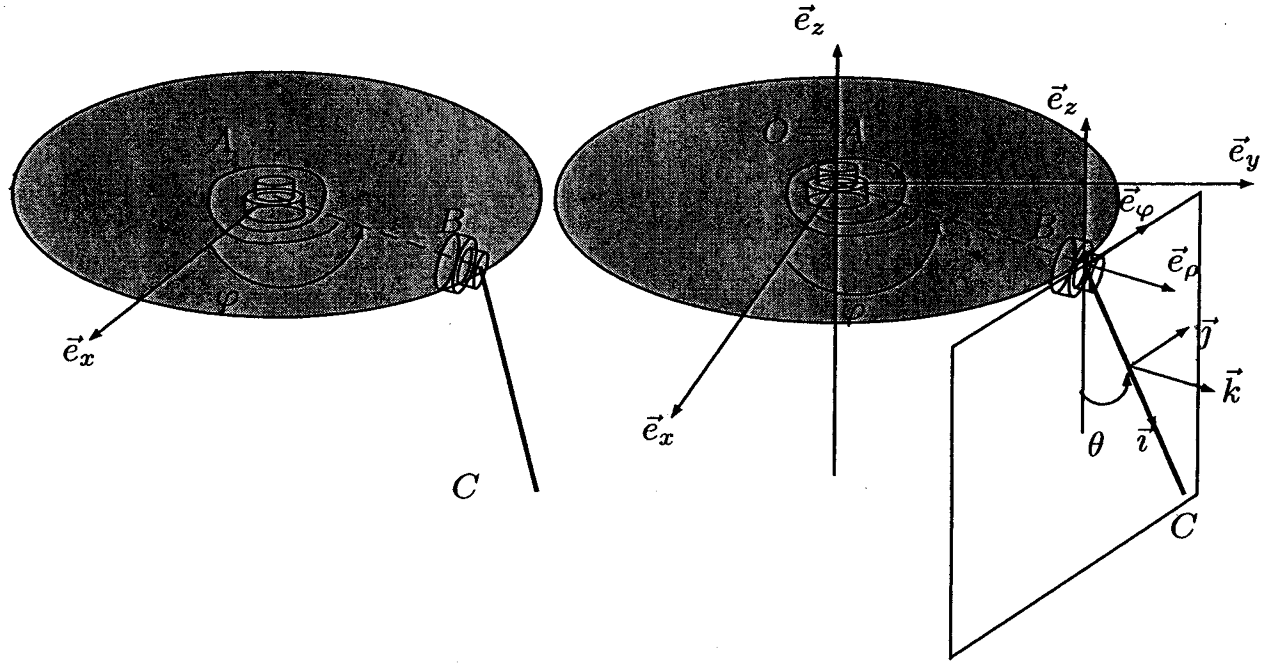
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 14 Settembre 2015. (G. Tondo)



Una giostra è modellizzata come un'asta rigida omogenea BC, di lunghezza L e massa m, vincolata in un punto B appartenente alla periferia di un disco rigido omogeneo di centro A, raggio R e massa $4m$. Il disco è vincolato a ruotare intorno ad un asse fisso verticale mediante una cerniera cilindrica fissa con asse verticale in $O \equiv A$. Il vincolo tra l'asta e il disco è realizzato mediante un'ulteriore cerniera cilindrica con asse parallelo al raggio AB. Sul disco agisce una molla angolare di richiamo con asse verticale e costante elastica c, posta in A; inoltre, su tutto il modello, agisce il peso proprio. Si denoti con $\varphi \in \mathbb{R}$ l'angolo tra la posizione di riposo della molla, individuata dal versore $\vec{e}_x$, e il raggio AB.

STATICA.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

2) calcolare le reazioni vincolari, all'equilibrio, della cerniera cilindrica in A sul disco;

3) calcolare le reazioni vincolari, all'equilibrio, della cerniera cilindrica in B sull'asta BC.

DINAMICA.

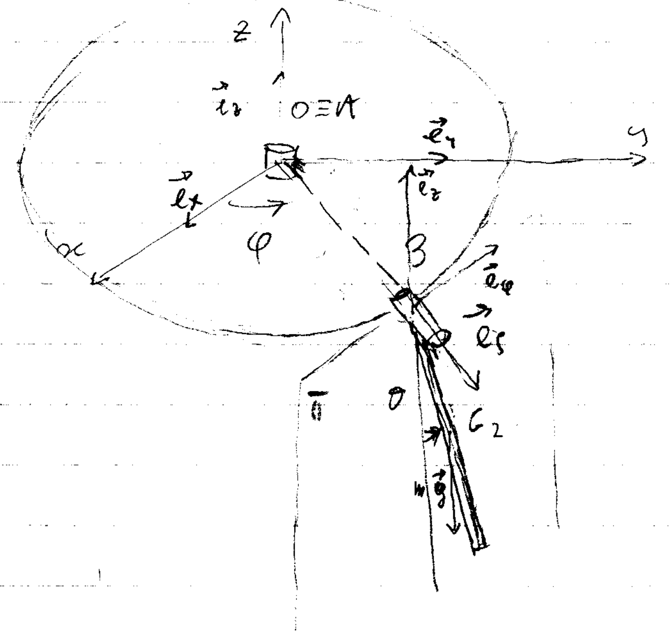
Si chiede di:

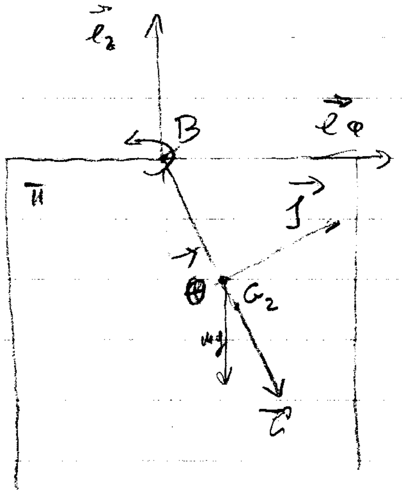
4) scrivere le equazioni pure di moto;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) calcolare le reazioni vincolari, durante il moto, della cerniera cilindrica in A, sul disco.

Cinematica. Il sistema è un articolato con 2 g.l..





Il disco 1 si muove di moto rotatorio intorno all'asse z. Quindi la sua velocità angolare $\vec{\omega}_1$ vale

(1.1) $$\vec{\omega}_1 = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

Il moto dell'asta si può scomporre nel moto di "trascinamento" del piano π, ortogonale al disco 1, e nel moto relativo al piano, che è un moto rotatorio intorno all'asse $\vec{e}_\rho$. Allora, per il teorema di composizione delle velocità angolari, la velocità angolare $\vec{\omega}_2$ dell'asta 2 risulta

(1.2) $$\vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z + \dot{\theta}\, \vec{e}_\rho$$

N.B. Nella descrizione cinematica del sistema, conviene considerare 3 terne rigide.

i) $\vec{e} := [\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$, "fissa"

ii) $\vec{e}\,' := [\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z]$, solidale al disco 1

iii) $\vec{e}\,'' := [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$, solidale all'asta 2

Le trasformazioni tra le terne $\vec{e}$ ed $\vec{e}\,'$ sono:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \quad ,$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

in termini matriciali

$$(2.1) \quad [\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z] = [\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z] \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_\varphi}$$

che si può scrivere in forma più sintetica

$$(2.2) \quad \vec{e}\,' = \vec{e}\, [R_\varphi]^{e}_{e'} \qquad R_\varphi R_\varphi^T = R_\varphi^T R_\varphi = \mathbb{1}_3$$

La trasformazione inversa è:

$$\vec{e} = \vec{e}\,' R_\varphi^{-1} = \vec{e}\,' R_\varphi^T \quad ,$$

cioè

$$(2.3) \quad [\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z] = [\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z] \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le trasformazioni tra le terne $\vec{e}\,'$ ed $\vec{e}\,''$ sono:

$$\begin{aligned} \vec{\imath} &= -\cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{\jmath} &= \sin\theta\,\vec{e}_z + \cos\theta\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{K} &= \vec{e}_\rho \end{aligned} \tag{3.1}$$

Quindi, in termini matriciali

$$\vec{e}\,'' = \vec{e}\,'\,[R_\theta]^{e'}_{e''} \tag{3.2}$$

dove

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

La trasformazione inversa è:

$$\vec{e}\,' = \vec{e}\,''\,R_\theta^{-1} = \vec{e}\,''\,R_\theta^{T} \tag{3.4}$$

cioè

$$[\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z] = [\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{K}] \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \vec{K} \\ \vec{e}_\varphi &= \sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{e}_z &= -\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Determiniamo, ora, la trasformazione tra $\vec{e}$ ed $\vec{e}''$.

(4.1) $\vec{e} \overset{(2.2)}{=} \vec{e}' R_\varphi^T \overset{(3.3)}{=} \vec{e}'' R_\theta^T R_\varphi^T$

dove

$$R_\theta^T R_\varphi^T = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

(4.2)
$$= \begin{bmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta \\ -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

(4.3)
$$\vec{e}_x = -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} - \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k}$$
$$\vec{e}_y = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{j} + \sin\varphi\,\vec{k}$$
$$\vec{e}_z = -\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

