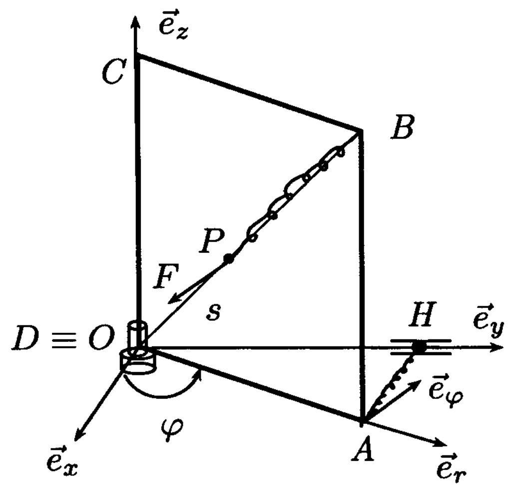
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 15 febbraio 2016. (G. Tondo)



Un telaio rigido omogeneo di massa M e lati $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = \sqrt{3}a$, è vincolato a ruotare intorno ad un asse fisso verticale mediante una cerniera cilindrica liscia, fissata in O e in D. Un punto materiale P di massa m, è vincolato a scorrere senza attrito sulla diagonale BD del telaio, di massa trascurabile. Sul vertice A agisce una molla di richiamo di costante elastica c, che si mantiene sempre parallela al versore $\vec{e}_x$. Sul punto P agisce un'altra molla, con la stessa costante elastica, con estremo fissato in B, oltre ad una forza $F > 0$, sempre ortogonale al piano del telaio. Inoltre, su tutto il modello, agisce il peso proprio. Si denoti con $0 \leq \varphi < 2\pi$, l'angolo tra i versori $\vec{e}_x$ ed $\vec{e}_r$ e con $0 < s < a$, l'ascissa del punto P sulla semiretta passante per O e B, con origine in O.

STATICA.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio del modello, supponendo $a > \frac{mg}{4c}\sqrt{3}$;

2) calcolare le reazioni e il momento delle reazioni vincolari, all'equilibrio, della cerniera cilidrica in O sulla lamina;

3) calcolare le reazioni vincolari interne, all'equilibrio, sul punto P.

DINAMICA.

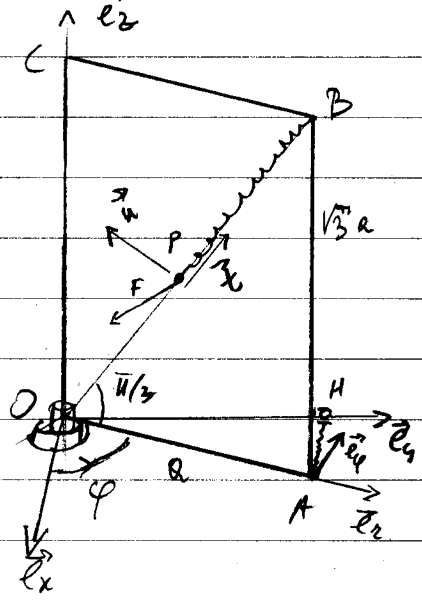
Si chiede di:

4) scrivere le equazioni pure di moto;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) calcolare le reazioni e il momento delle reazioni vincolari della cerniera in O sulla lamina, durante il moto.

Tema del 15/02/2016



Il modello è costituito da un rigido con asse fisso e da un punto materiale (P, m). Con il metodo dei congelamenti meccanici si evince che il modello ha 2 g.l. Possiamo scegliere come coordinate libere l'angolo di rotazione del telaio $0 < \varphi < 2\pi$ e l'ascissa di P lungo il segmento OB, $0 < s < 2a$.

