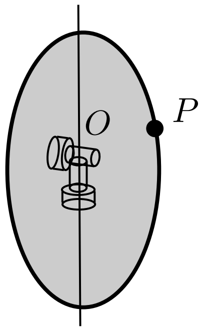
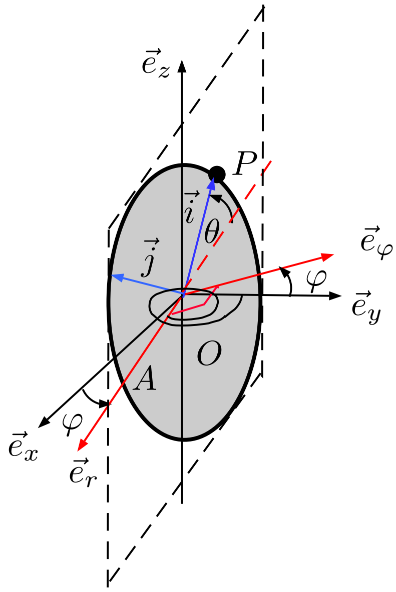
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 11 Gennaio 2016. (G. Tondo)





Un disco rigido omogeneo di centro O, raggio R e massa $8\,m$, è vincolato a ruotare intorno al suo asse orizzontale il quale, a sua volta, può ruotare intorno ad un asse fisso verticale. Il dispositivo vincolare è realizzato mediante due cerniere cilindriche con assi ortogonali, come nella figura. Un punto materiale P di massa m, è saldato su un punto della circonferenza periferica del disco. Sul disco agisce una molla angolare di richiamo con asse verticale e costante elastica c, posta nel punto fisso O; inoltre, su tutto il modello, agisce il peso proprio. Si denoti con $\varphi \in \mathbb{R}$, l'angolo tra la posizione di riposo della molla, individuata dal versore orizzontale $\vec{e}_x$ e il versore $\vec{e}_r := (\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) \times \vec{e}_z$; con $-\pi < \theta \leq \pi$ l'angolo tra il versore $-\vec{e}_r$ e il versore $\vec{\imath}$.

STATICA.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio del modello e discuterne la stabilità;

2) calcolare le reazioni e il momento delle reazioni vincolari, all'equilibrio, del dispositivo vincolare in O sul disco;

3) calcolare le reazioni vincolari interne, all'equilibrio, del disco sul punto P.

DINAMICA.

Si chiede di:

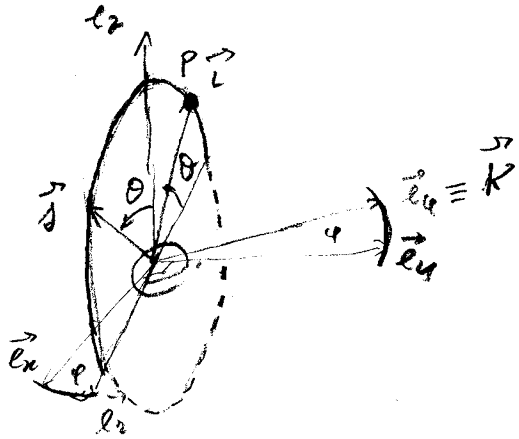
4) scrivere le equazioni pure di moto;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e trovarne la soluzione particolare corrispondente alle condizioni iniziali

$$\varphi(0) = \frac{3}{2}\pi\ , \quad \theta(0) = 0\ , \quad \dot{\varphi}(0) = 0\ , \quad \dot{\theta}(0) = 0\ ;$$

6) calcolare le reazioni e il momento delle reazioni vincolari del dispositivo vincolare in O sul disco, durante il moto.

Tema del 11/01/2016



Il modello è un rigido con 2 gradi di libertà, come si evince dal metodo dei congelamenti successivi. Come coordinate libere si possono scegliere l'angolo di rotazione φ del piano del disco intorno all'asse $\vec{e}_z$ e l'angolo θ di rotazione del disco intorno al suo asse.

Conviene considerare 3 basi di versori:

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: base "fissa",

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: base "intermedia"; $\vec{e}_\varphi := \vec{i} \times \vec{j}$, $\vec{e}_r := \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$: base "solidale".