La trasformazione inversa è data da

(4.4)
$$\vec{e}'' = \vec{e}\left(R_\theta^T R_\varphi^T\right)^{-1} = \vec{e}\left(R_\theta^T R_\varphi^T\right)^T = \vec{e}\, R_\varphi R_\theta$$

dove

(4.5)
$$R_\varphi R_\theta = \begin{bmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo ora scrivere le componenti di $\vec{\omega}_2$ sia sulla terna fissa $\vec{e}$, sia su quella solidale al rigido $\vec{e}''$.
Infatti, dalla (4.2) si ha che

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{K} \overset{(4.4)}{=} \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right) =$$

(5.1) $$= \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e}_y + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

e inoltre

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_K \overset{(4.3)}{=} \dot{\varphi}\left(-\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right) + \dot{\theta}\,\vec{K} =$$

(5.2) $$= -\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{i} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{j} + \dot{\theta}\,\vec{K}$$

Statica

La sollecitazione attiva è conservativa. Calcoliamo l'energia potenziale

$$V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2} c \varphi^2 - \cancel{4m\vec{g}\cdot(G_1-O)} - m\vec{g}\cdot(G_2-O) \tag{6.1}$$

$$G_2-O = (G_2-B)+(B-O) = \frac{L}{2}\,\vec{i} + R\,\vec{e}_\rho \tag{6.2}$$

$$= \frac{L}{2}\left(-\cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right) + R\,\vec{e}_\rho$$

$$\begin{aligned} V(\varphi,\theta) &= \frac{1}{2} c\varphi^2 + mg\,\vec{e}_z\cdot\left(\frac{L}{2}\vec{i} + R\,\vec{e}_\rho\right) \\ &= \frac{1}{2} c\varphi^2 - mg\frac{L}{2}\cos\theta \end{aligned} \tag{6.3}$$

Gli equilibri sono i punti stazionari di V.

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = c\varphi = -Q_\varphi\,, \quad \frac{\partial V}{\partial\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta = -Q_\theta \tag{6.4}$$

Quindi, i punti di equilibrio sono tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} c\varphi = 0 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \theta = 0 \quad \text{vel} \quad \theta = \pi \end{cases}$$

Dunque, ci sono due configurazioni di equilibrio

(7.1) $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$

$\vec{q}_e^{(1)} = (0, 0)$, $\vec{q}_e^{(2)} = (0, \pi)$

Stabilità degli equilibri

Calcoliamo la matrice Hessiana nelle config. di equilibrio

(7.2) $\mathcal{H}(\varphi_e, \theta_e) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & mg\frac{L}{2}\cos\theta_e \end{bmatrix}$ $\mathcal{H}^1_1 = c > 0$

$\det \mathcal{H} = mg\frac{cL}{2}\cos\theta_e$

Quindi,

$\vec{q}_e^{(1)} = (0, 0)$ $\det \mathcal{H} > 0 \Rightarrow$ pto di min $\Rightarrow$ eq. stabile

$\vec{q}_e^{(2)} = (0, \pi)$ $\det \mathcal{H} < 0 \Rightarrow$ pto di sella $\Rightarrow$ eq. instabile

2) Reazioni vincolari in A, all'equilibrio

All'equilibrio, devono essere soddisfatte le ECS su tutto il modello

$$(8.1)\quad \begin{cases} \vec{R}^{(est)} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est)} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi}_A = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est,att)} + \vec{M}_A^{(est,reatt)} = \vec{0} \end{cases}$$

$$(8.2)\quad \vec{R}^{(est,att)} = 5m\vec{g} \Rightarrow \vec{\phi}_A = -5m\vec{g} = 5mg\,\vec{e}_z$$

$$\vec{M}_A^{(est,att)} = -c\varphi\,\vec{e}_z + \text{———} + (G_2 - A)\times m\vec{g}$$

$$(8.3)\quad = -c\varphi\,\vec{e}_z + \text{———} + \left(\frac{L}{2}\vec{i} + R\,\vec{e}_\rho\right)\times\left(-mg\,\vec{e}_z\right)$$

$$= -c\varphi\,\vec{e}_z + \text{———} - mg\frac{L}{2}\sin(\pi-\theta)\,\vec{e}_\rho + mgR\,\vec{e}_\varphi$$

$$= -mg\frac{L}{2}\sin\theta\,\vec{e}_\rho + mgR\,\vec{e}_\varphi - c\varphi\,\vec{e}_z$$

Dunque, $\vec{M}_A^{(est,reatt)} = \vec{\mu}$, pertanto

$$(8.4)\quad \vec{\mu} = -\vec{M}_A^{(est,att)}\Big|_{\vec{q}_e} = -mgR\,\vec{e}_{\varphi_e} = -mgR\,\vec{e}_y$$

3) <u>Reazioni vincolari sull'asta BC, all'equilibrio</u>

Detta $\vec{\Phi}$ la reazione della cerniera cilindrica in B sull'asta BC e $\vec{\gamma}$ il momento della coppia di reazione, all'equilibrio devono essere soddisfatte le ECS applicate sulla sola asta BC

