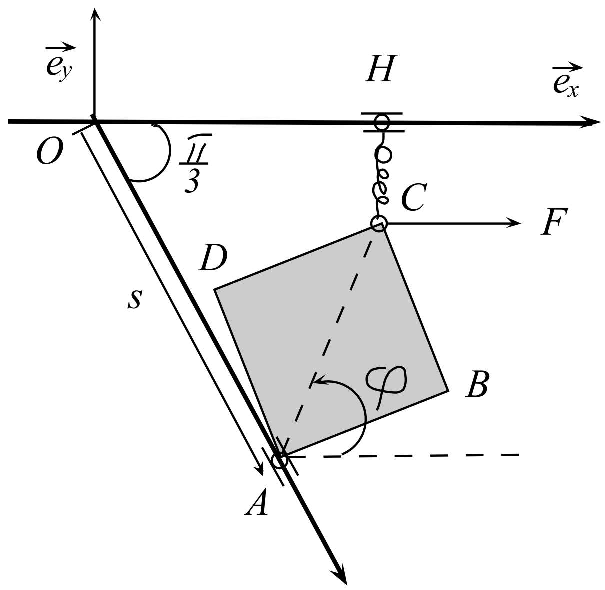
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 20 gennaio 2014

(G. Tondo)



Una lamina quadrata omogenea di lato l e massa m è vincolata, nel piano verticale, ad una guida fissa passante per O e inclinata di $\pi/3$ rispetto all'orizzontale, con un appoggio liscio e bilatero nel vertice A. Il vertice opposto C è collegato a una molla di costante elastica c, che ha l'altro estremo H fissato ad un carrello libero di scorrere lungo una guida liscia orizzontale passante per O. Scelte come coordinate libere la coordinata s di A rispetto a O lungo la guida inclinata e l'angolo φ tra l'orizzontale e la diagonale della lamina.

STATICA

Determinare:

1) i valori della forza F, sempre orizzontale, affinchè la lamina sia in equilibrio per $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$.

Supponendo da ora in poi che F assuma tali valori, si determini:

2) la stabilità delle suddette configurazioni di equilibrio;

3) la reazione vincolare della guida sulla lamina in A, all'equilibrio.

DINAMICA

4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto;

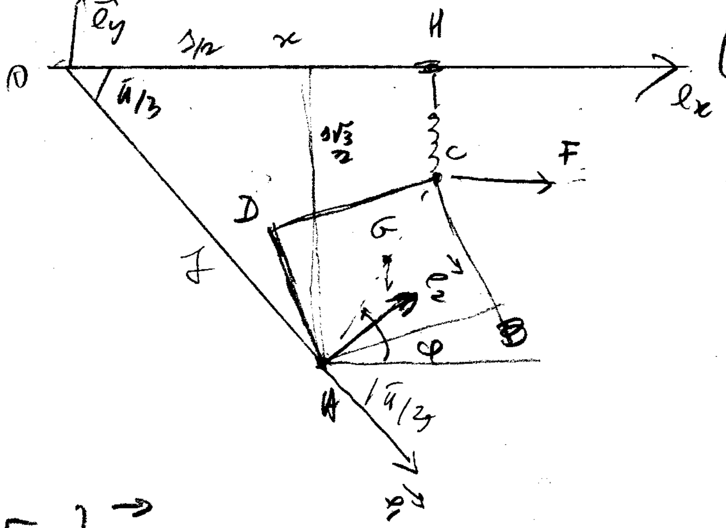
5) calcolare la reazione vincolare della guida sulla lamina in A, durante i moti;

6) (solo 6 CFU) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, calcolarne il valore per il moto di condizioni iniziali

$$\varphi(0) = 0 \ , \quad s(0) = mg/(c\sqrt{3}); \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \ , \quad \dot{s}(0) = v_0$$

6a) (solo 9 CFU) linearizzare le equazioni del punto **4)** intorno alle configurazioni di equilibrio ed, eventualmente, calcolare le pulsazioni delle piccole oscillazioni.

