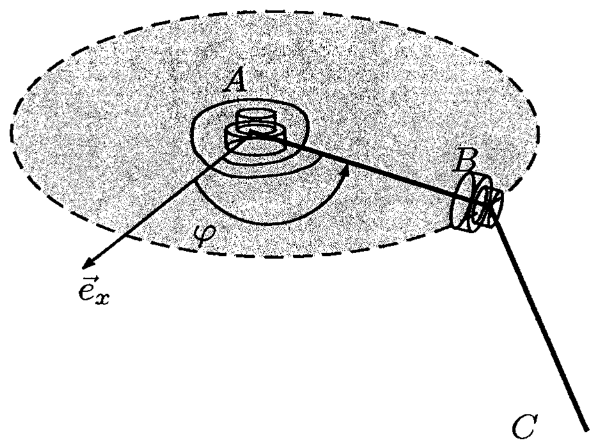
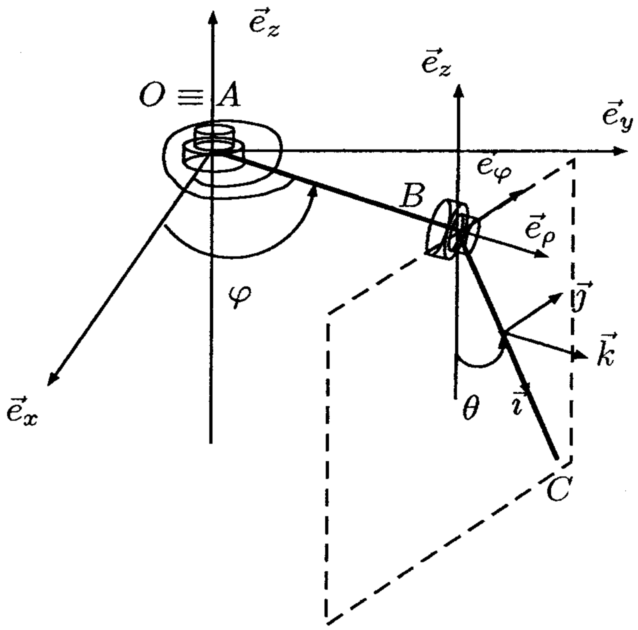
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 13 Luglio 2015. (G. Tondo)





Un'asta rigida omogenea AB, di lunghezza L e massa m, è vincolata, mediante una cerniera cilindrica fissa con asse verticale in $O \equiv A$. Una seconda asta, uguale alla prima, è vincolata a questa in B mediante un'ulteriore cerniera cilindrica di asse AB. Sull'asta AB agisce una molla angolare di richiamo con asse verticale e costante elastica c, posta in A; inoltre, su tutto il modello, agisce il peso proprio. Si denoti con φ l'angolo tra la posizione di riposo della molla, individuata dal versore $\vec{e}_x$ e l'asta AB.

STATICA.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

2) calcolare le reazioni vincolari, all'equilibrio, della cerniera cilindrica in A sull'asta AB;

3) calcolare le reazioni vincolari, all'equilibrio, della cerniera cilindrica in B sull'asta BC.

DINAMICA.

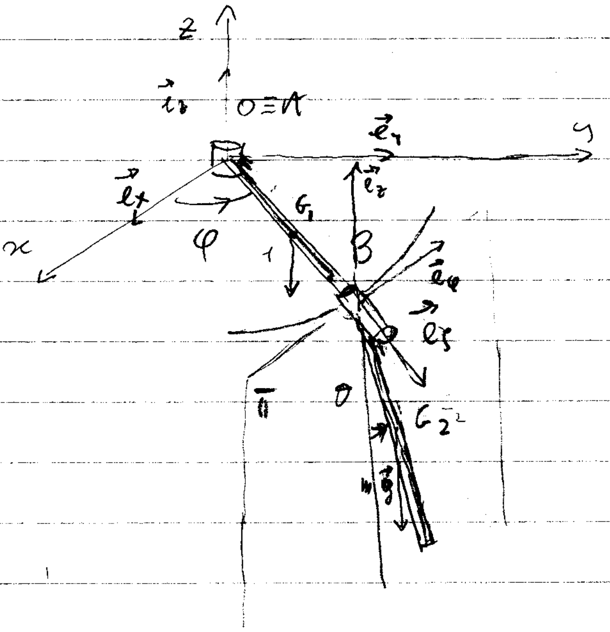
Si chiede di:

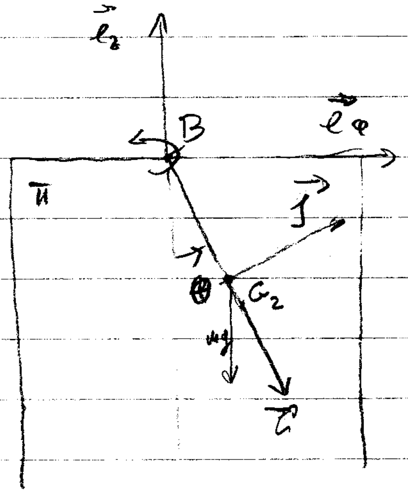
4) scrivere le equazioni pure di moto;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) calcolare le reazioni vincolari, durante il moto, della cerniera cilindrica in A, sull'asta AB.

<u>Cinematica</u>. Il sistema è un articolato con 2 g.l..





L'asta 1 si muove di moto rotatorio intorno all'asse z. Quindi la sua velocità angolare $\vec\omega_1$ vale

(1.1) $$\vec\omega_1 = \dot\varphi\, \vec e_z$$

Il moto dell'asta 2 si può scomporre nel moto di "trascinamento" del piano Π, ortogonale all'asta 1, e nel moto relativo al piano, che è un moto rotatorio intorno all'asse $\vec e_\rho$. Allora, per il teorema di composizione delle velocità angolari, la velocità angolare $\vec\omega_2$ dell'asta 2 risulta

(1.2) $$\vec\omega_2 = \dot\varphi\, \vec e_z + \dot\theta\, \vec e_\rho$$

N.B. Nella descrizione cinematica del sistema, conviene considerare 3 terne rigide:

i) $\vec e := [\vec e_x, \vec e_y, \vec e_z]$, "fissa"

ii) $\vec e' := [\vec e_\rho, \vec e_\varphi, \vec e_z]$, solidale all'asta 1

iii) $\vec e'' := [\vec i, \vec j, \vec k]$, solidale all'asta 2

Le trasformazioni tra le terne $\vec{e}$ ed $\vec{e}\,'$ sono:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \quad ,$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

in termini matriciali

$$(2.1) \quad [\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z] = [\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z] \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_\varphi}$$

che si può scrivere in forma più sintetica

$$(2.2) \quad \vec{e}\,' = \vec{e}\,[R_\varphi]^{e}_{e'} \qquad R_\varphi R_\varphi^T = R_\varphi^T R_\varphi = \mathbb{1}_3$$

La trasformazione inversa è:

$$\vec{e} = \vec{e}\,' R_\varphi^{-1} = \vec{e}\,' R_\varphi^T \quad ,$$

cioè

$$(2.3) \quad [\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z] = [\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z] \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le trasformazioni tra le terne $\vec{e}'$ ed $\vec{e}''$ sono:

(3.1)
$$\vec{i} = -\cos\theta\ \vec{e}_z + \sin\theta\ \vec{e}_\varphi$$
$$\vec{j} = \sin\theta\ \vec{e}_z + \cos\theta\ \vec{e}_\varphi$$
$$\vec{K} = \vec{e}_\rho$$

Quindi, in termini matriciali

(3.2) $$\vec{e}'' = \vec{e}'[R_\theta]^{e'}_{e''}$$

dove

(3.3) $$R_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

La trasformazione inversa è:

(3.4) $$\vec{e}' = \vec{e}''R_\theta^{-1} = \vec{e}''R_\theta^T$$

cioè

(3.5) $$[\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z] = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{K}] \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

(3.6)
$$\vec{e}_\rho = \vec{K}$$
$$\vec{e}_\varphi = \sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$$
$$\vec{e}_z = -\cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$$

Determiniamo, ora, la trasformazione tra $\vec{e}$ ed $\vec{e}''$.