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est) \to BC} = \vec{0} \\ \vec{M}_B^{(est) \to BC} = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{R}^{(est, e\vartheta) \to BC} + \vec{\Phi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_B^{(est, e\vartheta) \to BC} + \vec{\gamma} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{R}^{(est, e\vartheta) \to BC} = m\vec{g} \quad \Rightarrow \vec{\Phi}_B = -m\vec{g} = mg\vec{e}_2$$

$$\vec{M}_B^{(est, e\vartheta) \to BC} = (G_2 - B) \times m\vec{g} = \frac{L}{2}\vec{i} \times (-mg\vec{e}_2) = -mg\frac{L}{2}\sin\vartheta\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma} = -\vec{M}_B^{(est, e\vartheta) \to BC}\Big|_{\vec{q}_e} = \vec{0}$$

Dinamica

Calcolo dell'energia cinetica del sistema

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} \qquad \text{dove}$$

$$(10.1)\quad K^{(1)} = \frac{1}{2} J_{Oz}^{(1)} \dot\varphi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} 4m R^2\right)\dot\varphi^2 = mR^2\dot\varphi^2$$

$$(10.2)\quad K^{(2)} = \frac{1}{2} m \vec V_{G_2}^{\,2} + \frac{1}{2}\vec\omega_2 \cdot \vec L_{G_2}$$

Calcolo di $\vec V_{G_2}$

$$(10.3)\quad \vec V_{G_2} = \vec V_B + \vec\omega_2 \times (G_2 - B) = \vec\omega_1 \times (B-O) + (\dot\varphi\,\vec e_z + \dot\theta\,\vec e_\rho)\times \frac{L}{2}(-\cos\theta\,\vec e_z + \sin\theta\,\vec e_\varphi)$$

$$= \dot\varphi\,\vec e_z \times R\,\vec e_\rho + \frac{L}{2}\left[\dot\varphi\sin\theta\,\vec e_z\times\vec e_\varphi - \dot\theta\cos\theta\,\vec e_\rho\times\vec e_z + \dot\theta\sin\theta\,\vec e_\rho\times\vec e_\varphi\right]$$

$$= R\dot\varphi\,\vec e_\varphi + \frac{L}{2}\left[\dot\varphi\sin\theta(-\vec e_\rho) - \dot\theta\cos\theta(-\vec e_\varphi) + \dot\theta\sin\theta\,\vec e_z\right]$$

$$= -\frac{L}{2}\dot\varphi\sin\theta\,\vec e_\rho + \left(R\dot\varphi + \frac{L}{2}\dot\theta\cos\theta\right)\vec e_\varphi + \frac{L}{2}\dot\theta\sin\theta\,\vec e_z$$

$$(10.4)\quad |\vec V_{G_2}|^2 = \frac{L^2}{4}\dot\varphi^2\sin^2\theta + \left(R\dot\varphi + \frac{L}{2}\dot\theta\cos\theta\right)^2 + \frac{L^2}{4}\dot\theta^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{L^2}{4}\dot\varphi^2\sin^2\theta + R^2\dot\varphi^2 + \frac{L^2}{4}\dot\theta^2\cos^2\theta + RL\dot\varphi\dot\theta\cos\theta + \frac{L^2}{4}\dot\theta^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{L^2}{4}\dot\varphi^2\sin^2\theta + R^2\dot\varphi^2 + \frac{L^2}{4}\dot\theta^2 + RL\dot\varphi\dot\theta\cos\theta$$

Per il calcolo del termine polare della (8.2) abbiamo bisogno di $\vec L_{G_2}$.

Calcolo del momento angolare dell'asta 2 rs. al baricentro G_2

Dalla teoria, sappiamo che

$$(11.1)\quad \vec{L}_{G_2}^{(2)} = \mathbb{I}_{G_2}(\vec{\omega}_2) \overset{(5.2)}{=} [\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}]\, I_{G_2} \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

dove I_{G_2} è la matrice d'inerzia dell'asta 2 rs. alla terna $(G_2, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, che, per simmetria, è una TPI. Quindi

$$(11.2)\quad I_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$(11.3)\quad \vec{L}_{G_2}^{(2)} = [\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{12}mL^2\dot{\varphi}\sin\theta \\ \frac{1}{12}mL^2\dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{12}mL^2\left(\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{\jmath} + \dot{\theta}\,\vec{k}\right)$$

Mediante la (3.1) possiamo ricavare le componenti di $\vec{L}_{G_2}$ rs. alla terna intermedia $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. Quindi, si ottiene l'espressione

$$(11.4)\quad \vec{L}_{G_2}^{(2)} = \frac{1}{12}mL^2\left[\dot{\varphi}\sin\theta\left(\sin\theta\,\vec{e}_z + \cos\theta\,\vec{e}_\varphi\right) + \dot{\theta}\,\vec{e}_\xi\right]$$
$$= \frac{1}{12}mL^2\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_\xi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\sin^2\theta\,\vec{e}_z\right)$$

