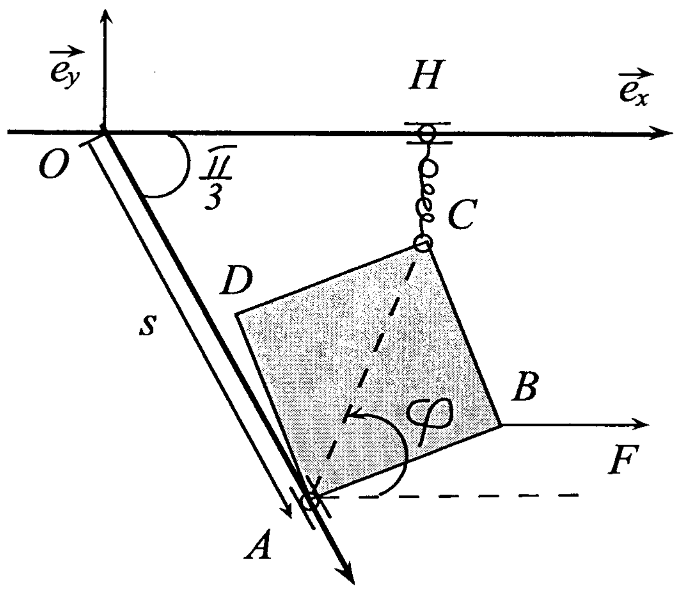
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 3 febbraio 2014

(G. Tondo)



Una lamina quadrata omogenea di lato l e massa m è vincolata, nel piano verticale, ad una guida fissa passante per O e inclinata di $\pi/3$ rispetto all'orizzontale, con un appoggio liscio e bilatero nel vertice A. Il vertice opposto C è collegato a una molla di costante elastica c, che ha l'altro estremo H fissato ad un carrello libero di scorrere lungo una guida liscia orizzontale passante per O. Scelte come coordinate libere la coordinata s di A rispetto a O lungo la guida inclinata e l'angolo φ tra l'orizzontale e la diagonale della lamina.

STATICA

Determinare:

1) i valori della forza F, sempre orizzontale, affinchè la lamina sia in equilibrio per $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$.

Supponendo da ora in poi che F assuma tali valori, si determini:

2) la stabilità delle suddette configurazioni di equilibrio;

3) la reazione vincolare della guida sulla lamina in A, all'equilibrio.

DINAMICA

4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto;

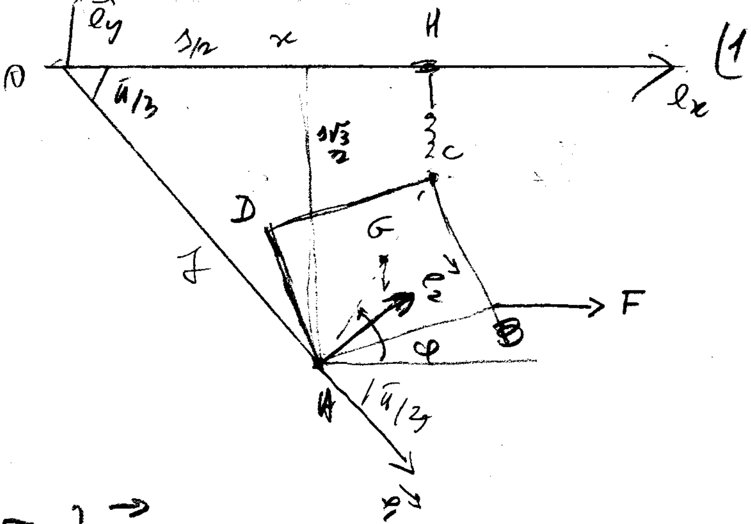
5) calcolare la reazione vincolare della guida sulla lamina in A, durante i moti;

6) (solo 6 CFU) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, calcolarne il valore per il moto di condizioni iniziali

$$\varphi(0) = 0\ , \quad s(0) = 0; \qquad \dot\varphi(0) = 0\ , \quad \dot s(0) = 0$$

6a) (solo 9 CFU) linearizzare le equazioni del punto **4)** intorno alle configurazioni di equilibrio ed, eventualmente, calcolare le pulsazioni delle piccole oscillazioni.