1) $$\vec{e} \overset{(2.2)}{=} \vec{e}\,' R_\varphi^T \overset{(3.3)}{=} \vec{e}\,'' R_\theta^T R_\varphi^T$$

dove

$$R_\theta^T R_\varphi^T = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

(4.2) $$= \begin{bmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta \\ -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\vec{e}_x = -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} - \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k}$$

(4.3) $$\vec{e}_y = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{j} + \sin\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_z = -\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

La trasformazione inversa è data da

(4.4) $$\vec{e}\,'' = \vec{e}\left(R_\theta^T R_\varphi^T\right)^{-1} = \vec{e}\left(R_\theta^T R_\varphi^T\right)^T = \vec{e}\, R_\varphi R_\theta$$

dove

5) $$R_\varphi R_\theta = \begin{bmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo ora scrivere le componenti di $\vec{\omega}_2$ sia nella terna fissa $\vec{e}$, sia in quella solidale al rigido $\vec{e}''$. Infatti, dalla (4.2) si ha che

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{k} \overset{(4.4)}{=} \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) =$$

$$= \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e}_y + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \tag{5.1}$$

e inoltre

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_K \overset{(4.3)}{=} \dot{\varphi}\left(-\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\right) + \dot{\theta}\,\vec{K} =$$

$$= -\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{\imath} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{\jmath} + \dot{\theta}\,\vec{K} \tag{5.2}$$

Statica

La sollecitazione attiva è conservativa. Calcoliamo l'energia potenziale

(6.1) $$V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2} c\varphi^2 - \cancel{m\vec{g}\cdot(G_1-O)} - m\vec{g}\cdot(G_2-O)$$

(6.2) $$G_2-O = (G_2-B)+(B-O) = \frac{L}{2}\vec{i} + L\vec{e_\rho}$$

$$= \frac{L}{2}\left(-\cos\theta\,\vec{e_z} + \sin\theta\,\vec{e_\varphi}\right) + L\vec{e_\rho}$$

$$V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2} c\varphi^2 + mg\vec{e_z}\cdot\left(\frac{L}{2}\vec{i} + L\vec{e_\rho}\right)$$

(6.3) $$= \frac{1}{2} c\varphi^2 - mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

Gli equilibri sono i punti stazionari di V.

(6.4) $$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = c\varphi = -Q_\varphi, \quad \frac{\partial V}{\partial\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta = -Q_\theta$$

Quindi, i punti di equilibrio sono tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} c\varphi = 0 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \theta = 0 \quad \text{vel} \quad \theta = \pi \end{cases}$$

Dunque, ci sono due configurazioni di equilibrio

(7.1) $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$

$\vec{q}_e^{\,(1)} = (0, 0)$, $\vec{q}_e^{\,(2)} = (0, \pi)$

Stabilità degli equilibri

Calcoliamo la matrice Hessiana nelle config. di equilibrio

(7.2) $\mathcal{H}(\varphi_e, \theta_e) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & mg\frac{L}{2}\cos\theta_e \end{bmatrix}$ $\quad \mathcal{H}^1_1 = c > 0$

$\det \mathcal{H} = mgc\frac{L}{2}\cos\theta_e$

Quindi,

$\vec{q}_e^{\,(1)} = (0, 0)$ $\det\mathcal{H} > 0 \Rightarrow$ pto di min $\Rightarrow$ eq. stabile

$\vec{q}_e^{\,(2)} = (0, \pi)$ $\det\mathcal{H} < 0 \Rightarrow$ pto di sella $\Rightarrow$ eq. instabile