Consideremo 3 basi di versori:

$\Sigma := (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: base "fissa"

$\Sigma' := (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: base "intermedia", solidale al telaio

$\Sigma'' := (\vec{t}, \vec{n}, \vec{K})$: base "adattata" a OB, solidale al telaio

Valgono le seguenti relazioni:

(1.1) $\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = e_z \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_r - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_r + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$

(1.2) $\begin{cases} \vec{t} = \frac{1}{2}\vec{e}_r + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_z \\ \vec{n} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r + \frac{1}{2}\vec{e}_z \\ \vec{K} = -\vec{e}_\varphi \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \vec{e}_r = \frac{1}{2}\vec{t} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{n} \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{K} \\ \vec{e}_z = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{t} + \frac{1}{2}\vec{n} \end{cases}$

(2.1) $\vec{x}_P = P-O = s\,\vec{t} = \frac{s}{2}\left(\vec{e}_2 + \sqrt{3}\,\vec{e}_1\right)$, $\vec{x}_G = a\,\vec{t} = \frac{a}{2}\left(\vec{e}_2 + \sqrt{3}\,\vec{e}_1\right)$

(2.2) $\vec{x}_A = (A-O) = a\,\vec{e}_r = a\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right)$

Statica

La sollecitazione attiva è in parte conservativa (peso, molle) e in parte non conservativa (carico follower in P). Allora, per calcolare le componenti lagrangiane, utilizziamo l'energia potenziale per la parte conservativa e la definizione per la parte non conservativa. Dunque,

$$V(\varphi, s) = -\cancel{M\vec{g}\cdot\vec{x}_G} - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P + \frac{1}{2}c\,\overline{BP}^2 + \frac{1}{2}c\,\overline{AH}^2$$

(2.3)
$$= mg\,\vec{e}_2\cdot\frac{s}{2}\left(\vec{e}_2 + \sqrt{3}\,\vec{e}_1\right) + \frac{1}{2}c\,(2a-s)^2 + \frac{1}{2}c\,(a\cos\varphi)^2$$

$$= mg\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{1}{2}c\,(2a-s)^2 + \frac{1}{2}c\,a^2\cos^2\varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = -c\,a^2\cos\varphi\sin\varphi = -Q_\varphi^{(c)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - c\,(2a-s) = -Q_s^{(c)}$$

$$Q_\varphi^{(nc)} = \vec{F}_P\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi} = -F\,\vec{e}_\varphi\cdot\frac{s}{2}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = -F\,\vec{e}_\varphi\cdot\frac{s}{2}\vec{e}_\varphi = -F\frac{s}{2}$$

$$Q_s^{(nc)} = \vec{F}_P\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial s} = -F\,\vec{e}_\varphi\cdot\vec{t} = 0$$

Allora,

(2.4)
$$Q_\varphi = \frac{c}{2}a^2\sin 2\varphi - F\frac{s}{2}$$

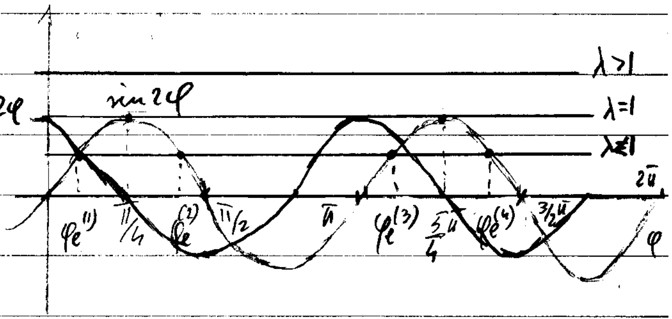
$$Q_s = -mg\frac{\sqrt{3}}{2} + c\,(2a-s)$$