Compito del 3/02/2014



$$A-O = \frac{s}{2}\vec{e}_x - s\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$$

$$(B-O) = (B-A) + (A-O)$$

$$(B-A) = l\left[\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_x + \sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_y\right]$$

$$(C-O) = (C-A) + (A-O)$$

$$C-A = l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right)$$

$$C-O = \left(l\sqrt{2}\cos\varphi + \frac{s}{2}\right)\vec{e}_x + \left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{e}_y$$

$$C-H = \left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{e}_y = (C-O)\cdot\vec{e}_y\,\vec{e}_y$$

$$G-O = (G-A)+(A-O) = \frac{1}{2}\left(l\sqrt{2}\cos\varphi + s\right)\vec{e}_x + \frac{1}{2}\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\sqrt{3}\right)\vec{e}_y$$

1) $$B-O = \left(\frac{s}{2} + l\cos\left(\varphi-\pi/4\right)\right)\vec{e}_x + \left(l\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right) - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{e}_y$$

1) $$V = \frac{1}{2}c\,\overline{CH}^2 - m\vec{g}\cdot\vec{x}_G - \vec{F}\cdot\vec{x}_B$$

$$= \frac{1}{2}c\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{mg}{2}\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\sqrt{3}\right) - F\left(l\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{s}{2}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = c\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{mg}{2}\sqrt{3} - \frac{F}{2} = -Q_s$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = c\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\sqrt{2}\cos\varphi + \frac{mg\,l\sqrt{2}}{2}\cos\varphi + F\,l\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right) = -Q_\varphi$$

Eq. di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{3c}{4}s - \frac{\sqrt{6}}{2}c\,l\sin\varphi = \frac{mg}{2}\sqrt{3} + \frac{F}{2} \\ \left[c\left(l\sqrt{2}\sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{mg}{2}\right]l\sqrt{2}\cos\varphi + F\cancel{l}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3cs - 2\sqrt{6}c\, l \sin\varphi = 2\sqrt{3}\, mg + 2F \\ \left(2cl\sqrt{2}\sin\varphi - \sqrt{3}cs + mg\right)\cos\varphi\, \sqrt{2} + 2F\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi = 1 \end{cases} \qquad \varphi = \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi = -1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} 3cs = 2\left(\sqrt{3}mg + F\right) \\ \left(mg - \sqrt{3}cs\right)\cancel{\sqrt{2}} + \cancel{2}F\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3cs = 2\left(\sqrt{3}\, mg + F\right) \\ -\left(mg - \sqrt{3}\, cs\right)\cancel{\sqrt{2}} + \cancel{2}F\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = 0 \end{cases}$$

Quindi, ottengo il sistema di 2 eq. nelle incognite (F, s_e).

$$\begin{cases} 3cs - 2F = 2\sqrt{3}\, mg \\ -\sqrt{3}cs - F = -mg \end{cases} \iff \begin{array}{l} F = -mg\left(2\sqrt{3} - 3\right) \\ s_e = \frac{2mg}{3c}\left(3 - \sqrt{3}\right) \end{array} \quad < 0$$

Quindi, $F = -mg(2\sqrt{3} - 3)$ è condizione necessaria affinchè il modello ammetta (almeno) le 2 configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e)$

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\frac{2mg}{3c}(3 - \sqrt{3}),\ 0\right) \quad ; \quad \vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{2mg}{3c}(3 - \sqrt{3}),\ \pi\right)$$

E' immediato verificare che è anche condizione sufficiente.