Compito del 20/01/2014



$$A-O = \frac{s}{2}\vec{e}_x - s\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$$

$$(C-O) = (C-A) + (A-O)$$

$$C-A = l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right)$$

$$C-O = \left(l\sqrt{2}\cos\varphi + \frac{s}{2}\right)\vec{e}_x + \left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{e}_y$$

$$C-H = \left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{e}_y$$

$$G-O = (G-A)+(A-O) = \frac{1}{2}\left(l\sqrt{2}\cos\varphi + s\right)\vec{e}_x + \frac{1}{2}\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\sqrt{3}\right)\vec{e}_y$$

1)

$$V = \frac{1}{2}c\,\overline{CH}^2 - m\vec{g}\cdot\vec{x}_G - \vec{F}\cdot\vec{x}_C$$

$$= \frac{1}{2}c\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{mg}{2}\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\sqrt{3}\right) - F\left(l\sqrt{2}\cos\varphi + \frac{s}{2}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = c\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{mg}{2}\sqrt{3} - \frac{F}{2} = -Q_s$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = c\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\sqrt{2}\cos\varphi + \frac{mg\,l\sqrt{2}}{2}\cos\varphi + F\,l\sqrt{2}\sin\varphi = -Q_\varphi$$

Eq. di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{3c}{4}s - \frac{\sqrt{6}}{2}c\,l\sin\varphi = \frac{mg}{2}\sqrt{3} + \frac{F}{2} \\ \left[c\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{mg}{2}\right]\cancel{l\sqrt{2}}\cos\varphi + F\cancel{l\sqrt{2}}\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3cs - 2\sqrt{6}c\,l\sin\varphi = 2\sqrt{3}\,mg + 2F \\ (2cl\sqrt{2}\sin\varphi - \sqrt{3}cs + mg)\cos\varphi + 2F\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = 0 \quad \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi = 1 \end{cases} \qquad \varphi = \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3cs = 2(\sqrt{3}mg + F) \\ 1(mg - \sqrt{3}cs) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3cs = 2(\sqrt{3}mg + F) \\ -(mg - \sqrt{3}cs) = 0 \end{cases}$$

Quindi, dalla II eq. ricavo $s_e = mg/(\sqrt{3}c)$ e, sostituendo nella I, ottengo

$$\frac{2}{3c}(F + \sqrt{3}mg) = \frac{mg}{\sqrt{3}c} \iff F = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{mg}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}mg = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}mg} < 0$$

Quindi, $F = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg$ è condizione necessaria affinché il modello ammetta (almeno) le 2 configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e)$

$$\vec{q}_e^{(1)} = \left(\frac{mg}{\sqrt{3}c}, 0\right) \quad ; \quad \vec{q}_e^{(2)} = \left(\frac{mg}{\sqrt{3}c}; \pi\right)$$

E' immediato verificare che è anche condizione sufficiente.

2) Stabilità

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{3}{4}c > 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial s} = -c\frac{\sqrt{3}}{2}l\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = -\frac{mgl\sqrt{2}\sin\varphi}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}cls\sin\varphi + 2cl^2\cos 2\varphi + Fl\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$\mathcal{H} \doteq \begin{bmatrix} \frac{3}{4}c & -c\frac{\sqrt{6}}{2}l\cos\varphi \\ -c\frac{\sqrt{6}}{2}l\cos\varphi & l\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cs - \frac{mg}{2}\right)\sin\varphi + c2l^2\cos 2\varphi + Fl\sqrt{2}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\mathcal{H}_{11} > 0$

$$\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(1)}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}c & -\frac{\sqrt{6}}{2}cl \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}cl & 2cl^2 + Fl\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(1)}} = \frac{3}{4}c\left(\cancel{2cl^2} + Fl\sqrt{2}\right) - \cancel{\frac{6}{4}c^2l^2} = \frac{3}{4}cFl\sqrt{2} < 0$$