Valgono le seguenti relazioni:

$$(1.1)\ \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_r - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_r + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1.2)\ \begin{cases} \vec{i} = -\cos\theta\, \vec{e}_r + \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{j} = \sin\theta\, \vec{e}_r + \cos\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{K} = \vec{e}_\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_r = -\cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi = \vec{K} \\ \vec{e}_z = \sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j} \end{cases}$$

$$(1.3)\ \begin{cases} \vec{i} = -\cos\theta\,(\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y) + \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{j} = \sin\theta\,(\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y) + \cos\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{K} = \vec{e}_\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\,(-\cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}) - \sin\varphi\, \vec{K} \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\,(-\cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}) + \cos\varphi\, \vec{K} \\ \vec{e}_z = \sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j} \end{cases}$$

Inoltre, la velocità angolare del modello è:

$$(2.1)\quad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{K} \overset{(1.3)}{=} \dot{\varphi}\left(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right) + \dot{\theta}\,\vec{K}$$

$$|\vec{\omega}|^2 = \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2$$

Statica

Il modello è soggetto al peso proprio (sollecitazione conservativa) e alla forza di richiamo della molla angolare (localmente conservativa). Quindi, possiamo calcolare l'energia potenziale:

$$(2.2)\quad V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}c\varphi^2 \cancel{-\delta M\vec{g}\cdot\vec{x}_0} - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P$$

$$(2.3)\quad \vec{x}_P = P-O = R\,\vec{i} \overset{(1.2)}{=} R\left(-\cos\theta\,\vec{e}_2 + \sin\theta\,\vec{e}_z\right)$$

Dunque

$$(2.4)\quad V = \frac{1}{2}c\varphi^2 + mg\,\vec{e}_z\cdot R\,\vec{i} = \frac{1}{2}c\varphi^2 + mgR\sin\theta$$

$$(2.5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = c\varphi = -Q_\varphi \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = mgR\cos\theta = -Q_\theta \end{cases}$$

Allora i punti stazionari di V e quindi gli equilibri $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$ del modello sono

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \vec{q}_e^{\,(1)} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \vec{q}_e^{\,(2)} = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Per determinare la stabilità dei 2 equilibri, calcoliamo la matrice Hessiana di V

$$(3.1) \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -mgR\sin\theta_e \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathcal{H}_{11} = c > 0 \\ \det\mathcal{H} = -cmgR\sin\theta_e \end{array}$$

Dunque

$$(3.2) \quad \vec{q}e^{(1)} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \begin{array}{l} \mathcal{H}_{11} > 0 \\ \det\mathcal{H} < 0 \end{array} \qquad \Downarrow \text{ instabile}$$

$$(3.3) \quad \vec{q}e^{(2)} = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right) \qquad \begin{array}{l} \mathcal{H}_{11} > 0 \\ \det\mathcal{H} > 0 \end{array} \qquad \text{punto di min} \Downarrow \text{ stabile}$$

2) Reazioni all'equilibrio

Il dispositivo vincolare esercita sul rigido una sollecitazione reattiva schematizzata da $(\vec{\phi}_0, \vec{\mu})$ che si trova richiedendo che siano soddisfatte le ECS

$$(3.4) \quad \begin{cases} \vec{R} + \vec{\phi}_0 = \vec{0} \\ \vec{M}_0 + \vec{\mu} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -9mg\,\vec{e}_z + \vec{\phi}_0 = \vec{0} \\ -c\varphi\,\vec{e}_z + (P-O)\times m\vec{g} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

Dato che

$$(3.5) \quad (P-O)\times m\vec{g} = R\,\vec{i}\times(-mg\,\vec{e}_z) = -mgR\,\vec{i}\times\vec{e}_z = -mgR\cos\theta\,\vec{K}$$

si trova

$$\vec{\phi}_0 = 9mg\,\vec{e}_z$$

$$(3.6) \quad \vec{\mu} = c\varphi_e\,\vec{e}_z + mgR\cos\theta_e\,\vec{e}_\varphi = \vec{0}$$

3) Reazione del disco nel punto P

Il disco esercita nel punto materiale P una reazione, tramite la saldatura, schematizzata da una forza $\vec{\phi}_P$, che si trova richiedendo che sia soddisfatta l'eq. della statica del punto

