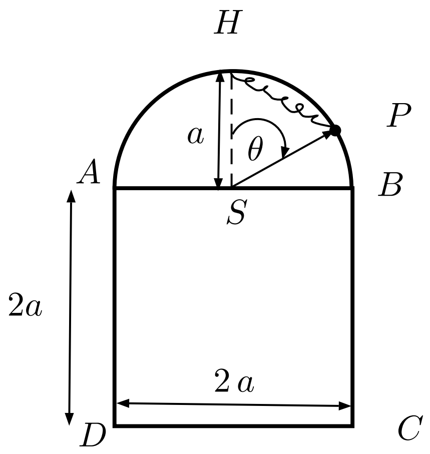
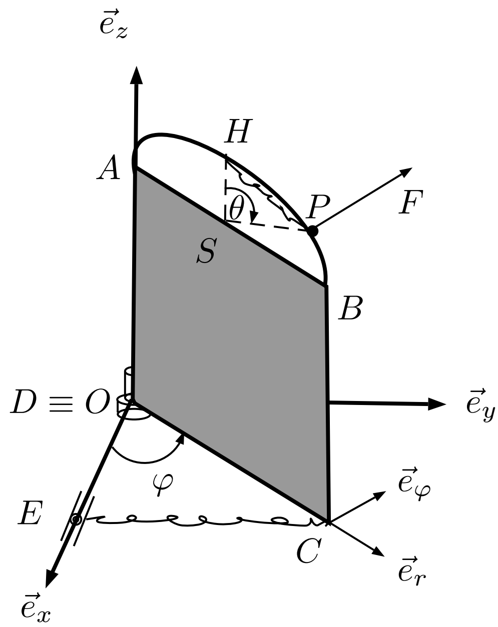
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 1 febbraio 2016. (G. Tondo)





Una lamina rigida omogenea di massa M, è vincolata a ruotare intorno ad un asse fisso verticale. Il dispositivo vincolare è realizzato mediante una cerniera cilindrica liscia, fissata in O. Un punto materiale P di massa m, è vincolato a scorrere senza attrito sul bordo del semidisco AB. Sulla lamina agisce una molla di richiamo di costante elastica c, fissata in C, la quale si mantiene sempre parallela al versore $\vec{e}_y$. Sul punto P agisce un'altra molla, con la stessa costante elastica, con estremo fissato in H, oltre ad una forza $F > 0$, sempre ortogonale al piano della lamina. Inoltre, su tutto il modello, agisce il peso proprio. Si denoti con $0 \leq \varphi < 2\pi$, l'angolo tra i versori $\vec{e}_x$ ed $\vec{e}_r$ e con $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ l'angolo tra il versore $\vec{e}_z$ e il vettore $P - S$.

STATICA.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio del modello, supponendo $m\,g \neq c\,a$;

2) calcolare le reazioni e il momento delle reazioni vincolari, all'equilibrio, della cerniera cilidrica in O sulla lamina;

3) calcolare le reazioni vincolari interne, all'equilibrio, della lamina sul punto P.

DINAMICA.

Si chiede di:

4) scrivere le equazioni pure di moto;

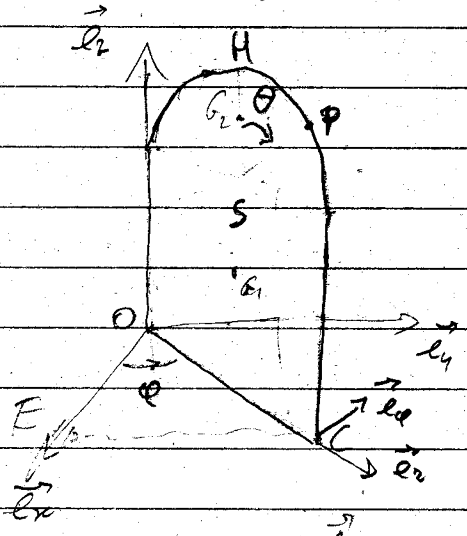
5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) calcolare le reazioni e il momento delle reazioni vincolari della cerniera in O sulla lamina, durante il moto.

Tema del 1/02/2016

Il modello è formato da 1 rigido più un punto materiale vincolato al rigido. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l.. Quindi può essere descritto dalle coordinate lagrangiane della figura

$$0 \le \varphi < 2\pi \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

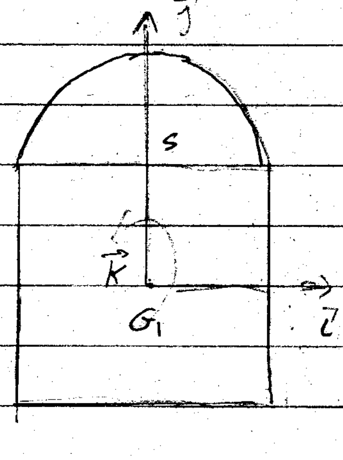


La cinematica del modello può essere descritta tramite le 3 basi

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: "intermedia"

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: "solidale"



(1.1) $\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_r - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_r + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$

(1.2) $\begin{cases} \vec{i} = \vec{e}_r \\ \vec{j} = \vec{e}_z \\ \vec{k} = -\vec{e}_\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{e}_r = \vec{i} \\ \vec{e}_z = \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{k} \end{cases}$

Quindi:

$C-O = 2a\, \vec{e}_r = 2a\,(\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y)$, $C-E = 2a \sin\varphi\, \vec{e}_y$

(1.3) $P-S = a\,(\sin\theta\, \vec{e}_r + \cos\theta\, \vec{e}_z) = a\,[\sin\theta\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\, \vec{e}_y + \cos\theta\, \vec{e}_z]$

$P-H = (P-S) + (S-H) = a(\sin\theta\, \vec{e}_r + \cos\theta\, \vec{e}_z) - a\, \vec{e}_z = a\,[\sin\theta\, \vec{e}_r + (\cos\theta - 1)\, \vec{e}_z]$

$P-O = (P-S) + (S-O) = a \sin\theta\, \vec{e}_r + a\cos\theta\, \vec{e}_z + a\,(\vec{e}_r + 2\, \vec{e}_z) =$

$= a\,[(\sin\theta + 1)\, \vec{e}_r + (\cos\theta + 2)\, \vec{e}_z]$

Statica

Poiché la sollecitazione $\vec{F}_P^{(foll)}$ non è conservativa, conviene usare le eq. pure di equilibrio. Tuttavia, per calcolare le forze generalizzate dovute a $\vec{F}_C, \vec{F}_P^{(el)}$ e al peso proprio, che sono sollecitazioni conservative, utilizziamo la loro energia potenziale

$$V^{(el)} = \frac{1}{2} c\, \overline{CE}^2 + \frac{1}{2} c\, \overline{PH}^2 = \frac{1}{2} c \left[4a^2 \sin^2\varphi + a^2(2-2\cos\theta)\right]$$
$$= c\left(2a^2 \sin^2\varphi - a^2\cos\theta + a^2\right)$$

Quindi

$$Q_\varphi^{(el)} = -\frac{\partial V^{(el)}}{\partial \varphi} = -4a^2 c \sin\varphi\cos\varphi = -2a^2 c \sin 2\varphi$$
$$Q_\theta^{(el)} = -\frac{\partial V^{(el)}}{\partial \theta} = -a^2 c \sin\theta$$

$$V^{(peso)} = \cancel{-M\vec{g}\cdot\vec{x}_G} - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P$$

G: baricentro della lamina

$$= mg\,\vec{e}_z\cdot(P-O) = mga(\cos\theta+2)$$

Dunque

$$Q_\varphi^{(peso)} = -\frac{\partial V^{(peso)}}{\partial \varphi} = 0$$
$$Q_\theta^{(peso)} = -\frac{\partial V^{(peso)}}{\partial \theta} = +mga\sin\theta$$

Per calcolare la forza generalizzata dovuta al carico follower, utilizziamo la definizione

$$Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}_p^{(foll)} \cdot \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \varphi} \qquad \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \varphi} = a\left[(\sin\theta+1)\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} + (\cos\theta+2)\cancel{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi}}\right]$$

$$Q_\theta^{(foll)} = \vec{F}_p^{(foll)} \cdot \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \theta} = a\left[\cos\theta\, \vec{e}_r + (\sin\theta+1)\cancel{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}} + \right.$$

$$\left. - \sin\theta\, \vec{e}_z + (\cos\theta+2)\cancel{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta}}\right]$$

Allora

$$\frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \varphi} = a(\sin\theta+1)\,\vec{e}_\varphi \quad , \quad \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \theta} = a(\cos\theta\, \vec{e}_r - \sin\theta\, \vec{e}_z)$$

Poiché $\vec{F} = F\, \vec{e}_\varphi$ $\qquad F > 0$

$$Q_\varphi^{(foll)} = F a (\sin\theta+1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \neq \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} \Rightarrow \text{NON conservativa}$$

$$Q_\theta^{(foll)} = 0$$

Dunque, le forze generalizzate sono

(3.1)
$$Q_\varphi = Q_\varphi^{(el)} + Q_\varphi^{(peso)} + Q_\varphi^{(foll)} = -4a^2 c \sin\varphi\cos\varphi + F a (\sin\theta+1)$$

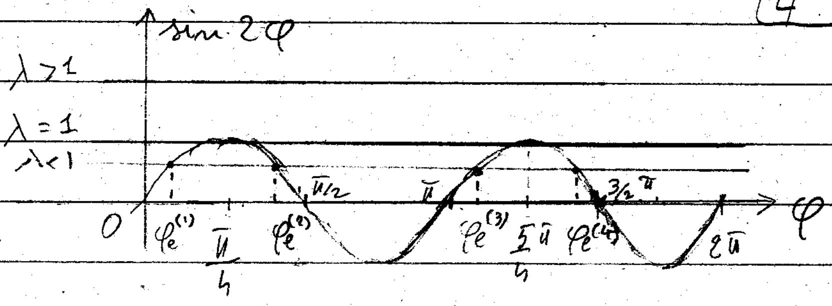
$$Q_\theta = Q_\theta^{(el)} + Q_\theta^{(peso)} + Q_\theta^{(foll)} = -a^2 c \sin\theta + mga\sin\theta = a(mg - ac)\sin\theta$$