2) Stabilità

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{3}{4}c > 0 \ , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\,\partial s} = -c\frac{\sqrt{3}}{2} l\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = -\frac{mg}{2} l\sqrt{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{6}}{2}c\, l\, s\sin\varphi + 2cl^2\cos 2\varphi + Fl\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}c & -c\frac{\sqrt{6}}{2} l\cos\varphi \\ -c\frac{\sqrt{6}}{2} l\cos\varphi & l\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cs - \frac{mg}{2}\right)\sin\varphi + c\,2l^2\cos 2\varphi + Fl\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$\mathcal{H}_{11} > 0$

$$\mathcal{H}_{|\vec{q_e}^{(1)}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}c & -\frac{\sqrt{6}}{2}cl \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}cl & 2cl^2 + F\frac{l\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{H}_{|\vec{q_e}^{(1)}} = \frac{3}{4}c\left(\cancel{2cl^2} + F\frac{l\sqrt{2}}{2}\right) - \cancel{\frac{6}{4}c^2l^2} = +\frac{3}{8}cFl\sqrt{2} < 0$$

Quindi, $\vec{q_e}^{(1)}$ è un punto di sella per V, quindi instabile.

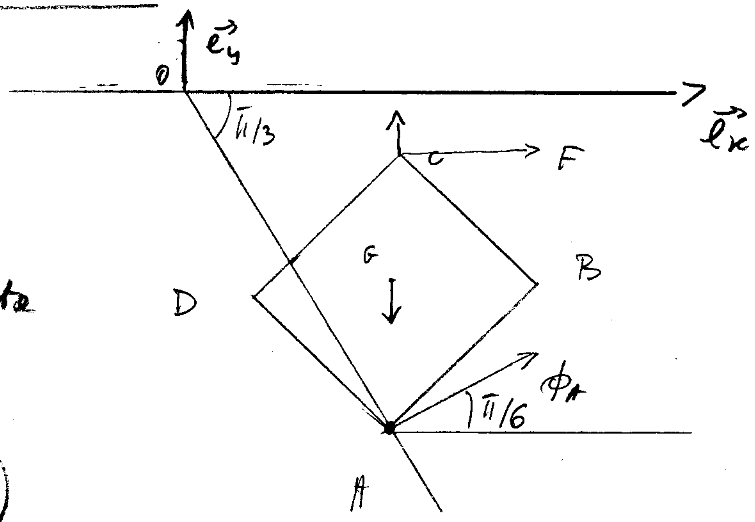
$$\mathcal{H}_{|\vec{q_e}^{(2)}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}c & -\frac{\sqrt{6}}{2}cl \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}cl & 2cl^2 - Fl\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{H}_{|\vec{q_e}^{(2)}} = \frac{3}{4}c\left(2cl^2 - \frac{Fl\sqrt{2}}{2}\right) - \cancel{\frac{3}{4}c^2} = -\frac{3}{8}cl\sqrt{2}F > 0$$

Quindi, $\vec{q_e}^{(2)}$ è un punto di min. per V, quindi un equilibrio stabile.

3) Reazioni vincolari all'equilibrio in A

Poiché l'appoggio in A è liscio, la reazione vincolare in A sarà ortogonale alla guida, quindi può essere rappresentata come



$$\vec{\phi}_A = \phi_A \left(\cos\frac{\pi}{6}\, \vec{e}_x + \sin\frac{\pi}{6}\, \vec{e}_y \right)$$
$$= \frac{\phi_A}{2} \left(\sqrt{3}\, \vec{e}_x + \vec{e}_y \right)$$

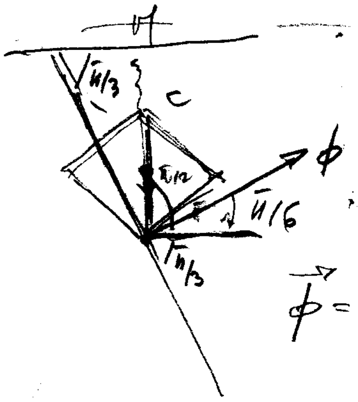
Per trovare l'incognita ϕ_A, basta scrivere 1 equazione, per esempio la I ECS proiettata lungo l'asse $(O, \vec{e}_x)$:

$$\vec{R}^{est} \cdot \vec{e}_x = 0$$
$$F + \phi_A \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \iff \boxed{\phi_A = -\frac{2}{\sqrt{3}} F = +\frac{2}{\sqrt{3}}\, mg\left(2\sqrt{3}-3\right) = mg\left(4-2\sqrt{3}\right)}$$

