \\ V_C' - 9mg = 8m\,\cancel{\vec{a}_G\cdot\vec{e}_y} + m\,\vec{a}_P\cdot\vec{e}_y \end{cases}$$

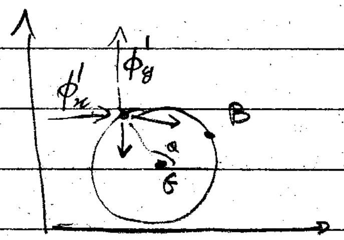
Dalla (7.3) segue che

$$(9.2)\quad \vec{a}_P = \left[\ddot{s} - r\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_x + r\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_y$$

Allora

$$(9.3)\quad \begin{cases} H_C' = 9m\ddot{s} - mr\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right] \\ V_C' = 9mg + mr\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right) \end{cases}$$

6) Reazioni dinamiche su P



$$\vec{\phi}_P' + \vec{F}_P + m\vec{g} = m\,\vec{a}_P$$

$$\vec{\phi}_P' = \phi_x'\,\vec{e}_x + \phi_y'\,\vec{e}_y$$

$$\vec{F}_P = -c\left(\vec{x}_P - \vec{x}_B\right) \overset{(2.5)}{=} -c\left[r\left(\cos\varphi - \cos\frac{s}{r}\right)\vec{e}_x + r\left(\sin\varphi + \sin\frac{s}{r}\right)\vec{e}_y\right]$$

Dunque

$$\vec{\phi}_P'\cdot\vec{e}_x:\quad \phi_x' - cr\left(\cos\varphi - \cos\frac{s}{r}\right) = m\left[\ddot{s} - r\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\right]$$

$$\vec{\phi}_P'\cdot\vec{e}_y:\quad \phi_y' - cr\left(\sin\varphi + \sin\frac{s}{r}\right) - mg = mr\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Quindi:

$$\phi_x' = cr\left(\cos\varphi - \cos\frac{s}{r}\right) + m\left[\ddot{s} - r\left(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)\right]$$

$$\phi_y' = cr\left(\sin\varphi + \sin\frac{s}{r}\right) + mg + mr\left(\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)$$

6a) Linearizzazione intorno alla config. di equilibrio stabile

Poiché il modello è conservativo, le eq. di Lagrange linearizzate intorno alle configurazioni di equilibrio sono

$$(10.1) \qquad A\ddot{\vec{\xi}} + V\vec{\xi} = 0 \qquad \underbrace{\vec{\xi} = \vec{q} - \vec{q}_e}_{\xi},$$

dove A e V sono le matrici $(l \times l)$ di elementi

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|_{\vec{q}_e}, \quad V = \mathcal{H}\big|_{\vec{q}_e}$$

Quindi, dalle (8.1) e (4.3) segue che

$$(10.2) \quad A = m\left.\begin{bmatrix} 13 & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r^2 \end{bmatrix}\right|_{\vec{q}_e^{(3)}}, \quad V = \left.\begin{bmatrix} c\cos\left(\varphi + \frac{z}{r}\right) & cr\cos\left(\varphi + \frac{z}{r}\right) \\ cr\cos\left(\varphi + \frac{z}{r}\right) & cr^2\cos\left(\varphi + \frac{z}{r}\right) - mgr\sin\varphi \end{bmatrix}\right|_{\vec{q}_e^{(3)}},$$

cioè, dato che $\vec{q}_e^{(3)} = \left(\frac{\pi}{2}r, -\frac{\pi}{2}\right)$

$$(10.3) \quad A = m\begin{bmatrix} 13 & r \\ r & r^2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} c & cr \\ cr & cr^2 + mgr \end{bmatrix}$$

Dunque, il sistema (10.1) si scrive

$$(10.4) \quad \begin{cases} 13m\ddot{\xi}_1 + mr\ddot{\xi}_2 + c\xi_1 + cr\xi_2 = 0 \\ mr\ddot{\xi}_1 + mr^2\ddot{\xi}_2 + cr\xi_1 + (cr^2 + mgr)\xi_2 = 0 \end{cases}$$

cioè un sistema lineare del secondo ordine di due equazioni nelle incognite (ξ_1, ξ_2), scarti dalla configurazione di equilibrio $\vec{q}_e^{(3)}$.

Per calcolare le pulsazioni delle piccole oscillazioni, determiniamo gli autovalori generalizzati di V_{rs}, ed A, cioè risolviamo il sistema

(11.1) $\det(V - \gamma A) = 0$.

Esplicitamente

$$\det \begin{bmatrix} c-\gamma\cdot 13m & cr-\gamma mr \\ cr-\gamma mr & cr^2+mgr-\gamma mr^2 \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$(c-13m\gamma)(cr^2+mgr-mr^2\gamma)-(cr-mr\gamma)^2=0$$

$$12mr\gamma^2-(12cr+13mg)+cg=0$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{12cr+13mg \pm \sqrt{(12cr+13mg)^2-48mrcg}}{24mr} > 0$$

Quindi, le pulsazioni delle piccole oscillazioni sono

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{12cr+13mg - \sqrt{(12cr+13mg)^2-48mcrg}}{24mr}}$$

$$\nu_2 = \sqrt{\frac{9cr+10mg + \sqrt{(9cr+10mg)^2-48mcrg}}{24mr}}$$