Allora, le eq. pure di equilibrio si scrivono

(3.2)
$$\begin{cases} -2a^2c\sin 2\varphi + F\cancel{a}(\sin\theta+1) = 0 \\ a(mg - ac)\sin\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 2\varphi = \dfrac{F}{2ac} = \lambda \\ \theta = 0 \end{cases}$$

se $\lambda > 1$ $\nexists$ soluzione

se $\lambda = 1$ $\vec{q}_e^{\,(5)} = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\vec{q}_e^{\,(6)} = \left(\frac{5}{4}\pi, 0\right)$



se $\lambda < 1$

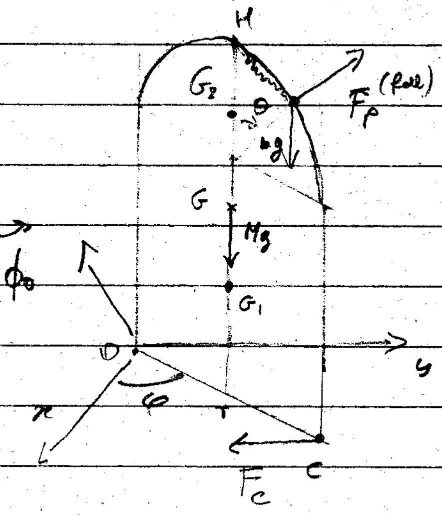
$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\varphi_e^{(1)}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}\arcsin\lambda, 0\right) \tag{4.1}$$

$$\vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e^{(1)}, 0\right), \quad \vec{q}_e^{\,(3)} = \left(\pi + \varphi_e^{(1)}, 0\right), \quad \vec{q}_e^{\,(4)} = \left(\frac{3}{2}\pi - \varphi_e^{(1)}, 0\right)$$

2) Reazioni e momento delle reazioni negli equilibri in O

Utilizziamo le ECS applicate a tutto il modello.

$$\begin{cases} \vec{R}^{(att,est)} + \vec{\Phi}_O^{(reaz,est)} = \vec{0} \\ \vec{M}_O^{(att,est)} + \vec{\mu}^{(reaz,est)} = \vec{0} \end{cases}$$



dove

$$\vec{R}^{att,est} = \vec{F}_c + M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_p^{(fil)} \tag{4.2}$$

$$\vec{F}_c = -c(C-E) = -2ca\sin\varphi\,\vec{e}_y = -2ca\sin\varphi\left(\sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$\vec{F}_p = F\,\vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$\begin{aligned} \vec{R}^{att,est} &= -2ca\sin^2\varphi\,\vec{e}_r - 2ca\sin\varphi\cos\varphi\,\vec{e}_\varphi - (M+m)g\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\varphi \\ &= -2ca\sin^2\varphi\,\vec{e}_r + (F - ca\sin 2\varphi)\,\vec{e}_\varphi - (M+m)g\,\vec{e}_z \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dunque,

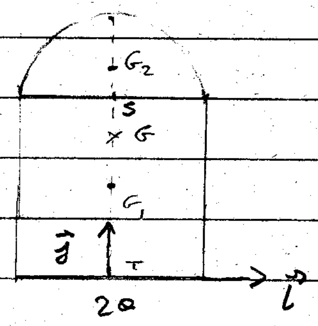
$$\vec{\Phi}_O = 2ca\sin^2\varphi_e\,\vec{e}_r - (F - ca\sin 2\varphi_e)\,\vec{e}_{\varphi_e} + (M+m)g\,\vec{e}_z \tag{4.4}$$

Inoltre,

(5.1) $$\vec{M}_O^{(ST,est)} = (C-O)\times\vec{F}_c + (G-O)\times M\vec{g} + (P-O)\times m\vec{g} + (P-O)\times\vec{F}_p^{(coll)}$$

Calcolo di G della lamina

Dalla definizione di baricentro



$$G-T = \frac{M_1(G_1-T)+M_2(G_2-T)}{M}$$

dove M_1 e M_2 sono, rispettivamente, la massa della parte quadrata e di quella semicircolare. Quindi, rispetto alla coppia di assi $(T;\vec{i},\vec{j})$

$$G_1-T = a\vec{j}\ ,\quad G_2-T = \left(2a+\overline{G_2S}\right)\vec{j}$$

$$\overline{G_2S} = \frac{4}{3\pi}a$$ dal Teo di Guldino applicato al semidisco

(5.2) $$M_1 = \frac{M}{S}S_1 = M\frac{8}{8+\pi}$$ S: area della superficie di tutta la lamina

(5.3) $$M_2 = \frac{M}{S}S_2 = M\frac{\pi}{8+\pi}$$ S_1: " " della parte quadrata; S_2: " " della parte semicircolare

N.B Il baricentro $G \notin$ all'asse di rotazione, quindi la lamina NON è bilanciata staticamente.

$$G-T = \frac{\cancel{M}S_1}{S\cancel{M}}a\vec{j} + \frac{\cancel{M}S_2}{S\cancel{M}}\left(2a+\frac{4a}{3\pi}\right)\vec{j}$$

$S_1 = (2a)^2 = 4a^2$

$S_2 = \pi a^2/2$

$S = a^2\left(\frac{8+\pi}{2}\right)$

(5.4) $$= \frac{a}{S}\left(S_1 + S_2\left(2+\frac{4}{3\pi}\right)\right)\vec{j}$$

$$= \frac{a\,2}{a^2(8+\pi)}\left(4a^2 + \frac{\cancel{\pi}a^2}{\cancel{2}}\,\frac{6\pi+4}{3\cancel{\pi}}\right)\vec{j}$$

$$= \frac{2\,a^2}{a(8+\pi)}\left(\frac{14+3\pi}{3}\right)\vec{j} = \frac{2a}{3}\left(\frac{14+3\pi}{8+\pi}\right)\vec{j} = a\,h\,\vec{j}$$ $$h := \frac{2}{3}\,\frac{14+3\pi}{8+\pi}\sim 1.4$$