Dunque, le eq. pure di equilibrio sono

$$(3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{c}{2} a^2 \sin 2\varphi - F\dfrac{s}{2} = 0 \\ c(2a - s) - mg\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 2\varphi_e = \dfrac{F s_e}{c a^2} \\ s_e = 2a - \dfrac{mg\sqrt{3}}{2c} > 0 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione:

$$(3.2)\quad \sin 2\varphi_e = \frac{F}{ca}\left(\frac{2a}{a} - \frac{mg\sqrt{3}}{2ca}\right) = \lambda$$



se $\lambda > 1$ Nessuna soluzione

$$(3.3)\quad \text{se } \lambda = 1 \quad \varphi_e^{(5)} = \frac{\pi}{4},\ \varphi_e^{(6)} = \frac{5}{4}\pi$$

se $\lambda < 1$ $\varphi_e^{(1)} = \frac{1}{2}\arcsin\lambda$, $\varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2} - \varphi_e^{(1)}$, $\varphi_e^{(3)} = \pi + \varphi_e^{(1)}$, $\varphi_e^{(4)} = \frac{3}{2}\pi - \varphi_e^{(1)}$.

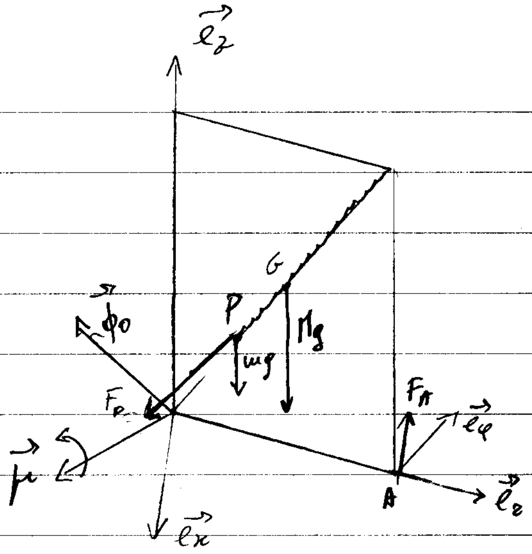
Quindi le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, s_e)$ sono:

se $\lambda > 1$ Nessuna

$$(3.4)\quad \text{se } \lambda = 1 \quad \vec{q}_e^{(5)} = \left(\frac{\pi}{4}, s_e\right),\quad \vec{q}_e^{(6)} = \left(\frac{5}{4}\pi, s_e\right)$$

se $\lambda < 1$ $\vec{q}_e^{(1)} = \left(\frac{1}{2}\arcsin\lambda, s_e\right)$, $\vec{q}_e^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\lambda, s_e\right)$

$\vec{q}_e^{(3)} = \left(\pi + \frac{1}{2}\arcsin\lambda, s_e\right)$, $\vec{q}_e^{(4)} = \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\arcsin\lambda, s_e\right)$



2) Reazioni in O all'equilibrio

La cerniera cilindrica liscia esercita sul telaio un insieme di reazioni equivalente a una forza e una coppia

$$\mathcal{L}^{(\text{reaz})} = \{(O, \vec{\phi}), \vec{\mu}\}, \quad \vec{\mu} \cdot \vec{e}_z = 0$$

Scriviamo le ECS e scomponiamole lungo la terna intermedia

(4.1)
$$\vec{R}^{(\text{est}, \text{att})} + \vec{\phi}_0 = \vec{0} \iff \vec{\phi}_0 = -\vec{R}^{(\text{est}, \text{att})}$$
$$\vec{M}_0^{(\text{est}, \text{att})} + \vec{\mu} = \vec{0} \iff \vec{\mu} = -\vec{M}_0^{(\text{est}, \text{att})}$$

$$\vec{R}^{(est,ett)} = (M+m)\vec{g} + \vec{F}_A^{(el)} + \vec{F}_P =$$

$$= -(M+m)g\,\vec{e}_z - c\,a\cos\varphi\,\vec{e}_x - F\,\vec{e}_\varphi$$

(5.1)

$$= -(M+m)g\,\vec{e}_z - c\,a\cos\varphi\left(\cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi\right) - F\,\vec{e}_\varphi$$

$$= -c\,a\cos^2\varphi\,\vec{e}_r + \left(c\,a\sin\varphi\cos\varphi - F\right)\vec{e}_\varphi - (M+m)g\,\vec{e}_z$$