2) Reazioni vincolari in A, all'equilibrio

All'equilibrio, devono essere soddisfatte le ECS su tutto il modello

$$(8.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{(est)} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est)} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi}_A = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est,att)} + \vec{M}_A^{(est,reatt)} = \vec{0} \end{cases}$$

$$(8.2)\quad \vec{R}^{(est,att)} = 2m\vec{g} \Rightarrow \vec{\phi}_A = -2m\vec{g} = 2mg\,\vec{e}_z$$

$$\vec{M}_A^{(est,att)} = -c\varphi\,\vec{e}_z + (G_1-A)\times m\vec{g} + (G_2-A)\times m\vec{g}$$

$$(8.3)\quad = -c\varphi\,\vec{e}_z + \frac{L}{2}\vec{e}_\rho \times (-mg\vec{e}_z) + \left(\frac{L}{2}\vec{i} + L\vec{e}_\rho\right)\times(-mg\vec{e}_z)$$

$$= -c\varphi\,\vec{e}_z + \frac{L}{2}mg\,\vec{e}_\varphi - mg\frac{L}{2}\sin(\pi-\theta)\,\vec{e}_\rho + mgL\,\vec{e}_\varphi$$

$$= -mg\frac{L}{2}\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \frac{3}{2}mgL\,\vec{e}_\varphi - c\varphi\,\vec{e}_z$$

! Dunque, $\vec{M}_A^{(est,reatt)} = \vec{\mu}$, pertanto

$$(8.4)\quad \vec{\mu} = -\vec{M}_A^{(est,att)}\Big|_{\vec{q}_e} = -\frac{3}{2}mgL\,\vec{e}_{\varphi_e} = -\frac{3}{2}mgL\,\vec{e}_y$$

3) Reazioni vincolari nell'asta BC, all'equilibrio

Detto $\vec{\Psi}$ la reazione della cerniera cilindrica in B sull'asta BC e $\vec{\gamma}$ il momento della coppia di reazione, all'equilibrio devono essere soddisfatte le ECS applicate sulla sola asta BC

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est)\to BC} = \vec{0} \\ \vec{M}_B^{(est)\to BC} = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{R}^{(est,att)\to BC} + \vec{\Psi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_B^{(est,att)\to BC} + \vec{\gamma} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{R}^{(est,att)\to BC} = m\vec{g} \quad \Rightarrow \vec{\Psi}_B = -m\vec{g} = mg\,\vec{e}_z$$

$$\vec{M}_B^{(est,att)\to BC} = (G_2 - B)\times m\vec{g} = \frac{L}{2}\,\vec{i}\times(-mg\,\vec{e}_z) = -mg\frac{L}{2}\sin\theta\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{\gamma} = -\vec{M}_B^{(est,att)\to BC}\Big|_{\vec{q}_e} = \vec{0}$$

Calcolo dell'energia cinetica del sistema

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} \qquad \text{dove}$$

(10.1) $$K^{(1)} = \frac{1}{2} J_{Oz}^{(1)} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m L^2\right)\dot{\varphi}^2$$

(10.2) $$K^{(2)} = \frac{1}{2} m \vec{V}_{G_2}^{\,2} + \frac{1}{2} \vec{\omega}_2 \cdot \vec{L}_{G_2}$$

Calcolo di $\vec{V}_{G_2}$

(10.3) $$\vec{V}_{G_2} = \vec{V}_B + \vec{\omega}_2 \times (G_2 - B) = \vec{\omega}_1 \times (B-O) + (\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_\rho) \times \frac{L}{2}(-\cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_\varphi)$$

$$= \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times L\,\vec{e}_\rho + \frac{L}{2}\left[\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\rho \times \vec{e}_z + \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi\right]$$

$$= L\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \frac{L}{2}\left[\dot{\varphi}\sin\theta(-\vec{e}_\rho) - \dot{\theta}\cos\theta(-\vec{e}_\varphi) + \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_z\right]$$

$$= -\frac{L}{2}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\rho + L\left(\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi + \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_z$$

(10.4) $$|\vec{V}_{G_2}|^2 = \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + L^2\left(\dot{\varphi} + \quad \dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + L^2\dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2\cos^2\theta + L^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + L^2\dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta$$

Per il calcolo del termine polare della (8.2) abbiamo bisogno di $\vec{L}_{G_2}$.