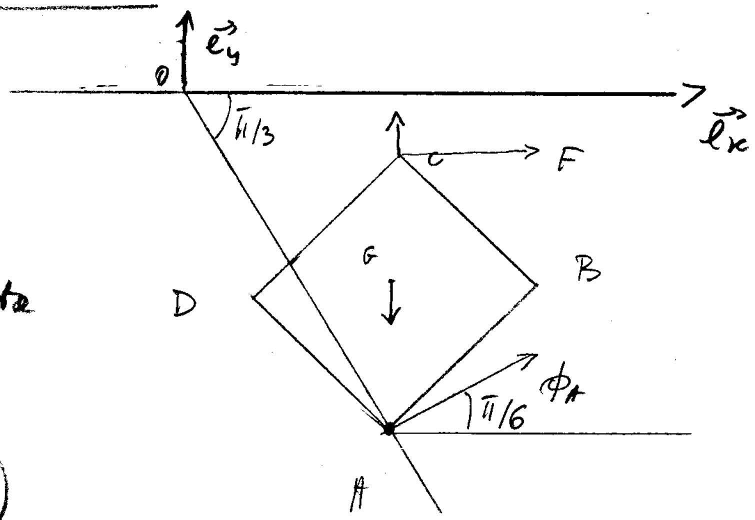
Quindi, $\vec{q}_e^{(1)}$ è un punto di sella per V, quindi <u>instabile</u>.

$$\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(2)}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}c & -\frac{\sqrt{6}}{2}cl \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}cl & 2cl^2 - Fl\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(2)}} = \frac{3}{4}c\left(\cancel{2cl^2} - Fl\sqrt{2}\right) - \cancel{\frac{3}{4}c^2} = -\frac{3}{4}cl\sqrt{2}F > 0$$

Quindi, $\vec{q}_e^{(2)}$ è un punto di min. per V, quindi un equilibrio <u>stabile</u>.

3) Reazioni vincolari all'equilibrio in A



Poiché l'appoggio in A è liscio, la reazione vincolare in A sarà ortogonale alla guida, quindi può essere rappresentata come

$$\vec{\phi}_A = \phi_A \left(\cos\frac{\pi}{6}\,\vec{e}_x + \sin\frac{\pi}{6}\,\vec{e}_y \right)$$
$$= \frac{\phi_A}{2} \left(\sqrt{3}\,\vec{e}_x + \vec{e}_y \right)$$

Per trovare l'incognita ϕ_A, basta scrivere 1 equazione, per esempio la I ECS proiettata lungo l'asse $(O, \vec{e}_x)$:

$$\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_x = 0$$

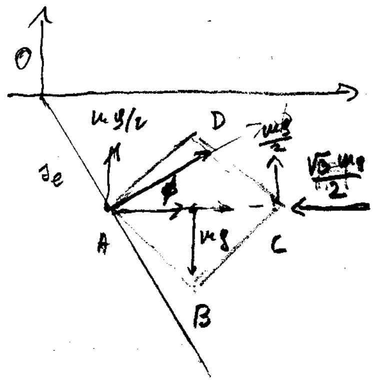
$$F + \phi_A \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \iff \boxed{\phi_A = -\frac{2}{\sqrt{3}} F = mg}$$

Quindi la reazione in A all'equilibrio è data da

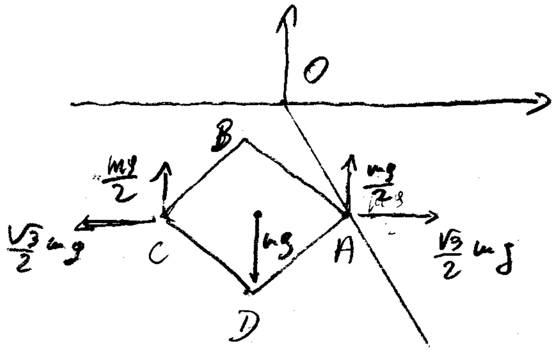
$$\vec{\phi}_A = \frac{mg}{2} \left(\sqrt{3}\,\vec{e}_x + \vec{e}_y \right)$$

Ricapitolando: $\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e)$

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\frac{mg}{\sqrt{3}c}, 0\right), \quad \vec{\phi} = \frac{mg}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$$



$$\vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{mg}{\sqrt{3}c}, 0\right), \quad \vec{\phi} = \frac{mg}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$$