Dunque,

(5.2) $$\vec{\phi}_0 = c\,a\cos^2\varphi_e\,\vec{e}_r - \left(\frac{c\,a}{2}\sin 2\varphi_e - F\right)\vec{e}_\varphi + (M+m)g\,\vec{e}_z$$

Inoltre,

$$\vec{M}_0^{(est,ett)} = (G-O)\times M\vec{g} + (P-O)\times(m\vec{g} - F\,\vec{e}_\varphi) + (A-O)\times\vec{F}_A$$

$$\overset{!}{=} a\vec{t}\times(-Mg\,\vec{e}_z) + s\vec{t}\times(-mg\,\vec{e}_z - F\,\vec{e}_\varphi) + a\,\vec{e}_z\times(-c\,a\cos\varphi\,\vec{e}_x)$$

(5.3)

$$\overset{!}{=} +Mg\frac{a}{2}\,\vec{e}_\varphi + mg\frac{s}{2}\,\vec{e}_\varphi - F\frac{s}{2}\left(\vec{e}_r + \sqrt{3}\,\vec{e}_z\right)\times\vec{e}_\varphi - c\,a^2\cos\varphi\,\vec{e}_z\times\vec{e}_x$$

$$\overset{!}{=} +\frac{g}{2}(Ma + ms)\,\vec{e}_\varphi - F\frac{s}{2}\left(\vec{e}_z - \sqrt{3}\,\vec{e}_r\right) + c\,a^2\cos\varphi\sin\varphi\,\vec{e}_z$$

$$\overset{!}{=} F\frac{\sqrt{3}}{2}s\,\vec{e}_r + \frac{g}{2}(Ma + ms)\,\vec{e}_\varphi + \left(\frac{c\,a^2}{2}\sin 2\varphi - F\frac{s}{2}\right)\vec{e}_z$$

Quindi

(5.4)

$$\vec{\mu} = -F\frac{\sqrt{3}}{2}s_e\,\vec{e}_r - \frac{g}{2}(Ma + m\,s_e)\,\vec{e}_\varphi + \cancel{\left(\frac{c\,a^2}{2}\sin 2\varphi_e - F\frac{s_e}{2}\right)\vec{e}_z}$$

$$= -F\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2a - \frac{mg\sqrt{3}}{2c}\right)\vec{e}_r - \frac{g}{2}\left(Ma + m\left(2a - \frac{mg\sqrt{3}}{2c}\right)\right)\vec{e}_\varphi,$$

dove abbiamo tenuto conto che

(5.5) $$\vec{M}_0^{(est,ett)}\cdot\vec{e}_z \overset{(2.4)}{=} Q_\varphi\quad.$$

Ricapitolando, le reazioni vincolari in 0 equilibrio sono:

(6.1) $\vec{\mu} = -F\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2a - \frac{mg}{2c}\sqrt{3}\right)\vec{e}_r(\varphi_e) - \frac{g}{2}\left(Ma + m\left(2a - \frac{mg}{c}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\vec{e}_\varphi(\varphi_e)$

e

(6.2) $\vec{\phi}_0 = c\frac{a}{2}\,\vec{e}_r\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(F - c\frac{a}{2}\right)\vec{e}_\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) + (M+m)g\,\vec{e}_z$ in $\vec{q}_e^{(5)}$ e $\vec{q}_e^{(6)}$

(6.3) $\vec{\phi}_0 = ca\,\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\,\vec{e}_r(\varphi_e) + \left(F - \frac{ca}{2}\lambda\right)\vec{e}_\varphi(\varphi_e) + (M+m)g\vec{e}_z$ in $\vec{q}_e^{(1)}, \vec{q}_e^{(3)}$