Allora

$$\vec{M}_O^{(att,est)} = 2a\,\vec{e}_r \times \left(-e\,2a \sin\varphi\, \vec{e}_y\right) + \left(a\,\vec{e}_r + a h\,\vec{e}_z\right) \times \left(-Mg\,\vec{e}_z\right) +$$

$$+\, a\left[(\sin\theta+1)\,\vec{e}_r + (\cos\theta+2)\,\vec{e}_z\right] \times \left(-mg\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= -4a^2 e \sin\varphi\cos\varphi\, \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi - Mga\, \vec{e}_r \times \vec{e}_z +$$

$$+\, a(\sin\theta+1)\left(-mg\,\vec{e}_r \times \vec{e}_z + F\,\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi\right) +$$

(6.1) $$+\, a(\cos\theta+2)\,F\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi$$

$$= -4a^2 c \sin\varphi\cos\varphi\,\vec{e}_z + Mga\,\vec{e}_\varphi + a(\sin\theta+1)\,mg\,\vec{e}_\varphi +$$

$$+\, a(\sin\theta+1)\,F\,\vec{e}_z - a(\cos\theta+2)\,F\,\vec{e}_r$$

$$= -(\cos\theta+2)\,Fa\,\vec{e}_r + \left(M + m(1+\sin\theta)\right) ag\,\vec{e}_\varphi +$$

$$+\, a\left[(1+\sin\theta)F - 4ac\sin\varphi\cos\varphi\right]\vec{e}_z$$

Quindi,

(6.2) $$\vec{M}_O^{(att,est)}\Big|_{\vec{q}_e} = -3Fa\,\vec{e}_r + (M+m)\,ag\,\vec{e}_\varphi + a\,\cancel{\left(F - 2ae\lambda\right)}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{\mu} = -\vec{M}_O^{(att,est)}\Big|_{\vec{q}_e} = 3Fa\,\vec{e}_r - (M+m)\,ag\,\vec{e}_{\varphi_e}$$

Allora, le componenti del momento reattivo sono uguali in tutte le configurazioni di equilibrio. Invece, per la reazione vincolare vale che

$$2\sin^2\varphi_e = 1 - \cos 2\varphi = \begin{cases} 1-\sqrt{1-\lambda^2} & \varphi_e = \varphi_e^{(1)} & \vec{\phi}_0 \cdot \vec{e}_r = ac\left(1-\sqrt{1-\lambda^2}\right) \\ 1 & \varphi_e = \frac{\pi}{4} & \vec{\phi}_0 \cdot \vec{e}_r = ac \\ 1+\sqrt{1-\lambda^2} & \varphi_e = \varphi_e^{(2)} & \vec{\phi}_0 \cdot \vec{e}_r = ac\left(1+\sqrt{1+\lambda^2}\right) \\ 1-\sqrt{1-\lambda^2} & \varphi_e = \varphi_e^{(3)} & \vec{\phi}_0 \cdot \vec{e}_r = ac\left(1-\sqrt{1-\lambda^2}\right) \\ 1 & \varphi_e = \frac{5}{4}\pi & \vec{\phi}_0 \cdot \vec{e}_r = ac \\ 1+\sqrt{1-\lambda^2} & \varphi_e = \varphi_e^{(4)} & \vec{\phi}_0 \cdot \vec{e}_r = ac\left(1+\sqrt{1-\lambda^2}\right) \end{cases}$$

mentre

$$\vec{\phi}_0 \cdot \vec{e}_{\varphi_e} = -\frac{F}{2}, \qquad \vec{\phi}_0 \cdot \vec{e}_z = (M+m)\,g$$

3) Reazioni della [illegible] nel punto P

Applicando l'eq. della statica nel punto P

$$\vec{F}_{P|eq} + \vec{\Phi}_{P|eq} = \vec{0} \,,$$

poiché

$$\vec{F}_{P|eq} = m\vec{g} + \vec{F}^{(foll)}_{P|eq} + \cancel{\vec{F}^{(el)}_{P|eq}} = -mg\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_{\varphi e}$$

si ottiene

$$\vec{\Phi}_{P|eq} = mg\,\vec{e}_z - F\,\vec{e}_{\varphi e}$$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange. A tale scopo, dobbiamo calcolare l'energia cinetica

$$(8.1) \qquad K = K^{(lamina)} + K^{(punto)}$$

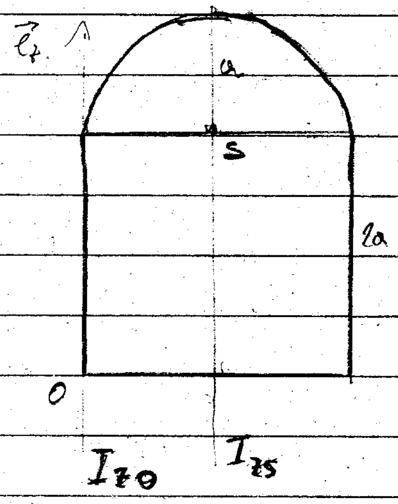
Calcolo di $K^{(lamina)}$

Poichè la lamina è un rigido con asse fisso, vale che

$$(8.2) \quad K^{(lamina)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\vec{e}_z\cdot \mathbb{I}_O(\dot{\varphi}\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot\mathbb{I}_O(\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 I_{zO}$$

dove I_{zO} denota il momento d'inerzia rs. all'asse $(O;\vec{e}_z)$.