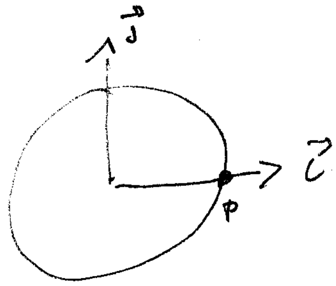
$$\vec{F}_P + \vec{\phi}_P = \vec{0} \iff -mg\,\vec{e}_z + \vec{\phi}_P = \vec{0} \iff \vec{\phi}_P = mg\,\vec{e}_z$$

Dinamica

Il modello è soggetto a vincoli olonomi e non dissipativi. Quindi, possiamo scrivere le eq. di Lagrange. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica, tenendo conto che il modello ha un punto fisso O

$$K = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\mathbb{I}_0(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\vec{L}_0 \tag{5.1}$$

Per il calcolo di $\vec{L}_0 = \mathbb{I}_0(\vec{\omega})$, conviene scegliere la terna solidale al rigido $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Essendo tale terna una TPI(O) non solo per il disco, ma anche per tutto il rigido costituito dal disco più il punto P, la matrice d'inerzia è data da



$$I_0 = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & (I_1+I_2) \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

dove

$$I_1 = I_1^{(d)} = \frac{1}{4}(8m)R^2 = 2mR^2$$

$$I_2 = I_2^{(d)} + mR^2 = 2mR^2 + mR^2 = 3mR^2 \tag{5.3}$$

$$I_1 + I_2 = 5mR^2$$

Quindi:

$$\vec{L}_0 = \mathbb{I}_0(\vec{\omega}) \overset{(2.1)}{=} [\vec{i},\vec{j},\vec{k}] \begin{bmatrix} 2mR^2 & & \\ & 3mR^2 & \\ & & 5mR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = mR^2\left(2\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{i} + 3\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{j} + 5\dot{\theta}\,\vec{k}\right) \tag{5.4}$$

Allora, l'energia cinetica del modello è:

$$K = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_O = \frac{1}{2}\left(\dot\varphi\sin\theta\,\vec{i} + \dot\varphi\cos\theta\,\vec{j} + \dot\theta\,\vec{k}\right)\cdot mR^2\left(2\dot\varphi\sin\theta\,\vec{i} + 3\dot\varphi\cos\theta\,\vec{j} + 5\dot\theta\,\vec{k}\right)$$

(6.1)
$$= \frac{1}{2} mR^2\left(2\dot\varphi^2\sin^2\theta + 3\dot\varphi^2\cos^2\theta + 5\dot\theta^2\right) = \frac{1}{2}mR^2\left(\left(2+\cos^2\theta\right)\dot\varphi^2 + 5\dot\theta^2\right)$$

Determiniamo le EL:

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi} = mR^2\left(2+\cos^2\theta\right)\dot\varphi\ ,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi}\right) = mR^2\left[\left(2+\cos^2\theta\right)\ddot\varphi - 2\cos\theta\sin\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial\varphi} = 0$$

(6.2) EL_φ: $$mR^2\left(2+\cos^2\theta\right)\ddot\varphi - mR^2\sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi \overset{(2.5)}{+} c\varphi = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\theta} = 5mR^2\dot\theta\ ,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\theta}\right) = 5mR^2\ddot\theta$$

$$\frac{\partial K}{\partial\theta} = -mR^2\cos\theta\sin\theta\,\dot\varphi^2 = -\frac{mR^2}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2$$

(6.3) EL_θ: $$5\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot\theta + \frac{\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2 + \cancel{m}gR\cos\theta = 0$$

5) Linearizzazione

Poiché i vincoli sono fissi e la sollecitazione è conservativa, le EL linearizzate intorno agli equilibri sono

$$(7.1) \qquad A\ddot{\vec{x}} + V\vec{x} = 0 \qquad \vec{x} := \frac{\vec{q}(t) - \vec{q}_e}{\varepsilon} \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

dove A è la matrice dell'energia cinetica calcolata agli equilibri e V la matrice Hessiana calcolata negli equilibri. Dunque

$$(7.2) \qquad A \overset{(6.1)}{=} mR^2 \begin{bmatrix} 2+\cos^2\theta_e & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad V \overset{(3.1)}{=} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -mgR\sin\theta_e \end{bmatrix}$$