(6.4) $\vec{\phi}_0 = \frac{ca}{2}\left(1-\sqrt{1-\lambda^2}\right)\vec{e}_r(\varphi_e) + \left(F - \frac{ca}{2}\lambda\right)\vec{e}_\varphi(\varphi_e) + (M+m)g\vec{e}_z$ in $\vec{q}_e^{(2)}, \vec{q}_e^{(4)}$,

dove abbiamo utilizzato la formula trigonometrica

(6.5) $\cos\varphi_e = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi_e}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}$,

che implica

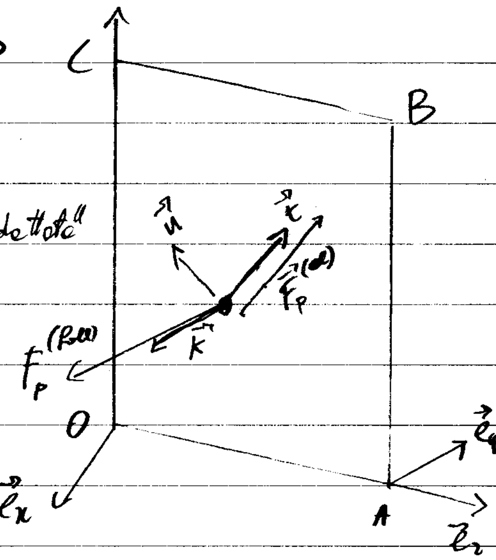
$\cos^2\varphi_e = \frac{1\pm\sqrt{1-\lambda^2}}{2}$,

quindi

(6.6) $\cos^2\varphi_e^{(1)} = \cos^2\varphi_e^{(3)} = \frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}$

(6.7) $\cos^2\varphi_e^{(2)} = \cos^2\varphi_e^{(4)} = \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}$

3) Reazioni sul punto P all'equilibrio



Scriviamo l'equazione della statica per il punto P e scomponiamola sulla terna "adattata"

(7.1) $\vec F_P^{(att)} + \vec\phi_P = \vec 0, \quad \vec\phi_P \cdot \vec t = \vec 0$

$$\vec F_P^{(att)} = \vec F_P^{(foll)} + \vec F_P^{(el)} + m\vec g$$

(7.2)

$$= -F\,\vec e_y + c(2a-s)\,\vec t - mg\,\vec e_z$$

$$= +F\,\vec K + c(2a-s)\vec t - \frac{mg}{2}\left(\sqrt3\,\vec t + \vec n\right)$$

$$= \left(c(2a-s) - \frac{mg}{2}\sqrt3\right)\vec t - \frac{mg}{2}\vec n + F\vec K$$

Allora,

(7.3) $\vec\phi_P = \cancel{-\left(c(2a-s_e) - \frac{mg}{2}\sqrt3\right)\vec t} + \frac{mg}{2}\vec n - F\vec K,$

dove abbiamo tenuto conto che

(7.4) $\vec F_P^{(att)} \cdot \vec t \overset{(2.4)}{=} Q_s,$

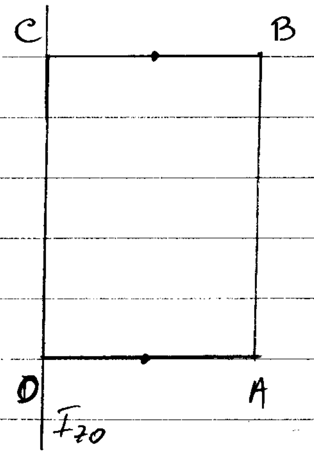
quindi si annulla all'equilibrio.

Dinamica

4) Scriviamo le 2 EL associate a φ e s. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$K = K^{(tel)} + K^{(P)} \tag{8.1}$$

$$K^{(tel)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot I_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\vec{e}_z\cdot I_O(\dot{\varphi}\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 I_{zO} \tag{8.2}$$