Quindi



$$I_{zO} = I_{zO}^{(quad)} + I_{zO}^{(sd)}$$

$$(8.3) \quad I_{zO}^{(quad)} = \frac{1}{3}M_1(2a)^2 \overset{(5.2)}{=} \frac{1}{3}\,M\,\frac{8}{8+\pi}\,4a^2 = \frac{32}{3}\,\frac{M}{8+\pi}\,a^2$$

$$(8.4) \quad I_{zO}^{(sd)} = I_{zS}^{(sd)} + M_2 a^2 = \frac{1}{4}M_2 a^2 + M_2 a^2 = \frac{5}{4}M_2 a^2 \overset{(5.3)}{=} \frac{5a^2}{4}\,\frac{M\pi}{8+\pi}$$

Dunque

$$(8.5) \quad I_{zO} = \frac{M}{8+\pi}\,a^2\left(\frac{32}{3}+\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{Ma^2}{8+\pi}\,\frac{128+15\pi}{12} = Ma^2 b$$

$$(8.6) \quad K^{(lam)} = \frac{1}{2}\,M a^2 b\,\dot{\varphi}^2$$

$$b := \frac{128+15\pi}{12(8+\pi)}$$

$$K^{(punto)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{x}}_P \overset{(1.3)}{=} a\left[\cos\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_r + (1+\sin\theta)\,\dot{\vec{e}}_r - \sin\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_z\right] \qquad \dot{\vec{e}}_r = \dot\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$(9.1) \qquad = a\left[\cos\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_r + (1+\sin\theta)\,\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi - \sin\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_z\right] \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot\varphi\,\vec{e}_r$$

$$|\vec{v}_P|^2 = \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P = a^2\left[\cos^2\theta\,\dot\theta^2 + (1+\sin\theta)^2\dot\varphi^2 + \sin^2\theta\,\dot\theta^2\right]$$

$$= a^2\left[\dot\theta^2 + (1+\sin\theta)^2\dot\varphi^2\right]$$

Quindi

$$(9.2) \qquad K^{(punto)} = \frac{1}{2} m a^2\left[\dot\theta^2 + (1+\sin\theta)^2\dot\varphi^2\right]$$

Dunque

$$(9.3) \qquad K = \frac{1}{2} M a^2 b\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m a^2\left[\dot\theta^2 + (1+\sin\theta)^2\dot\varphi^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} a^2\left[Mb + m(1+\sin\theta)^2\right]\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m a^2\,\dot\theta^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi} = a^2\left[Mb + m(1+\sin\theta)^2\right]\dot\varphi \qquad \frac{\partial K}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi}\right) = a^2\left[Mb + m(1+\sin\theta)^2\right]\ddot\varphi + 2a^2 m(1+\sin\theta)\cos\theta\,\dot\theta\,\dot\varphi$$

$$(9.4)\ EL_\varphi: \quad a^2\left[Mb + m(1+\sin\theta)^2\right]\ddot\varphi + 2a^2 m(1+\sin\theta)\cos\theta\,\dot\theta\,\dot\varphi = -2a^2 c\sin 2\varphi + F a(1+\sin\theta)$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\theta} = m a^2\dot\theta, \quad \frac{\partial K}{\partial\theta} = a^2 m(1+\sin\theta)\cos\theta\,\dot\varphi^2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\theta}\right) = m a^2\ddot\theta$$

$$(9.5)\ EL_\theta: \quad m a^2\ddot\theta - m a^2(1+\sin\theta)\cos\theta\,\dot\varphi^2 = a(mg - ac)\sin\theta$$

5) Linearizzazione intorno agli equilibri

Introdotto il vettore degli scarti $\vec{x} = \frac{\vec{q}(t) - \vec{q}_e}{\varepsilon}$, il sistema delle EL linearizzate è dato da

$$(10.1) \quad A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0,$$

dove

$$(10.2) \quad A_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}_i\,\partial\dot{q}_j}\bigg|_{eq}, \quad B_{ij} = -\cancel{\frac{\partial \mathcal{Q}_i}{\partial \dot{q}_j}\bigg|_{eq}} = 0, \quad C_{ij} = -\frac{\partial \mathcal{Q}_i}{\partial q_j}\bigg|_{eq}$$

Allora

$$(10.3) \quad A = a^2 \begin{bmatrix} Mb + m(1+\sin\theta_e)^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = a^2 \begin{bmatrix} Mb+m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$(10.4) \quad C = -\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{Q}_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathcal{Q}_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathcal{Q}_\theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathcal{Q}_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{eq} = -\begin{bmatrix} -4a^2 c\cos 2\varphi_e & Fa\cos\theta_e \\ 0 & a(mg - ac)\cos\theta_e \end{bmatrix}$$

$$= +\begin{bmatrix} 4a^2 c\cos 2\varphi_e & -Fa \\ 0 & a(ac - mg) \end{bmatrix}$$