Allora, il sistema (7.1) diventa

$$(7.3) \qquad \begin{cases} mR^2(2+\cos^2\theta_e)\ddot{x}_1 + c x_1 = 0 \\ 5mR^2 \ddot{x}_2 - mgR\sin\theta_e\, x_2 = 0 \end{cases}$$

che, calcolato in $\vec{q}_e^{(1)}$ e $\vec{q}_e^{(2)}$, risulta rispettivamente

$$(7.4) \qquad \begin{cases} 2mR^2\ddot{x}_1 + c x_1 = 0 \\ 5\cancel{m}R^2\ddot{x}_2 - \cancel{m}g\cancel{R}\, x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2mR^2\ddot{x}_1 + c x_1 = 0 \\ 5\cancel{m}R^2\ddot{x}_2 + mgR\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Per determinare le soluzioni particolari corrispondenti alle condizioni iniziali

$$(8.1)\qquad \varphi(0)=3\frac{\pi}{2}\,,\quad \dot\varphi(0)=0\,,\quad \theta(0)=0,\quad \dot\theta(0)=0\,,$$

scriviamo, prima, gli integrali generali dei (7.4). Ciò si può fare immediatamente poiché le 2 equazioni di ognuno dei 2 sistemi sono <u>già</u> disaccoppiate.

Allora, intorno a $\vec{q}e^{(1)}$

$$(8.2)\qquad \begin{cases} x_1(t) = A_1\cos\left(\sqrt{\frac{c}{2mR^2}}\,t+\alpha_1\right) \\ x_2(t) = A_2\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{5R}}\,t+\alpha_2\right) \end{cases}\qquad A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Per imporre la (8.1), ricordiamo che, per definizione,

$$(8.3)\qquad x_1(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi_e}{\varepsilon}\,,\quad x_2(t)=\frac{\theta(t)-\theta_e}{\varepsilon}$$

Quindi, tenuto conto della (8.3), le (8.2) si scrivono

$$(8.4)\qquad \begin{aligned} \varphi(t) &= \varepsilon A_1\cos\left(\sqrt{\frac{c}{2mR^2}}\,t+\alpha_1\right) \\ \theta(t) &= \frac{\pi}{2}+\varepsilon A_2\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{5R}}\,t+\alpha_2\right) \end{aligned}$$

Allora, la richiesta (8.1) implica

$$\begin{cases} 3\frac{\pi}{2}=\varphi(0) = \varepsilon A_1\cos\alpha_1 \\ 0=\dot\varphi(0) = -\varepsilon A_1\sqrt{\frac{c}{2mR^2}}\sin\alpha_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \varepsilon A_1=\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=\theta(0)= \frac{\pi}{2}+\varepsilon A_2\cosh\alpha_2 \\ 0=\dot\theta(0)= \varepsilon A_2\sqrt{\frac{g}{5R}}\sinh\alpha_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_2=0 \\ \varepsilon A_2=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Dunque, la soluzione particolare che soddisfa le (8.1) intorno a $\vec{q}e^{(1)}$ è

$$(9.1)\quad \begin{cases} \varphi(t) = 3\frac{\pi}{2} \cos \sqrt{\frac{c}{2mR^2}}\, t & \text{moto armonico} \\ \theta(t) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \cosh \sqrt{\frac{g}{5R}}\, t\right) & \text{moto iperbolico} \end{cases}$$

Analogamente, intorno a $\vec{q}e^{(2)}$

$$(9.2)\quad \begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{2mR^2}}\, t + \alpha_1\right) \\ x_2(t) = B_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{5R}}\, t + \beta_2\right) \end{cases}$$

quindi

$$(9.3)\quad \begin{cases} \varphi(t) = \varepsilon A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{2mR^2}}\, t + \alpha_1\right) & \text{moto armonico} \\ \theta(t) = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon B_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{5R}}\, t + \beta_2\right) & \text{moto armonico} \end{cases}$$

La soluzione della I eq. è la stessa di (9.1). Invece, per la II eq., la richiesta (8.1) si scrive

$$(9.4)\quad \begin{cases} 0 = \theta(0) = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon B_2 \cos \beta_2 \\ 0 = \dot{\theta}(0) = -\varepsilon B_2 \sqrt{\frac{g}{5R}} \sin \beta_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \varepsilon B_2 = +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Dunque, la soluzione particolare che soddisfa le (8.2) intorno a $\vec{q}e^{(2)}$ è

$$(9.5)\quad \begin{cases} \varphi(t) = 3\frac{\pi}{2} \cos \sqrt{\frac{c}{2mR^2}}\, t & \text{moto armonico} \\ \theta(t) = \frac{\pi}{2}\left(-1 + \cos \sqrt{\frac{g}{5R}}\, t\right) & \text{moto armonico} \end{cases}$$