Calcolo del momento angolare dell'asta 2 rs. al baricentro G_2

Dalla teoria, sappiamo che

$$(11.1) \quad \vec{L}_{G_2} = \mathbb{I}_{G_2}(\vec{\omega}_2) \overset{(3.2)}{=} [\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}]\, I_{G_2} \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

dove I_{G_2} è la matrice d'inerzia dell'asta 2 rs. alla terna $(G_2, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, che, per simmetria, è una TPI. Quindi

$$(11.2) \quad I_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m L^2 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$(11.3) \quad \vec{L}_{G_2} = [\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{12} m L^2 \dot{\varphi}\sin\theta \\ \frac{1}{12} m L^2 \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} m L^2 \left(\dot{\varphi}\sin\theta\, \vec{\jmath} + \dot{\theta}\, \vec{k}\right)$$

Mediante la (3.1) possiamo ricavare le componenti di $\vec{L}_{G_2}$ rs. alla terna intermedia $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. Quindi, si ottiene l'espressione

$$(11.4) \quad \vec{L}_{G_2} = \frac{1}{12} m L^2 \left[\dot{\varphi}\sin\theta \left(\sin\theta\, \vec{e}_z + \cos\theta\, \vec{e}_\varphi\right) + \dot{\theta}\, \vec{e}_\xi \right]$$
$$= \frac{1}{12} m L^2 \left(\dot{\theta}\, \vec{e}_\xi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\, \vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\sin^2\theta\, \vec{e}_z \right)$$

Dunque, il termine per bre della (8.2) vale

$$\frac{1}{2}\,\vec{\omega}_2 \cdot \vec{L}_{G_2} = \frac{1}{24}\, m L^2 \left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) \tag{12.1}$$

Pertanto, l'energia cinetica dell'asta BC è:

$$\begin{aligned} K^{(2)} &= \frac{1}{2}\, m \left(\frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + L^2\dot{\varphi}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \\ &\quad + \frac{1}{24}\, m L^2 \left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\, m L^2 \left(\frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 \left(3 + \sin^2\theta\right) + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{12.2}$$

Quindi, l'energia cinetica totale del modello è

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} = \frac{1}{2}\, m L^2 \left[\frac{1}{3}\dot{\varphi}^2\left(4 + \sin^2\theta\right) + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right] \tag{12.3}$$

$$= \frac{1}{2}\, m L^2 \left[\dot{\varphi}, \dot{\theta}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(4 + \sin^2\theta\right) & \frac{1}{2}\cos\theta \\ \frac{1}{2}\cos\theta & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Possiamo ora scrivere la lagrangiana del sistema

$$(13.1)\quad \mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{4}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \right) + \frac{mgl}{2}\cos\theta - \frac{1}{2} c \varphi^2$$

e le 2 eq. di Lagrange.

$$(13.2)\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta} \cos\theta \,, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -c\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{4}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{3} m l^2 \left(\ddot{\varphi} \sin^2\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\, 2\sin\theta\cos\theta \right) + \frac{1}{2} m l^2 \left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta \right)$$

$$(13.3)\quad \text{I EL:}\quad \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi}\left(4 + \sin^2\theta\right) + \frac{1}{3} m l^2 \sin 2\theta\, \dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{2} m l^2 \left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta \right) + c\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi} \cos\theta \,, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{m l^2}{3} \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin\theta - \frac{mgl}{2}\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m l^2 \left(\ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \right)$$

Quindi

$$(13.4)\quad \text{II EL:}\quad \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m l^2 \left(\ddot{\varphi}\cos\theta - \cancel{\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta} \right) - \frac{m l^2}{3} \dot{\varphi}^2 \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{ml}{2}\left(\cancel{l\dot{\varphi}\dot{\theta}} + g \right)\sin\theta$$

5) Linearizzazione intorno agli equilibri

La sollecitazione attiva è conservativa. Quindi, introducendo le variabile (vettoriale) scarto $\vec{x}$

$$\vec{q}(t) = \vec{q_e} + \varepsilon\, \vec{x}(t)$$

il sistema perturbato è

$$A\, \ddot{\vec{x}} + V\, \vec{x} = \vec{0},$$

dove A è la matrice di massa e V quella di rigidezza. Pertanto,

$$A = A(q_e) \overset{(7.3)}{=} mL^2 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2}\cos\theta_e \\ \frac{1}{2}\cos\theta_e & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$V = \mathcal{H}(q_e) \overset{(7.2)}{=} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & mg\frac{L}{2}\cos\theta_e \end{bmatrix}.$$