Allora, il sistema (10.1) si scrive

$$(10.5) \quad \begin{cases} a^2(Mb+m)\ddot{x}_1 + 4a^2 c\cos 2\varphi_e\, x_1 - F\cancel{a}\, x_2 = 0 \\ a^2 m\ddot{x}_2 + \cancel{a}(ac - mg)\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi, intorno a

$\vec{q}_e^{(1)}$ e $\vec{q}_e^{(3)}$:

$\cos 2\varphi_e = \sqrt{1-\lambda^2}$

$$\begin{cases} (M_b+m)\ddot{x}_1 + 4ae\sqrt{1-\lambda^2}\,x_1 - F x_2 = 0 \\ a m \ddot{x}_2 + (ae - mg)\,x_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{q}_e^{(2)}$ e $\vec{q}_e^{(4)}$:

$\cos 2\varphi_e = -\sqrt{1-\lambda^2}$

$$\begin{cases} (M_b+m)\ddot{x}_1 - 4ae\sqrt{1-\lambda^2}\,x_1 - F x_2 = 0 \\ a m \ddot{x}_2 + (ae - mg)\,x_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{q}_e^{(5)}$ e $\vec{q}_e^{(6)}$:

$\cos 2\varphi_e = 0$

$$\begin{cases} (M_b+m)\ddot{x}_1 - F x_2 = 0 \\ a m \ddot{x}_2 + (ae - mg)\,x_2 = 0 \end{cases}$$

6) Reazioni dinamiche in O sulla lamina

Usiamo le ECD su tutto il modello

$$(12.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{\,ext,att} + \vec{\Phi}_O' = M\vec{a}_G + m\vec{a}_P \\ \vec{M}_O^{\,ext,at} + \vec{\mu}' = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} \end{cases}$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$$

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = \ddot{\vec{x}}_G = \frac{d^2}{dt^2}\left(a\vec{e}_r + a h\vec{e}_z\right) = a\frac{d^2}{dt^2}\vec{e}_r =$$

$$(12.2)\quad = a\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right) = a\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi\right) = a\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\vec{e}_r\right)$$

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P \overset{(9.1)}{=} a\Big[\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_r + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_r +$$

$$\left(\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + (1+\sin\theta)\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + (1+\sin\theta)\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi +$$

$$-\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_z\Big]$$

$$(12.3)\quad = a\Big[\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta} - (1+\sin\theta)\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r +$$

$$+\left(2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + (1+\sin\theta)\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi - \left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_z\Big]$$

Quindi, tenendo conto della (4.3), (12.2) e (12.3), si ottiene

$$\vec{\Phi}_O' = +2ae\sin^2\varphi\,\vec{e}_r - \left(F - ae\sin^2\varphi\right)\vec{e}_\varphi + (M+m)g\,\vec{e}_z$$

$$+ Ma\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - a\dot{\varphi}^2\vec{e}_r\right) +$$

$$+ ma\Big[\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta} - (1+\sin\theta)\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r +$$

$$+\left(2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + (1+\sin\theta)\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi - \left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_z\Big]$$

Dunque

$$\vec{\phi}_O' = \left[2ac\sin^2\varphi - Ma^2\dot{\varphi}^2 + ma\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2+\cos\theta\,\ddot{\theta}-(1+\sin\theta)\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_r +$$

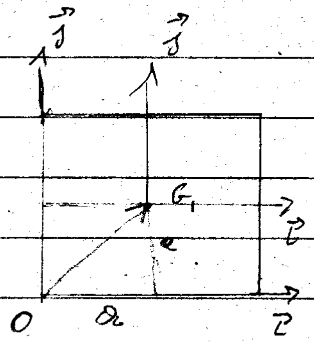
(13.1) $$+\left[-F+ac\sin 2\varphi + Ma\ddot{\varphi} + ma\left(2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}+(1+\sin\theta)\,\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left[(M+m)g - ma\left(\cos\theta\,\dot{\theta}^2+\sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\right]\vec{e}_z$$

Calcolo di $\vec{L}_O$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^{(lam)} + \vec{L}_O^{(punto)}$$

$$\vec{L}_O^{(lam)} = \vec{L}_O^{(quad)} + \vec{L}_O^{(rd)} = \mathbb{I}_O^{(quad)}(\vec{\omega}) + \mathbb{I}_O^{(rd)}(\vec{\omega})$$



Dal Teo di Huygens-Steiner per l'op. d'inerzia

$$\mathbb{I}_O^{(quad)} = \mathbb{I}_{G_1}^{(quad)} + M_1\begin{bmatrix} a^2 & -a^2 & 0\\ -a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{G_1}^{(quad)} = (2a)^2\begin{bmatrix}\frac{1}{12}M_1 & & \\ & \frac{1}{12}M_1 & \\ & & \frac{1}{6}M_1\end{bmatrix} - a^2M_1\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_O^{(quad)} = M_1a^2\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -1 & 0\\ -1 & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{8}{3}\end{bmatrix}$$