6) Reazioni dinamiche in O, nel rigido

Scriviamo le ECS tenendo conto che il rigido ha il punto fisso O

$$\vec{R}^{(est)} + \vec{\phi}_0' = \cancel{8m\vec{a}_0} + m\vec{a}_P \qquad (10.1)$$
$$\vec{M}_0^{(est)} + \vec{\mu}' = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$$

Per calcolare l'accelerazione del punto P del rigido, scriviamo

$$(10.2) \quad P - O = R\vec{i} = R\left(-\cos\theta\, \vec{e}_r + \sin\theta\, \vec{e}_z\right)$$

Deriviamo, rispetto al tempo la (10.2), tenendo conto che

$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{\omega}^{(i)} \times \vec{e}_r = \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi \,, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = \vec{\omega}^{(i)} \times \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\, \vec{e}_r \,,$$

$$\vec{\omega}^{(i)} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z \,,$$

dove $\vec{\omega}^{(i)}$ indica la velocità angolare della terna intermedia $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ rs. a quella fissa.

ICMAT
www.icmat.es

$$\vec{N}_p = R\left(\dot\theta \sin\theta\, \vec{e}_r - \cos\theta\, \dot{\vec{e}}_r + \cos\theta\,\dot\theta\, \vec{e}_z\right)$$

(11.1) $$= R\left(\dot\theta \sin\theta\, \vec{e}_r - \dot\varphi \cos\theta\, \vec{e}_\varphi + \cos\theta\,\dot\theta\, \vec{e}_z\right)$$

$$\vec{a}_p = R\Big[\left(\ddot\theta \sin\theta + \dot\theta^2 \cos\theta\right)\vec{e}_r + \dot\theta\dot\varphi \sin\theta\, \vec{e}_\varphi - \ddot\varphi \cos\theta\, \hat{e}_\varphi + \dot\varphi\dot\theta \sin\theta\, \vec{e}_\varphi$$
$$+ \dot\varphi^2 \cos\theta\, \vec{e}_r + \left(\ddot\theta \cos\theta - \dot\theta^2 \sin\theta\right)\vec{e}_z\Big]$$

(11.2) $$= R\left[\ddot\theta \sin\theta + \left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\right)\cos\theta\right]\vec{e}_r +$$
$$R\left[2\dot\theta\dot\varphi \sin\theta - \ddot\varphi \cos\theta\right]\vec{e}_\varphi +$$
$$+ R\left(\ddot\theta \cos\theta - \dot\theta^2 \sin\theta\right)\vec{e}_z$$

Dunque, la I ECD (10.1) si può scrivere

$$-9mg\,\vec{e}_z + \vec{\Phi}_o{}' = m\,\vec{a}_p$$

da cui

(11.3) $$\vec{\Phi}_o{}' = 9mg\,\vec{e}_z + m\,\vec{a}_p = mR\left[\ddot\theta \sin\theta + \left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\right)\cos\theta\right]\vec{e}_r +$$
$$mR\left[2\dot\theta\dot\varphi \sin\theta - \ddot\varphi \cos\theta\right)\vec{e}_\varphi +$$
$$+ m\left[9g + R\left(\ddot\theta \cos\theta - \dot\theta^2 \sin\theta\right)\right]\vec{e}_z$$

Per la II ECD, calcoliamo

$$\vec{L}_0 = mR^2\left(2\dot\varphi \sin\theta\,\vec{i} + 3\dot\varphi\cos\theta\,\vec{j} + 5\dot\theta\,\vec{k}\right)$$

$$= mR^2\left[2\dot\varphi\sin\theta\left(-\cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_r\right) + 3\dot\varphi\cos\theta\left(\sin\theta\,\vec{e}_z + \cos\theta\,\vec{e}_r\right) + 5\dot\theta\,\vec{e}_\varphi\right]$$

$$= mR^2\left[\dot\varphi\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_z + 5\dot\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot\varphi\left(\sin^2\theta + 3\cos^2\theta\right)\vec{e}_r\right]$$