Quindi la reazione in A all'equilibrio è data da

$$\vec{\phi}_A = mg\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\, \vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$$

Reazioni vincolari in Statica



$$\vec{R} = m\vec{g} - c(C-H) + F\vec{e}_x + \vec{\phi}_A$$

$$\vec{\phi} = \phi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{R}\cdot\vec{e}_x = F + \frac{\phi}{2}\sqrt{3}$$

$$\vec{R}\cdot\vec{e}_y = -mg - c\left(d\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \phi\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} -mg - c\left(d\sin\varphi_e - s_e\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \phi\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \phi = 2mg - \cancel{2}c\, s_e \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = mg \\ F + \frac{\phi\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\phi = -\frac{2}{\sqrt{3}}F = mg(4-2\sqrt{3})} \end{cases}$$

$$(G-C) = \left[\frac{1}{2}\left(d\cos\varphi + \cancel{s}\right) - \left(d\cos\varphi + \cancel{\frac{s}{2}}\right)\right]\vec{e}_x + \left[\left(\frac{d}{2}\sin\varphi - \cancel{s\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) - \left(d\sin\varphi - \cancel{s\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]\vec{e}_y$$

$$= -\frac{d}{2}\cos\varphi\,\vec{e}_x - \frac{d}{2}\sin\varphi\,\vec{e}_y$$

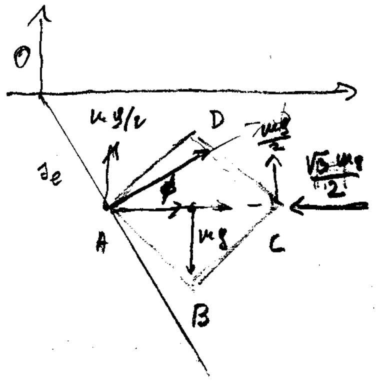
$$= -\frac{d}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{M}_c \overset{!}{=} (G-C)\times m\vec{g} = \left(-\frac{d}{2}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right)\times -mg\,\vec{e}_y$$

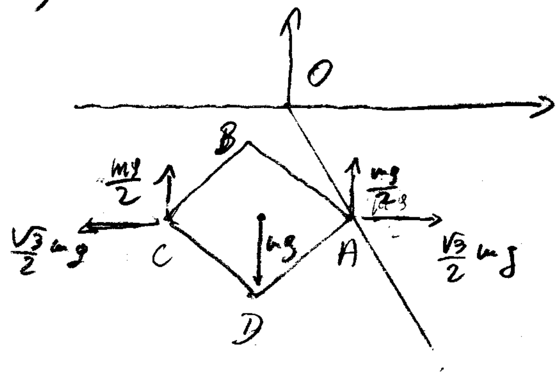
$$= mg\frac{d}{2}\cos\varphi\,\vec{e}_z$$

Ricapitolando: $\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e)$

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\frac{2mg}{3c}(3-\sqrt{3}), 0\right), \quad \vec{\phi} = mg\left(\sqrt{3}\,\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)$$



$$\vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{2mg}{3c}(3-\sqrt{3}), 0\right), \quad \vec{\phi} = mg\left(\sqrt{3}\,\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)$$