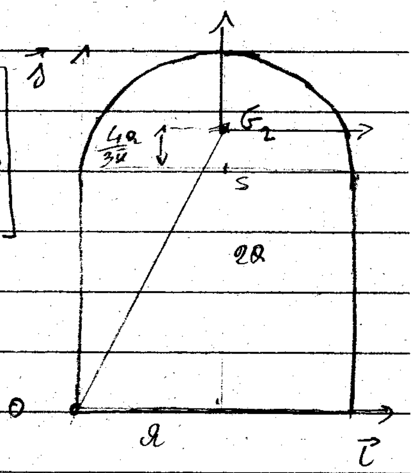
Allora

$$\mathbb{I}_O^{(quad)}(\vec{\omega}) = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_O^{(quad)}(\vec{e}_z) = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_O^{(quad)}(\vec{j}) = M_1a^2\dot{\varphi}\left(-\vec{i}+\frac{4}{3}\vec{j}\right) = M_1a^2\dot{\varphi}\left(-\vec{e}_r+\frac{4}{3}\vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{8}{8+4}Ma^2\dot{\varphi}\left(-\vec{e}_r+\frac{4}{3}\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{L}_0^{(rel)} = \mathbb{I}_0^{(rel)}(\vec{\omega})$$

$$I_0^{(rel)} = I_{G_2}^{(rel)} + M_2 \begin{bmatrix} (2a+\overline{GS})^2 & -a(2a+\overline{GS}) & 0 \\ -a(2a+\overline{GS}) & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+(2a+\overline{GS})^2 \end{bmatrix}$$



$$I_{G_2} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$$

dove

$$I_{11} = I_{1S} - M_2\overline{G_2S}^2 = \frac{1}{4}M_2 a^2 - M_2\overline{G_2S}^2 = M_2 a^2\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right)$$

$$I_{22} = I_{2S} = \frac{1}{4}M_2 a^2, \quad I_{11}+I_{22} = M_2 a^2\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right)$$

Quindi

$$I_{G_2} = M_2 a^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{2} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Dunque

$$I_0^{(rel)} = M_2 a^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{2} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \end{bmatrix} + M_2 \begin{bmatrix} \left(2a+\frac{4a}{3\pi}\right)^2 & -a\left(2a+\frac{4a}{3\pi}\right) & 0 \\ -a\left(2a+\frac{4a}{3\pi}\right) & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+\left(2a+\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Allora

$$(15.1)\quad \mathbb{I}_O^{(sd)} = M_2 a^2 \begin{bmatrix} \frac{17}{4}+\frac{16}{3\pi} & -2\left(1+\frac{2}{3\pi}\right) & 0 \\ -2\left(1+\frac{2}{3\pi}\right) & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2}+\frac{16}{3\pi} \end{bmatrix}$$

Dunque, il momento angolare della parte semicircolare è

$$\vec{L}_O^{(sd)} = \mathbb{I}_O^{(sd)}\left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\right) = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_O^{(sd)}\left(\vec{j}\right) = M_2 a^2 \dot{\varphi}\left[-2\left(1+\frac{2}{3\pi}\right)\vec{i} + \frac{5}{4}\vec{j}\right]$$

$$= \frac{\pi}{8+\pi} M a^2 \dot{\varphi}\left[-2\left(1+\frac{2}{3\pi}\right)\vec{e}_r + \frac{5}{4}\vec{e}_z\right] =$$

Quindi, il momento angolare di tutta la lamina è

$$\vec{L}_O^{(lam)} = \frac{8}{8+\pi} M a^2 \dot{\varphi}\left(-\vec{e}_r + \frac{4}{3}\vec{e}_z\right) + \frac{\pi}{8+\pi} M a^2 \dot{\varphi}\left[-2\left(1+\frac{2}{3\pi}\right)\vec{e}_r + \frac{5}{4}\vec{e}_z\right]$$

$$(15.2)\quad = \frac{M}{8+\pi} a^2 \dot{\varphi}\left[\left(-8-2\pi\left(1+\frac{2}{3\pi}\right)\right)\vec{e}_r + \left(\frac{32}{3}+\frac{5\pi}{4}\right)\vec{e}_z\right]$$

$$= \frac{M}{8+\pi} a^2 \dot{\varphi}\left[-\left(\frac{28}{3}+2\pi\right)\vec{e}_r + \left(\frac{32}{3}+\frac{5}{4}\pi\right)\vec{e}_z\right]$$

N.B. Considerato che $\vec{L}_O = I_O(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z)$, si vede che $\vec{e}_z$ NON è API(O) per la lamina, quindi essa NON è bilanciata dinamicamente.

$$\frac{d\vec{L}_O^{(lam)}}{dt} = \frac{M}{8+\pi} a^2 \ddot{\varphi}\left[-2\left(\frac{14}{3}+\pi\right)\vec{e}_r + \left(\frac{32}{3}+\frac{5}{4}\pi\right)\vec{e}_z\right] +$$

$$(15.3)\quad + \frac{M}{8+\pi} a^2 \dot{\varphi}\left[-2\left(\frac{14}{3}+\pi\right)\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right] =$$

$$= \frac{M}{8+\pi} a^2 \left[-2\left(\frac{14}{3}+\pi\right)\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi\right) + \left(\frac{32}{3}+\frac{5}{4}\pi\right)\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z\right]$$

Calcoliamo, ora, il momento angolare del punto P.