Dinamica

$$K = \frac{1}{2} m |\vec{V}_G|^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\varphi}^2 \qquad I_G = \frac{1}{6} m \ell^2$$

$$\vec{V}_G = \frac{d}{dt}(G-O) = \frac{1}{2}\left(-\ell\sqrt{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi} + \dot{s}\right)\vec{e}_x + \frac{1}{2}\left(\ell\sqrt{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi} - \sqrt{3}\,\dot{s}\right)\vec{e}_y$$

$$|\vec{V}_G|^2 = \frac{1}{4}\left(-\ell\sqrt{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi} + \dot{s}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\ell\sqrt{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi} - \dot{s}\sqrt{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\ell^2 \sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 - 2\ell\sqrt{2}\sin\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(2\ell^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 3\dot{s}^2 - 2\ell\sqrt{2}\sqrt{3}\cos\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi}\right)$$

$$= \frac{\ell^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\left(\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi\right)\dot{s}\dot{\varphi} + \dot{s}^2$$

$$K = \frac{1}{2}m\left[\frac{\ell^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\left(+\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi\right)\dot{s}\dot{\varphi} + \dot{s}^2\right] + \frac{1}{12}m\ell^2\dot{\varphi}^2$$

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}\ell^2\dot{\varphi}^2 - \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\left(+\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi\right)\dot{s}\dot{\varphi} + \dot{s}^2\right)$$

$$p_s = \frac{\partial K}{\partial \dot s} = -\frac{m\,l\sqrt{2}}{4}\left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\dot\varphi + m\,\dot s \qquad , \frac{\partial K}{\partial s} = 0$$

$$\dot p_s = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot s}\right) = -\frac{m\,l\sqrt{2}}{4}\left[\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot\varphi^2 + \left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\ddot\varphi\right] + m\,\ddot s$$

EL_s:

$$m\ddot s - \frac{m\,l\sqrt{2}}{4}\left[\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot\varphi^2 + \left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\ddot\varphi\right] = Q_s$$

$$p_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = \frac{2}{3}m\,l^2\dot\varphi - m\frac{l\sqrt{2}}{4}\left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\dot s$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = -\frac{m\,l\sqrt{2}}{4}\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot s\,\dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{2}{3}m\,l^2\ddot\varphi - \frac{m\,l\sqrt{2}}{4}\left[\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot\varphi\,\dot s + \left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\ddot s\right]$$

EL_φ :

$$\frac{2}{3}m\,l^2\ddot\varphi - \frac{m\,l\sqrt{2}}{4}\left[\cancel{\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot\varphi\,\dot s} + \left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\ddot s\right] + \cancel{\frac{m\,l\sqrt{2}}{4}\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot s\,\dot\varphi} = Q_\varphi$$

5) Reazioni dinamiche in A

$$\vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_x = m\, \vec{a}_G \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{a}_G = \frac{1}{2}\left[\ddot{s} - l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{e}_x + \frac{1}{2}\left[-\sqrt{3}\,\ddot{s} + l\sqrt{2}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{e}_y$$

$$F + \frac{\phi_A'\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{2}\left[\ddot{s} - l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\right]$$

$$\phi_A' = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}mg + \frac{m}{2}\left[\ddot{s} - l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\right]\right)$$

$$\phi_A' = mg + \frac{1}{\sqrt{3}}\,m\left[\ddot{s} - l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\right]$$

6) Vincoli lisci e fissi, sollecitazione conservative $\Rightarrow$ si conserva l'energia meccanica

$$E = K + V = E|_{t=0}$$

$$\frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2 - \frac{l\sqrt{2}}{2} (\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi)\dot{s}\dot{\varphi} + \frac{2}{3} l^2 \dot{\varphi}^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} c \left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{mg}{2} \left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\sqrt{3} \right) - F\left(l\sqrt{2}\cos\varphi + \frac{s}{2} \right)$$

$$E\Big|_{\substack{\varphi=0 \\ s=s_0 \\ \dot{\varphi}_0=0 \\ \dot{s}=v_0}} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} c s_0^2 \frac{3}{4} - \frac{mg}{2}\sqrt{3} s_0 - F\left(l\sqrt{2} + \frac{s_0}{2} \right)$$

$$\overset{s_0=\frac{mg}{c\sqrt{3}}}{=} \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} c \frac{3}{4} \frac{(mg)^2}{c^2 3} - \frac{mg\sqrt{3}}{2} \frac{mg}{c\sqrt{3}} - F\left(l\sqrt{2} + \frac{mg}{c\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{8} \frac{m^2 g^2}{c} - \cancel{\frac{(mg)^2}{2c}} + mg\frac{\sqrt{3}}{2}\left(l\sqrt{2} + \cancel{\frac{mg}{c\sqrt{3}}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{8} \frac{m^2 g^2}{c} + mg\frac{\sqrt{6}}{2} l$$