Quindi,

$$mL^2 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2}\cos\theta_e \\ \frac{1}{2}\cos\theta_e & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & mg\frac{L}{2}\cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allora, il sistema linearizzato intorno a $\vec{q}_e^{\,(1)} = (0,0)$ è

$$\begin{cases} mL^2\left(\dfrac{4}{3}\ddot{x}_1 + \dfrac{1}{2}\ddot{x}_2\right) + c\,x_1 = 0 \\[2ex] \cancel{m}L^2\left(\dfrac{1}{2}\ddot{x}_1 + \dfrac{1}{3}\ddot{x}_2\right) + \cancel{m}\,g\dfrac{L}{2}\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Quello intorno a $\vec{q}_e^{\,(2)} = (0,\pi)$ è

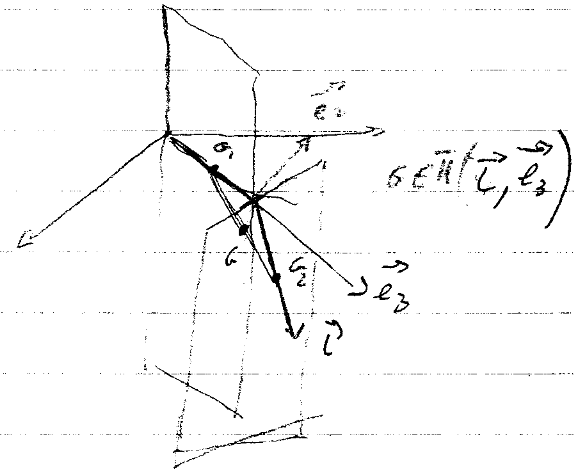
$$\begin{cases} mL^2\left(\dfrac{4}{3}\ddot{x}_1 - \dfrac{1}{2}\ddot{x}_2\right) + c\,x_1 = 0 \\[2ex] \cancel{m}L^2\left(-\dfrac{1}{2}\ddot{x}_1 + \dfrac{1}{3}\ddot{x}_2\right) - \cancel{m}\,g\dfrac{L}{2}\,x_2 = 0 \end{cases}$$

6)

Per calcolare la forza di reazione $\vec{\phi}_A'$ in dinamica, usiamo la IECD su tutto il modello

$$\vec{\phi}_A' + \vec{B}^{(e^+, ext \to \dots)} = 2m\,\vec{a}_G \qquad G: \text{centro di massa del sistema}$$

Quindi



$$(16.1) \quad \vec{\phi}_A' = 2m(\vec{a}_G - \vec{g})$$

<u>Calcolo di $\vec{a}_G$</u>

$$\vec{x}_G = \frac{m\vec{x}_{G_1} + m\vec{x}_{G_2}}{2m} = \frac{\vec{x}_{G_1} + \vec{x}_{G_2}}{2}$$

$$\vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G = \frac{\dot{\vec{x}}_{G_1} + \dot{\vec{x}}_{G_2}}{2} \overset{(10.3)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \left[-\frac{L}{2}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \left(L\dot{\varphi} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi + \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_z\right]\right)$$

$$= \frac{L}{4}\left[-\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (3\dot{\varphi} + \dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_z\right]$$

$$\vec{a}_G = \ddot{\vec{x}}_G = \frac{L}{4}\Big[(-\ddot{\varphi}\sin\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_\rho - \dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\vec{e}}_\rho +$$
$$(3\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{e}_\varphi + (3\dot{\varphi} + \dot{\theta}\cos\theta)\dot{\vec{e}}_\varphi +$$
$$+ (\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{e}_z\Big]$$

$$= \frac{L}{4}\Big[-(\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_\rho - \dot{\varphi}^2\sin\theta\,\vec{e}_\varphi +$$
$$+ (3\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{e}_\varphi + (3\dot{\varphi} + \dot{\theta}\cos\theta)(-\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho)$$
$$+ (\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{e}_z\Big]$$