$$\vec{L}_O^{(P)} = (P-O)\times m\vec{v}_P = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ a(\sin\theta+1) & 0 & a(\cos\theta+2) \\ m a(\cos\theta\,\dot\theta) & m a(1+\sin\theta)\dot\varphi & -m a\sin\theta\,\dot\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{e}_r\; m a^2(\cos\theta+2)(1+\sin\theta)\dot\varphi +$$

(16.1) $$-\vec{e}_\varphi\left[-m a^2(\sin\theta+1)\sin\theta\,\dot\theta - m a^2\cos\theta\,\dot\theta\,(\cos\theta+2)\right] +$$

$$+\vec{e}_z\; m a^2(\sin\theta+1)^2\dot\varphi$$

$$= m a^2\left[-(\cos\theta+2)(\sin\theta+1)\dot\varphi\,\vec{e}_r + (1+\sin\theta+2\cos\theta)\,\dot\theta\,\vec{e}_\varphi + (\sin\theta+1)^2\dot\varphi\,\vec{e}_z\right]$$

La sua derivata rispetto al tempo è:

$$\frac{d\vec{L}_O^{(P)}}{dt} = (\vec{v}_P - \vec{v}_O)\times m\vec{v}_P + (P-O)\times m\vec{a}_P =$$

(12.3) $$= \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ a(\sin\theta+1) & 0 & a(\cos\theta+2) \\ m a\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2+\cos\theta\,\ddot\theta-(1+\sin\theta)\dot\varphi^2\right) & m a\left(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\ddot\varphi\right) & -m a\left(\cos\theta\,\dot\theta^2+\sin\theta\,\ddot\theta\right) \end{vmatrix}$$

$$= -m\vec{e}_r\, a^2(\cos\theta+2)\left(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\right)\ddot\varphi +$$

$$+ m\vec{e}_\varphi\left[+a^2(\sin\theta+1)\left(\cos\theta\,\dot\theta^2+\sin\theta\,\ddot\theta\right)+a^2(\cos\theta+2)\left(-\sin\theta\,\dot\theta^2+\cos\theta\,\ddot\theta-(1+\sin\theta)\dot\varphi^2\right)\right]$$

(16.2) $$+ m\vec{e}_z\, a^2(\sin\theta+1)\left(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\ddot\varphi\right)$$

$$= -\vec{e}_r m a^2(\cos\theta+2)\left(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\right)\ddot\varphi +$$
$$+\vec{e}_\varphi a^2 m\left[(\cos\theta-2\sin\theta)\dot\theta^2+(\sin\theta+2\cos\theta+1)\ddot\theta-(\cos\theta+2)(\sin\theta+1)\dot\varphi^2\right]+$$
$$+\vec{e}_z a^2 m(\sin\theta+1)\left(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi+(1+\sin\theta)\ddot\varphi\right)$$

Dunque, dalla 15.3 e dalla (16.2) si ottiene

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = a^2\left[\frac{-2M}{8+\pi}\left(\frac{14}{3}+\pi\right) - ma^2(\cos\theta+2)\left(2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}+(1+\sin\theta)\right)\right]\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z +$$

$$(17.1)\quad + a^2\left[\left(\frac{-2M}{8+\pi}\left(\frac{14}{3}+\pi\right) - m(\cos\theta+2)(\sin\theta+1)\right)\dot{\varphi}^2 + m\left[(\cos\theta-2\sin\theta)\dot{\theta}^2+(\sin\theta+2\cos\theta+1)\ddot{\theta}\right]\right]\vec{e}_\varphi$$

$$+ a^2\left[\left(\frac{M}{8+\pi}\left(\frac{32}{3}+\frac{5\pi}{4}\right)+m(\sin\theta+1)^2\right)\ddot{\varphi} + m(\sin\theta+1)2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right]\vec{e}_z$$

Allora, tenendo conto della (6.1), si ottiene

$$(17.2)\quad \vec{\mu}\cdot\vec{e}_z = Fa(\cos\theta+2) + a^2\left[\frac{-2M}{8+\pi}\left(\frac{14}{3}+\pi\right) - ma^2(\cos\theta+2)\left(2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}+(1+\sin\theta)\right)\right]\ddot{\varphi}$$

$$(17.3)\quad \vec{\mu}\cdot\vec{e}_\varphi = -\left[M+m(1+\sin\theta)\right]ag +$$

$$+ a^2\left[-\frac{2M}{8+\pi}\left(\frac{14}{3}+\pi\right) - m(\cos\theta+2)(\sin\theta+1)\,\dot{\varphi}^2 + m\left[(\cos\theta-2\sin\theta)\dot{\theta}^2+(\sin\theta+2\cos\theta+1)\ddot{\theta}\right]\right]$$

$$(17.4)\quad \vec{\mu}\cdot\vec{e}_z = -Fa(1+\sin\theta) + 2ae\sin 2\varphi +$$

$$a^2\left[\left(\frac{M}{8+\pi}\left(\frac{32}{3}+\frac{5}{4}\pi\right)+m(\sin\theta+1)^2\right)\ddot{\varphi} + m(\sin\theta+1)2\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right]$$

Si osservi che il secondo termine della (17.4) equivale all'eq. di Lagrange EL_φ, quindi è nullo, come ci si aspetta, dato che la cerniera cilindrica liscia in O NON può esercitare un momento reattivo lungo il suo asse.

Quiz: qual è il significato meccanico della EL_θ (9.5)?