$$= mR^2\left[\frac{\dot\varphi}{2}\sin 2\theta\,\vec{e}_z + 5\dot\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot\varphi\left(2+\cos^2\theta\right)\vec{e}_r\right]$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = mR^2\left[\left(\frac{\ddot\varphi}{2}\sin 2\theta + \dot\varphi\cos 2\theta\,\dot\theta\right)\vec{e}_z + \frac{\dot\varphi}{2}\sin 2\theta\,\dot{\vec{e}}_z + \right.$$

$$\left. + 5\left(\ddot\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot\theta\,\dot{\vec{e}}_\varphi\right) + \left(\ddot\varphi\left(2+\cos^2\theta\right) - 2\dot\varphi\,\dot\theta\cos\theta\sin\theta\right)\vec{e}_r\right]$$

$$= mR^2\left[\left(\frac{\ddot\varphi}{2}\sin 2\theta + \dot\varphi\cos 2\theta\right)\dot\theta\,\underset{1}{\vec{e}_z} + \frac{\dot\varphi}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi\,\underset{0}{\vec{e}_\varphi} + \right.$$

$$\left. + 5\ddot\theta\,\underset{0}{\vec{e}_\varphi} - 5\dot\theta\dot\varphi\,\underset{1}{\vec{e}_z} + \left(\ddot\varphi\left(2+\cos^2\theta\right) - \dot\varphi\dot\theta\sin 2\theta\right)\vec{e}_r\right]$$

$$= mR^2\left[\frac{\ddot\varphi}{2}\sin 2\theta + \left(\cos 2\theta - 5\right)\dot\varphi\dot\theta\;\vec{e}_z + \right.$$

$$+ \left(\frac{\dot\varphi^2}{2}\sin 2\theta + 5\ddot\theta\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$\left. + \left(\ddot\varphi\left(2+\cos^2\theta\right) - \dot\varphi\dot\theta\sin 2\theta\right)\vec{e}_r\right]$$

Inoltre, dalle (3.5)

$$\vec{M}_0^{(att)} = -c\varphi\,\vec{e}_z - mgR\cos\theta\,\vec{e}_\varphi \,.$$

Allora, dalla II ECD si ottiene

$$\vec{\mu}' = mR^2\left[\frac{\dot{\varphi}}{2}\sin 2\theta + (\cos 2\theta - 5)\dot{\varphi}\dot{\theta}\right]\vec{e}_2 +$$
$$+ mR^2\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\sin 2\theta + 5\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$$
$$+ \left(c\varphi + mR^2\left[\ddot{\varphi}(2+\cos^2\theta) - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta\right]\right)\vec{e}_z$$

Si osservi che l'unica componente non nulla di $\vec{\mu}'$ è quella lungo $\vec{e}_2$

$$\vec{0} \neq \vec{\mu}' \cdot \vec{e}_2 = mR^2\left[\frac{\ddot{\varphi}}{2}\sin 2\theta + (\cos 2\theta - 5)\dot{\varphi}\dot{\theta}\right],$$

poiché le componenti lungo $\vec{e}_z$, rispettivamente $\vec{e}_\varphi$, si annullano, coincidendo ——— con il primo termine della (6.2), rispettivamente (6.3), cioè le EL. Ciò si poteva prevedere a priori poiché, il lavoro virtuale del complesso delle sollecitazioni reattive sul modello è nullo per l'Hp. di vincoli non dissipativi e bilateri. Quindi

$$0 = LV^{(react)} = \vec{\phi}'_0 \cdot \cancel{\delta x_0} + \vec{\mu}' \cdot \vec{\varepsilon}, \qquad \vec{\varepsilon} = \vec{\omega}\,\delta\tau = \dot{\varphi}\,\delta\tau\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\delta\tau\,\vec{e}_\varphi = \delta\varphi\,\vec{e}_z + \delta\theta\,\vec{e}_\varphi$$

Allora,

$$0 = \vec{\mu}' \cdot \vec{e}_z\,\delta\varphi + \vec{F}' \cdot \vec{e}_\varphi\,\delta\theta \qquad \forall\,\delta\varphi, \delta\theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\mu}' \cdot \vec{e}_z = \vec{\mu}' \cdot \vec{e}_\varphi = 0$$