6e) Linearizzazione intorno agli equilibri

Poiché il modello è conservativo

$$A \ddot{\xi} + \mathcal{V} \xi = 0 \qquad \xi = \frac{\vec{q}(t) - \vec{q_e}}{\varepsilon}$$

$$A = m \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\ell\sqrt{2}}{4}\left(\sin q_e + \sqrt{3}\cos q_e\right) \\ -\frac{\ell\sqrt{2}}{4}\left(\sin q_e + \sqrt{3}\cos q_e\right) & \frac{2}{3}\ell^2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{H}_{\vec{q_e}}$$

$$\vec{q_e}^{(1)} = \left(\frac{mg}{\sqrt{3}c}, 0\right)$$

$$\begin{cases} m\left(\ddot{\xi}_1 - \frac{\ell\sqrt{6}}{4}\ddot{\xi}_2\right) + \frac{3}{4}c\,\xi_1 - \frac{\sqrt{6}}{2}c\ell\,\xi_2 = 0 \\ m\left(-\frac{\ell\sqrt{6}}{4}\ddot{\xi}_1 + \frac{2}{3}\ell^2\ddot{\xi}_2\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}\ell c\,\xi_1 + \ell\sqrt{2}\left(\ell\sqrt{2}c - \frac{\sqrt{3}}{2}q_e\right)\xi_2 = 0 \end{cases}$$

La configurazione $\vec{q_e}^{(1)}$ è di equilibrio instabile, quindi non tutti i modi normali sono oscillatori.

$$\vec{q}_e^{(2)} = \left(\frac{mg}{\sqrt{3}\, c} , \pi \right)$$

$$\begin{cases} m\left(\ddot{\xi}_1 + \frac{l\sqrt{6}}{4} \ddot{\xi}_2 \right) + \frac{3}{4} c\, \xi_1 - \frac{\sqrt{6}}{2} c l\, \xi_2 = 0 \\ m\left(\frac{l\sqrt{6}}{4} \ddot{\xi}_1 + \frac{2}{3} l^2 \ddot{q}_2 \right) - \frac{\sqrt{6}}{2} c l\, \xi_1 + l\sqrt{2}\left(l\sqrt{2}\, c + \frac{\sqrt{3}}{2} mg \right) \xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\det\left(V - \gamma A\right) = \det \begin{bmatrix} \frac{3}{4} c - \gamma m & -\left(\frac{\sqrt{6}}{2} c l + \gamma \frac{l\sqrt{6}}{4} m \right) \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\left(c l + \frac{\gamma l}{2} \right) & l\sqrt{2}\left(c l\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} mg \right) - \gamma m \frac{2}{3} l^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{7}{24} m l \gamma^2 - \left(c l + \frac{\sqrt{6}}{2} mg \right) \gamma + \frac{3}{8} \sqrt{6}\, c g = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{3}{7} \frac{(4 c l + 2\sqrt{6}\, mg) - \sqrt{16 c^2 l^2 + 9\sqrt{6}\, mg c l + 24 m^2 g^2}}{m l}$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{7} \frac{4 c l + 2\sqrt{6}\, mg + \sqrt{16 c^2 l^2 + 9\sqrt{6}\, mg c l + 24 m^2 g^2}}{m l}$$

le radici γ_1 e γ_2 sono entrambe positive poiché sono concordi, visto che il loro prodotto pari a $\frac{3}{8}\sqrt{6}\, c g$ è positivo, e $\gamma_2 > 0$. Quindi, i modi normali sono oscillatori con pulsazioni

$$\nu_1 = \sqrt{\gamma_1} \quad , \quad \nu_2 = \sqrt{\gamma_2}$$