Dinamica

$$K = \frac{1}{2} m |\vec{V}_G|^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\varphi}^2 \qquad I_G = \frac{1}{6} m l^2$$

$$\vec{V}_G = \frac{d}{dt}(G-O) = \frac{1}{2}\left(-l\sqrt{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi} + \dot{s}\right)\vec{e}_x + \frac{1}{2}\left(l\sqrt{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi} - \sqrt{3}\,\dot{s}\right)\vec{e}_y$$

$$|\vec{V}_G|^2 = \frac{1}{4}\left(-l\sqrt{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi} + \dot{s}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(l\sqrt{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi} - \dot{s}\sqrt{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(2l^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 - 2l\sqrt{2}\sin\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi}\right) +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(2l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 3\dot{s}^2 - 2l\sqrt{2}\sqrt{3}\cos\varphi\,\dot{s}\dot{\varphi}\right)$$

$$= \frac{l^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{l\sqrt{2}}{2}\left(\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi\right)\dot{s}\dot{\varphi} + \dot{s}^2$$

$$K = \frac{1}{2}m\left[\frac{l^2}{2}\dot{\varphi}^2 - l\frac{\sqrt{2}}{2}\left(+\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi\right)\dot{s}\dot{\varphi} + \dot{s}^2\right] + \frac{1}{12} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{l\sqrt{2}}{2}\left(+\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi\right)\dot{s}\dot{\varphi} + \dot{s}^2\right)$$

$$p_s = \frac{\partial K}{\partial \dot s} = -\frac{m\,\ell\sqrt{2}}{4}\left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\dot\varphi + m\,\dot s \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial s} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot s}\right) = -\frac{m\,\ell\sqrt{2}}{4}\left[\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot\varphi^2+\left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\ddot\varphi\right] + m\,\ddot s$$

EL_s:

$$m\ddot s - \frac{m\,\ell\sqrt{2}}{4}\left[\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot\varphi^2+\left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\ddot\varphi\right] = Q_s$$

$$p_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = \frac{2}{3}m\,\ell^2\dot\varphi - m\frac{\ell\sqrt{2}}{4}\left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\dot s$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = -\frac{m\ell\sqrt{2}}{4}\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot s\,\dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{2}{3}m\,\ell^2\ddot\varphi - \frac{m\,\ell\sqrt{2}}{4}\left[\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot\varphi\dot s+\left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\ddot s\right]$$

EL_φ:

$$\frac{2}{3}m\,\ell^2\ddot\varphi - \frac{m\,\ell\sqrt{2}}{4}\left[\cancel{\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot\varphi\dot s}+\left(\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi\right)\ddot s\right] + \cancel{\frac{m\,\ell\sqrt{2}}{4}\left(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi\right)\dot s\dot\varphi} = Q_\varphi$$

5) Reazioni dinamiche in A

$$\vec{R}^{ext} \cdot \vec{e}_x = m\, \vec{a}_G \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{a}_G = \frac{1}{2}\left[\ddot{s} - l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{e}_x + \frac{1}{2}\left[-\sqrt{3}\,\ddot{s} + l\sqrt{2}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{e}_y$$

$$F + \frac{\phi_A'\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{2}\left[\ddot{s} - l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\right]$$

$$\phi_A' = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}mg + \frac{m}{2}\left[\ddot{s} - l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\right]\right)$$

$$\phi_A' = mg + \frac{1}{\sqrt{3}}m\left[\ddot{s} - l\sqrt{2}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right)\right]$$

6) Vincoli lisci e fissi, sollecitazione conservative $\Rightarrow$ si conserva l'energia meccanica

$$E = K + V = E\big|_{t=0}$$

$$\frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2 - \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \left(\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi \right) \dot{s}\dot{\varphi} + \frac{2}{3}\ell^2\dot{\varphi}^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} c \left(\ell\sqrt{2}\sin\varphi - s\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{mg}{2} \left(\ell\sqrt{2}\sin\varphi - s\sqrt{3} \right) - F\left(\ell\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{s}{2} \right)$$

$$E\Big|_{\substack{\varphi=0 \\ \dot{s}=0 \\ \dot{\varphi}=0 \\ s=0}} = -F\ell\frac{\sqrt{2}}{2}$$