Dunque, il termine polare delle (8.2) vale

$$(12.1)\quad \frac{1}{2}\,\vec{\omega}_2\cdot\vec{L}_{G_2} = \frac{1}{24}\,m L^2\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2\right)$$

Pertanto, l'energia cinetica dell'asta BC è:

$$(12.2)\quad \begin{aligned} K^{(2)} &= \frac{1}{2}\,m\left(\frac{L^2}{4}\dot\varphi^2\sin^2\theta+R^2\dot\varphi^2+\frac{L^2}{4}\dot\theta^2+LR\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right)+\\ &\quad+\frac{1}{24}\,m L^2\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\,m\left[\left(R^2+\frac{L^2}{3}\sin^2\theta\right)\dot\varphi^2+\frac{L^2}{3}\dot\theta^2+RL\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right) \end{aligned}$$

Quindi, l'energia cinetica totale del modello è

$$(12.3)\quad K=K^{(1)}+K^{(2)}=\frac{1}{2}\,m\left[\dot\varphi^2\left(3R^2+\frac{L^2}{3}\sin^2\theta\right)+\frac{L^2}{3}\dot\theta^2+RL\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,\left[\dot\varphi,\dot\theta\right]\begin{bmatrix} 3R^2+\dfrac{L^2}{3}\sin^2\theta & RL\dfrac{1}{2}\cos\theta \\ RL\dfrac{1}{2}\cos\theta & \dfrac{L^2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\varphi\\ \dot\theta\end{bmatrix}$$

Possiamo ora scrivere la lagrangiana del sistema

$$(13.1)\quad \mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2} m \left[3R^2 \dot\varphi^2 + \frac{L^2}{3} \dot\theta^2 + \frac{L^2}{3} \dot\varphi^2 \sin^2\theta + RL \dot\varphi \dot\theta \cos\theta \right) + \frac{mgL\cos\theta}{2} + \\ - \frac{1}{2} c \varphi^2$$

e le 2 eq. di Lagrange.

$$(13.2)\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = 3mR^2\dot\varphi + \frac{1}{3} m L^2 \dot\varphi \sin^2\theta + \frac{1}{2} m LR \dot\theta \cos\theta \;, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -c\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi}\right) = 3mR^2\ddot\varphi + \frac{1}{3} m L^2 \left(\ddot\varphi \sin^2\theta + \dot\varphi \dot\theta 2 \sin\theta\cos\theta\right) + \frac{1}{2} m LR \left(\ddot\theta \cos\theta - \dot\theta^2 \sin\theta\right)$$

$$(13.3)\ \mathrm{I\,EL}: \quad \frac{1}{3} m \left(9R^2 + L^2 \sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \frac{1}{3} m L^2 \sin 2\theta\, \dot\theta \dot\varphi + \frac{1}{2} m LR \left(\ddot\theta \cos\theta - \dot\theta^2 \sin\theta\right) + c\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = \frac{1}{3} m L^2 \dot\theta + \frac{1}{2} m LR \dot\varphi \cos\theta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{mL^2}{3} \dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{m}{2} LR \dot\varphi \dot\theta \sin\theta - \frac{mgL}{2} \sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{1}{3} m L^2 \ddot\theta + \frac{1}{2} m LR \left(\ddot\varphi \cos\theta - \dot\varphi \dot\theta \sin\theta\right)$$

Quindi

$$(13.4)\ \mathrm{II\,EL}: \quad \frac{1}{3} m L^2 \ddot\theta + \frac{1}{2} m LR \left(\ddot\varphi \cos\theta - \cancel{\dot\varphi \dot\theta} \sin\theta\right) - \frac{mL^2}{3} \dot\varphi^2 \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{mL}{2} \left(\cancel{R\dot\varphi\dot\theta} + g\right) \sin\theta = 0$$

5) Linearizzazione intorno agli equilibri

La sollecitazione attiva è conservativa. Quindi, introducendo la variabile (vettoriale) scarto $\vec{x}$

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_e + \varepsilon\, \vec{x}(t)$$

il sistema perturbato è

$$A\,\ddot{\vec{x}} + V\,\vec{x} = \vec{0},$$

dove A è la matrice di massa e V quella di rigidezza. Pertanto,

$$A = A(q_e) \overset{(2.3)}{=} m \begin{bmatrix} 3R^2 & \frac{RL}{2}\cos\theta_e \\ \frac{RL}{2}\cos\theta_e & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$V = \mathcal{H}(q_e) \overset{(7.2)}{=} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & mg\frac{L}{2}\cos\theta_e \end{bmatrix}.$$