Quindi,

$$\vec{a}_G = \frac{L}{4}\Big[-\left(3\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_\rho +$$

$$+\left(3\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\cos\theta - \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{e}_z\Big]$$

Dunque, la reazioni vincolare in A, in dinamica, è

$$\vec{\phi}'_A = +2mg\,\vec{e}_z + m\frac{L}{2}\Big[-\left(3\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_\rho +$$

$$+\left(3\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\cos\theta - \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{e}_z\Big]$$

Per calcolare la coppia di reazione, scriviamo la II ECD su tutto il modello

$$\vec{M}_A^{(est,att)} + \vec{M}_A^{(est,reaz)} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_A^{(1)} + \vec{L}_A^{(2)}, \quad \text{dove}$$

$$\vec{L}_A^{(1)} = \mathbb{I}_A^{(1)}\left(\vec{\omega}^{(1)}\right) = \mathbb{I}_A^{(1)}\left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\right) = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_A^{(1)}\left(\vec{e}_z\right) = \frac{1}{3}mL^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{L}_A^{(2)} = (G_2 - A)\times m\vec{V}_{G_2} + \vec{L}_{G_2}$$

Calcoliamo il termine di trasporto

$$(G_2 - A)\times m\vec{V}_{G_2}$$

$$(G_2 - A) \times m\vec{v}_{G_2} = \left(L\vec{e}_\rho + \frac{L}{2}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - \frac{L}{2}\cos\theta\,\vec{e}_z \right) \times$$

$$m\left(-\frac{L}{2}\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e}_\rho + L\left(\dot\varphi + \frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi + \frac{L}{2}\dot\theta\sin\theta\,\vec{e}_z \right)$$

(18.1)

$$= m\Big[L^2\left(\dot\varphi + \frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi + \frac{L^2}{2}\dot\theta\sin\theta\,\vec{e}_\rho \times \vec{e}_z +$$

$$- \frac{L^2}{4}\sin^2\theta\,\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\rho + \frac{L^2}{4}\dot\theta\sin^2\theta\,\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z +$$

$$+ \frac{L^2}{4}\dot\varphi\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho - \frac{L^2}{2}\cos\theta\left(\dot\varphi + \frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi$$

$$= m\Big[\left(L^2\left(\dot\varphi + \frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right) + \frac{L^2}{4}\dot\varphi\sin^2\theta \right)\vec{e}_z +$$

$$+ \left(-\frac{L^2}{2}\dot\theta\sin\theta + \frac{L^2}{4}\dot\varphi\sin\theta\cos\theta \right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+ \left(\frac{L^2}{4}\dot\theta\sin^2\theta + \frac{L^2}{2}\cos\theta\left(\dot\varphi + \frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\right)\vec{e}_\rho \Big]$$

$$= mL^2\left[\left(\dot\varphi + \frac{\dot\theta}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}\dot\varphi\sin^2\theta\right)\vec{e}_z + \left(\sin\theta\left(-\frac{\dot\theta}{2} + \frac{1}{4}\dot\varphi\cos\theta\right)\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\dot\theta}{4} + \frac{\dot\varphi\cos\theta}{2}\right)\vec{e}_\rho\right]$$

Quindi, tenendo conto della (11.1) si trova

$$\vec{L}_A^{(2)} = m\left(\frac{1}{12}L^2\dot\theta + \frac{L^2\dot\theta}{4} + \frac{L^2}{2}\dot\varphi\cos\theta \right)\vec{e}_\rho +$$

$$+ m\left(\frac{L^2}{12}\dot\varphi\sin\theta\cos\theta + L^2\sin\theta\left(-\frac{\dot\theta}{2} + \frac{\dot\varphi}{4}\cos\theta\right)\right)\Big]\vec{e}_\varphi +$$

$$+ m\left(\frac{1}{12}L^2\dot\varphi\sin^2\theta + \dot\varphi + \frac{\dot\theta}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}\dot\varphi\sin^2\theta \right)\vec{e}_z$$

$$= mL^2\left(\frac{1}{3}\dot\theta + \frac{1}{2}\dot\varphi\cos\theta \right)\vec{e}_\rho +$$

$$+ mL^2\left(\frac{1}{3}\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi - \frac{1}{2}\dot\theta\sin\theta \right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+ mL^2\left(\frac{1}{3}\dot\varphi\sin^2\theta + \dot\varphi + \frac{\dot\theta}{2}\cos\theta \right)\vec{e}_z$$