6e) Linearizzazione intorno agli equilibri

Poichè il modello è conservativo

$$A\ddot{\xi} + N\xi = 0 \qquad \xi = \frac{\vec{q}(t)-\vec{q_e}}{\varepsilon}$$

$$A = m\begin{bmatrix} 1 & -\frac{l\sqrt{2}}{4}\left(\sin\varphi_e + \sqrt{3}\cos\varphi_e\right) \\ -\frac{l\sqrt{2}}{4}\left(\sin\varphi_e+\sqrt{3}\cos\varphi_e\right) & \frac{2}{3}l^2 \end{bmatrix}, \quad N = \mathcal{H}_{\vec{q_e}}$$

$$\vec{q_e}^{(1)} = \left(\frac{2mg}{3\sqrt{3}}\left(3-\sqrt{3}\right), 0\right)$$

$$\begin{cases} m\left(\ddot{\xi}_1 - \frac{l\sqrt{6}}{4}\ddot{\xi}_2\right) + \frac{3}{4}c\,\xi_1 - \frac{\sqrt{6}}{2}c\,l\,\xi_2 = 0 \\ m\left(-\frac{l\sqrt{6}}{4}\ddot{\xi}_1 + \frac{2}{3}l^2\ddot{\xi}_2\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}l\,c\,\xi_1 + l\sqrt{2}\left(l\sqrt{2}c - \frac{mg}{2}\left(2\sqrt{3}-3\right)\right) = 0 \end{cases}$$

La configurazione $\vec{q_e}^{(1)}$ è di equilibrio instabile, quindi non tutti i modi normali sono oscillatori.

$$\vec{q}_e^{(2)} = \left(\frac{2mg}{3\sqrt{3}} \left(3-\sqrt{3}\right), \pi \right)$$

$$\begin{cases} m\left(\ddot{\xi}_1 + \frac{l\sqrt{6}}{4} \ddot{\xi}_2 \right) + \frac{3}{4} c\, \xi_1 - \frac{\sqrt{6}}{2} c l\, \xi_2 = 0 \\ m\left(\frac{l\sqrt{6}}{4} \ddot{\xi}_1 + \frac{2}{3} l^2 \ddot{\xi}_2 \right) - \frac{\sqrt{6}}{2} c l\, \xi_1 + l\sqrt{2}\left(c l \sqrt{2} + \frac{mg}{2}\left(2\sqrt{3}-3\right) \right) \xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\det\left(V - \gamma A\right) = \det \begin{bmatrix} \frac{3}{4} c - \gamma m & -\left(\frac{\sqrt{6}}{2} c l + \gamma l \frac{\sqrt{6}}{4} m \right) \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\left(c l + \frac{\gamma l}{2} \right) & l\sqrt{2}\left(c l \sqrt{2} + \frac{mg}{2}\left(2\sqrt{3}-3\right) \right) - \gamma m \frac{2}{3} l^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{7}{24} m l \gamma^2 - \left(c l + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sqrt{3}-3\right) m g \right) \gamma + \frac{3\sqrt{2}}{8}\left(2\sqrt{2}-3\right) = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{3}{7} \frac{\left(4 c l + 2\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}-3\right) mg\right) - \sqrt{16 c^2 l^2 + 9\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}-3\right) c m g l + 24\left(7-4\sqrt{3}\right) m^2 g^2}}{m l}$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{7} \frac{\left(4 c l + 2\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}-3\right) mg\right) + \sqrt{16 c^2 l^2 + 9\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}-3\right) c m g l + 24\left(7-4\sqrt{3}\right) m^2 g^2}}{m l}$$

le radici γ_1 e γ_2 sono entrambe positive poiché sono concordi, visto che il loro prodotto pari $\frac{3\sqrt{2}}{8}\left(2\sqrt{2}-3\right)$ è positivo, e $\gamma_2 > 0$. Quindi, i modi normali sono oscillatori con pulsazioni

$$\nu_1 = \sqrt{\gamma_1}, \qquad \nu_2 = \sqrt{\gamma_2}$$