Quindi,

$$m \begin{bmatrix} 3R^2 & \frac{RL}{2}\cos\theta_e \\ \frac{RL}{2}\cos\theta_e & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & mg\frac{L}{2}\cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allora, il sistema linearizzato intorno a $\vec{q}_e^{(1)} = (0,0)$ è

$$\begin{cases} m\left(3R^2\ddot{x}_1 + \dfrac{RL}{2}\ddot{x}_2\right) + c\,x_1 = 0 \\[2ex] \cancel{m}\left(\dfrac{RL}{2}\ddot{x}_1 + \dfrac{L^2}{3}\ddot{x}_2\right) + \cancel{m}\,g\dfrac{L}{2}x_2 = 0 \end{cases}$$

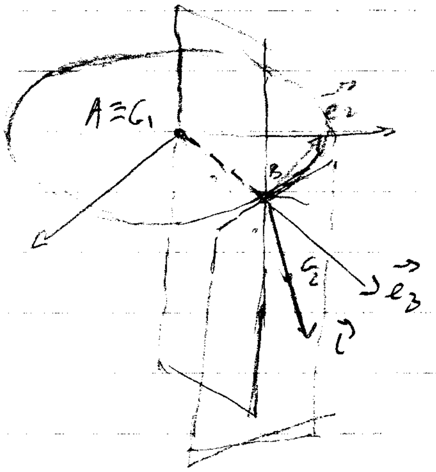
Quello intorno a $\vec{q}_e^{(2)} = (0,\pi)$ è

$$\begin{cases} m\left(3R^2\ddot{x}_1 - \dfrac{RL}{2}\ddot{x}_2\right) + c\,x_1 = 0 \\[2ex] m\left(-\dfrac{LR}{2}\ddot{x}_1 + \dfrac{L^2}{3}\ddot{x}_2\right) - \cancel{m}\,g\dfrac{L}{2}x_2 = 0 \end{cases}$$

6) Per calcolare la forza di reazione $\vec{\phi}_A'$ in dinamica, usiamo la IECD su tutto il modello

$$\vec{\phi}_A' + \vec{B}^{(e^t, e^A \to n^t)} = 4m\vec{a}_A + m\,\vec{a}_{G_2}$$

Quindi



(16.1) $$\vec{\phi}_A' = 5mg\,\vec{e}_z + m\,\vec{a}_{G_2}$$

Calcolo di $\vec{a}_{G_2}$

$$\vec{v}_{G_2} \overset{(10.3)}{=} -\frac{L}{2}\dot\varphi \sin\theta\,\vec{e}_\rho + \left(R\dot\varphi + \frac{L\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi + \frac{L}{2}\dot\theta \sin\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{a}_{G_2} = \dot{\vec{v}}_{G_2} = \Big[\frac{L}{2}\left(-\ddot\varphi\sin\theta - \dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\rho - \frac{L}{2}\dot\varphi\sin\theta\,\dot{\vec{e}}_\rho +$$

$$\left(R\ddot\varphi + \frac{L\ddot\theta}{2}\cos\theta - \frac{L\dot\theta^2}{2}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi + \left(R\dot\varphi + \frac{L\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\dot{\vec{e}}_\varphi +$$

$$+\frac{L}{2}\left(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta\right)\vec{e}_z\Big] =$$

$$= \Big[-\frac{L}{2}\left(\ddot\varphi\sin\theta + \dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\rho - \frac{L}{2}\dot\varphi^2\sin\theta\,\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left(R\ddot\varphi + \frac{L\ddot\theta}{2}\cos\theta - \frac{L\dot\theta^2}{2}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi + \left(R\dot\varphi + \frac{L\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\left(-\dot\varphi\,\vec{e}_\rho\right)$$

$$+\frac{L}{2}\left(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta\right)\vec{e}_z\Big]$$

Quindi,

$$\vec{a}_{G_2} = \Big[-\Big(R\dot{\varphi}^2 + \frac{L}{2}\ddot{\varphi}\sin\theta + L\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\Big)\vec{e}_\rho +$$
$$+\Big(R\ddot{\varphi} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\big(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\big)\sin\theta\Big)\vec{e}_\varphi +$$
$$+\frac{L}{2}\big(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\big)\vec{e}_z\Big]$$

Dunque, la reazioni vincolare in A, in dinamica, è

$$\vec{\phi}'_A = m\Big[-\Big(R\dot{\varphi}^2 + \frac{L}{2}\ddot{\varphi}\sin\theta + L\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\Big)\vec{e}_\rho +$$
$$+\Big(R\ddot{\varphi} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\big(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\big)\sin\theta\Big)\vec{e}_\varphi +$$
$$+\Big(\frac{L}{2}\big(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\big) + 5g\Big)\vec{e}_z\Big]$$