Quindi,

$$\vec{L}_A = mL^2\left(\frac{1}{3}\dot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{e}_\xi +$$
$$+ mL^2\sin\theta\left(\frac{1}{3}\dot{\varphi}\cos\theta - \frac{1}{2}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi +$$
$$+ mL^2\left(\frac{1}{3}\dot{\varphi}\left(4+\sin^2\theta\right) + \frac{\dot{\theta}}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_z$$

Pertanto,

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = mL^2\left(\frac{1}{3}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}\cos\theta - \frac{1}{2}\dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\xi +$$
$$+ mL^2\left(\frac{1}{3}\dot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\dot{\vec{e}}_\xi +$$
$$+ mL^2\left(\frac{1}{3}\cos 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{6}\sin 2\theta\,\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$$
$$+ mL^2\sin\theta\left(\frac{1}{3}\dot{\varphi}\cos\theta - \frac{1}{2}\dot{\theta}\right)\dot{\vec{e}}_\varphi +$$
$$+ mL^2\left(\frac{1}{3}\ddot{\varphi}\left(4+\sin^2\theta\right) + \frac{1}{3}\dot{\varphi}\sin 2\theta\,\dot{\theta} + \frac{\ddot{\theta}}{2}\cos\theta - \frac{\dot{\theta}^2}{2}\sin\theta\right)\vec{e}_z$$
$$= mL^2\left(\frac{1}{3}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}\cos\theta - \cancel{\frac{1}{2}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta} - \frac{1}{6}\sin 2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \cancel{\frac{1}{2}\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta}\right)\vec{e}_\xi$$
$$+ mL^2\left(\frac{1}{3}\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{6}\sin 2\theta\,\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$$
$$+ mL^2\left(\frac{1}{3}\ddot{\varphi}\left(4+\sin^2\theta\right) + \frac{1}{3}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta + \frac{\ddot{\theta}}{2}\cos\theta - \frac{\dot{\theta}^2}{2}\sin\theta\right)\vec{e}_z$$

Allora, poichè

$$\vec{M}_A^{(est, reaz)} = \vec{\mu}',$$

si trova che

$$\vec{\mu}' = + mg\frac{L}{2}\sin\theta\,\vec{e}_\rho - \frac{3}{2}mgL\,\vec{e}_\varphi + c\varphi\,\vec{e}_z +$$
$$+ mL^2\left(\frac{1}{3}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}\cos\theta - \frac{1}{8}\dot{\varphi}^2\sin 2\theta\right)\vec{e}_\rho +$$
$$+ mL^2\left(\frac{2}{3}\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\cos\theta + \frac{1}{6}\ddot{\varphi}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$$
$$+ mL^2\left(\frac{1}{3}\ddot{\varphi}\left(4 + \sin^2\theta\right) + \frac{1}{3}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta + \frac{\ddot{\theta}}{2}\cos\theta - \frac{\dot{\theta}^2}{2}\sin\theta\right)\vec{e}_z =$$

$$\overset{(13.3),(13.4)}{=} mL\,\vec{e}_\varphi\left[-\frac{3}{2}g + L\left(\frac{2}{3}\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\cos\theta + \frac{1}{6}\ddot{\varphi}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\theta\sin\theta - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right],$$

poichè la componente lungo $\vec{e}_z$ si annulla grazie alla I EL. Infatti, anche in dinamica, una cerniera cilindrica liscia non può reagire con un momento lungo il suo asse. Inoltre, in virtù della II EL si annulla anche la componente lungo $\vec{e}_\rho$. Dunque, la coppia di reazione esterna ha componenti solo lungo $\vec{e}_\varphi$, anche in Dinamica.