Per calcolare la coppia di reazione, scriviamo la II ECD su tutto il modello

$$\vec{M}_A^{(est,att)} \quad M_A^{(est,reatt)} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_A^{(1)} + \vec{L}_A^{(2)}, \quad \text{dove}$$

$$\vec{L}_A^{(1)} = \mathbb{I}_A^{(1)}(\vec{\omega}^{(1)}) = \mathbb{I}_A^{(1)}(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_A^{(1)}(\vec{e}_z) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{L}_A^{(2)} = (G_2 - A)\times m\vec{v}_{G_2} + \vec{L}_{G_2}$$

Calcoliamo il termine di trasporto

$$(G_2 - A)\times m\vec{v}_{G_2}$$

$$(G_2 - A) \times m\vec{v}_{G_2} = \left(R\vec{e}_\rho + \frac{L}{2}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - \frac{L}{2}\cos\theta\,\vec{e}_z\right) \times$$

$$m\left(-\frac{L}{2}\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \left(R\dot\varphi + L\frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi + \frac{L}{2}\dot\theta\sin\theta\,\vec{e}_z\right)$$

(14.1)

$$= m\Big[R\left(R\dot\varphi + L\frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_\rho \underset{\sim}{\times} \vec{e}_\varphi + \frac{RL}{2}\dot\theta\sin\theta\,\vec{e}_\rho \underset{\circ}{\times} \vec{e}_z +$$

$$- \frac{L^2}{4}\sin^2\theta\,\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi \underset{\sim}{\times} \vec{e}_\rho + \frac{L^2}{4}\dot\theta\sin^2\theta\,\vec{e}_\varphi \underset{+}{\times} \vec{e}_z +$$

$$+ \frac{L^2}{4}\dot\varphi\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_z \underset{\circ}{\times} \vec{e}_\rho - \frac{L}{2}\cos\theta\left(R\dot\varphi + L\frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_z \underset{+}{\times} \vec{e}_\varphi\Big]$$

$$= m\Big[\left(R\left(R\dot\varphi + L\frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right) + \frac{L^2}{4}\dot\varphi\sin^2\theta\right)\vec{e}_z +$$

$$+\left(-\frac{RL}{2}\dot\theta\sin\theta + \frac{L^2}{4}\dot\varphi\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$\left(\frac{L^2}{4}\dot\theta\sin^2\theta + \frac{L}{2}\cos\theta\left(R\dot\varphi + L\frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\right)\vec{e}_\rho\Big]$$

$$= m\left[R\left(R\dot\varphi + L\frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right) + \frac{L^2}{4}\dot\varphi\sin^2\theta\right]\vec{e}_z + m\sin\theta\left(-\frac{RL\dot\theta}{2} + \frac{L^2}{4}\dot\varphi\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi + L\left[\left(\frac{L\dot\theta}{4} + \frac{R\dot\varphi\cos\theta}{2}\right)\right]\vec{e}_\rho$$

Quindi, tenendo conto della (11.4) si trova

$$\vec{L}_A^{(2)} = m\left(\frac{1}{12}L^2\dot\theta + \frac{L^2\dot\theta}{4} + \frac{LR}{2}\dot\varphi\cos\theta\right)\vec{e}_\rho +$$

$$+ m\left(\frac{L^2}{12}\dot\varphi\sin\theta\cos\theta + L\sin\theta\left(-\frac{R\dot\theta}{2} + \frac{L\dot\varphi}{4}\cos\theta\right)\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+ m\left(\frac{1}{12}L^2\dot\varphi\sin^2\theta + R\left(R\dot\varphi + L\frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right) + \frac{L^2}{4}\dot\varphi\sin^2\theta\right)\vec{e}_z$$

$$= mL\left(\frac{1}{3}L\dot\theta + \frac{R}{2}\dot\varphi\cos\theta\right)\vec{e}_\rho +$$

$$+ mL\left(\frac{L}{3}\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi - \frac{R}{2}\dot\theta\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+ m\left[\frac{L^2}{3}\dot\varphi\sin^2\theta + R\left(R\dot\varphi + L\frac{\dot\theta}{2}\cos\theta\right)\right]\vec{e}_z$$

Quindi

$$\vec{L}_A = mL\left(\frac{L}{3}\dot{\theta} + \frac{R}{2}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{e}_\xi +$$
$$+ mL\sin\theta\left(\frac{L}{3}\dot{\varphi}\cos\theta - \frac{R}{2}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi +$$
$$+ m\left[\left(\frac{L^2}{3}\sin^2\theta + \beta R^2\right)\dot{\varphi} + \frac{LR\dot{\theta}}{2}\cos\theta\right]\vec{e}_z$$

Pertanto,

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = mL\left(\frac{L}{3}\ddot{\theta} + \frac{R}{2}\ddot{\varphi}\cos\theta - \frac{R}{2}\dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\xi +$$
$$+ mL\left(\frac{L}{3}\dot{\theta} + \frac{R}{2}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\dot{\vec{e}}_\xi +$$
$$+ mL\left(\frac{L}{3}\cos 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{L}{6}\sin 2\theta\,\ddot{\varphi} - \frac{R}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{R}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$$
$$+ mL\sin\theta\left(\frac{L}{3}\dot{\varphi}\cos\theta - \frac{R}{2}\dot{\theta}\right)\dot{\vec{e}}_\varphi +$$
$$+ m\left(\ddot{\varphi}\left(\frac{L^2}{3}\sin^2\theta + \beta R^2\right) + \frac{L^2}{3}\dot{\varphi}\sin 2\theta\,\dot{\theta} + \frac{LR\ddot{\theta}}{2}\cos\theta - \frac{LR\dot{\theta}^2}{2}\sin\theta\right)\vec{e}_z$$
$$= mL\left(\frac{L}{3}\ddot{\theta} + \frac{R}{2}\ddot{\varphi}\cos\theta - \cancel{\frac{R}{2}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta} - \frac{L}{6}\sin 2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \cancel{\frac{R}{2}\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta}\right)\vec{e}_\xi$$
$$+ mL\left(\frac{L}{3}\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{R}{2}\dot{\varphi}^2\cos\theta + \frac{L}{3}\cos 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{L}{6}\sin 2\theta\,\ddot{\varphi} - \frac{R}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{R}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$$
$$+ mL\left(\ddot{\varphi}\left(\beta R^2 + \frac{L^2}{3}\sin^2\theta\right) + \frac{L}{3}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta + \frac{LR\ddot{\theta}}{2}\cos\theta - \frac{LR\dot{\theta}^2}{2}\sin\theta\right)\vec{e}_z$$

Allora, poiché

$$\vec{M}_{A}^{(est,\,reatt)} = \vec{\mu}\,',$$

si trova che

$$
\begin{aligned}
\vec{\mu}\,' &= +mg\frac{L}{2}\sin\theta\,\vec{e}_{\varrho} - \frac{3}{2}mgL\,\vec{e}_{\varphi} + c\varphi\,\vec{e}_{z} + \\
&+ mL\left(\frac{L}{3}\ddot{\theta} + \frac{R}{2}\ddot{\varphi}\cos\theta - \frac{L}{6}\sin 2\theta\,\dot{\varphi}^{2}\right)\vec{e}_{\varrho} \qquad 90 \\
&+ mL\left(\frac{2}{3}L\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos^{2}\theta + \frac{R}{2}\dot{\varphi}^{2}\cos\theta + \frac{L}{6}\ddot{\varphi}\sin 2\theta - \frac{R}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{R}{2}\dot{\theta}^{2}\cos\theta\right)\vec{e}_{\varphi} \\
&+ mL^{2}\left(\ddot{\varphi}\left(3R^{2} + \frac{L^{2}}{3}\sin^{2}\theta\right) + \frac{L}{3}\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta + \frac{LR}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{LR}{2}\dot{\theta}^{2}\sin\theta\right)\vec{e}_{z} \\
&= mL\left(\frac{L}{3}\ddot{\theta} + \frac{R}{2}\ddot{\varphi}\cos\theta - \frac{L^{2}}{6}\sin 2\theta\,\dot{\varphi}^{2} + \frac{mg}{2}\sin\theta\right)\vec{e}_{\varrho} + \\
&+ mL\left(\frac{2}{3}L\cos^{2}\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{R}{2}\cos\theta\,\dot{\varphi}^{2} + \frac{L}{6}\sin 2\theta\,\ddot{\varphi} - \frac{R}{2}\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{R}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}^{2} - \frac{3}{2}g\right)\vec{e}_{\varphi} \\
&+ \left[mL^{2}\left(\left(3R^{2} + \frac{L^{2}}{3}\sin^{2}\theta\right)\ddot{\varphi} + \frac{L}{3}\sin 2\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{LR}{2}\cos\theta\,\ddot{\theta} - \frac{LR}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^{2}\right) + c\varphi\right]\vec{e}_{z}
\end{aligned}
$$

La componente lungo $\vec{e}_z$ di $\vec{\mu}\,'$ si annulla in virtù della IEL (13.3). Infatti, sappiamo che una cerniera cilindrica liscia non può esercitare un momento reattivo lungo il proprio asse. Inoltre, la componente lungo $\vec{e}_\varrho$ di $\vec{\mu}\,'$ si annulla in virtù della II EL (13.4). Dunque, l'unica componente della coppia di reazione esterna nel modello è diretta lungo $\vec{e}_\varphi$.