Calcolo di I_{zO}

$$I_{zO} = \cancel{I_{zO}^{(OC)}} + I_{zO}^{(AO)} + \bar{I}_{zO}^{(BC)} + \bar{I}_{zO}^{(AB)} = 2\,I_{zO}^{(AO)} + I_{zO}^{(AB)} \tag{8.3}$$

$$I_{zO}^{(AO)} = \frac{1}{3}\,m(\overline{AO})\,a^2 = \frac{1}{3}\,\frac{M\cancel{a}}{2\cancel{a}(1+\sqrt{3})}\,a^2 \tag{8.4}$$

$$I_{zO}^{(AB)} = m(\overline{AB})\,\overline{AO}^2 = \frac{M\sqrt{3}\cancel{a}}{2\cancel{a}(1+\sqrt{3})}\,a^2 \tag{8.5}$$

$$\rho = \frac{M}{2a(1+\sqrt{3})}$$

Dunque

$$I_{zO} = \frac{1}{3}\,\frac{M}{(1+\sqrt{3})}\,a^2 + \frac{M\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}\,a^2 = \frac{Ma^2}{1+\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{Ma^2}{6}\,\frac{2+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \tag{8.6}$$

e

$$K^{(tel)} = \frac{1}{12}\,Ma^2\,\frac{2+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\,\dot{\varphi}^2 \tag{8.7}$$

(9.1) $K^{(P)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_P|^2$

(9.2) $\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)}$

dove $\vec{v}_P^{(rel)}$ è la velocità di P relativa alla terna intermedia Σ' (solidale al telaio) e $\vec{v}_P^{(tr)}$ la velocità di trascinamento di P.
Allora,

(9.3) $\vec{v}_P^{(rel)} = \frac{d}{dt}\Big|_{\Sigma'} \vec{x}_P = \frac{d}{dt}\Big|_{\Sigma'} (s\vec{t}) = \dot{s}\,\vec{t}$

(9.4) $\vec{v}_P^{(tr)} = \cancel{\vec{v}_O} + \vec{\omega} \times (P-O) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times s\vec{t} = s\dot{\varphi}\frac{1}{2}\vec{e}_\varphi = -\frac{1}{2}\dot{\varphi}\vec{k}$

Dunque

(9.5) $\vec{v}_P = \dot{s}\,\vec{t} + \frac{s\dot{\varphi}}{2}\vec{e}_\varphi = \dot{s}\vec{t} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}\vec{k}$

(9.6) $|\vec{v}_P|^2 = \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P = \dot{s}^2 + \frac{s^2\dot{\varphi}^2}{4} + 2s\frac{\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\cancel{\vec{t}\cdot\vec{e}_\varphi}$

$= \dot{s}^2 + \frac{s^2\dot{\varphi}^2}{4}$

Allora,

$K = \frac{1}{12} M a^2 \frac{2+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{s^2\dot{\varphi}^2}{4}\right)$

(9.7) $= \frac{1}{2}\left(\frac{Ma^2}{6}\frac{2+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{ms^2}{4}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2$

Quindi

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = \left(\frac{Ma^2}{6}\,\frac{2+3\sqrt3}{1+\sqrt3} + \frac{ms^2}{4}\right)\dot\varphi \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = \left(\frac{Ma^2}{6}\,\frac{2+3\sqrt3}{1+\sqrt3} + \frac{ms^2}{4}\right)\ddot\varphi + \frac{m}{2} s\dot s\,\dot\varphi$$

$$(10.1)\quad EL_\varphi : \quad \left(\frac{Ma^2}{6}\,\frac{2+3\sqrt3}{1+\sqrt3} + \frac{ms^2}{4}\right)\ddot\varphi + \frac{m}{2} s\dot s\dot\varphi = \frac{c}{2}a^2 \sin 2\varphi - F\frac{s}{2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot s} = m\dot s \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot s}\right) = m\ddot s$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{ms}{4}\dot\varphi^2$$

$$(10.2)\quad EL_s : \quad m\left(\ddot s - \frac{s}{4}\dot\varphi^2\right) = -mg\frac{\sqrt3}{2} + c\,(2a - s)$$

5) Linearizzazione

La sollecitazione è posizionale, quindi, introdotti gli scarti dalle configurazioni di equilibrio

$$(10.3)\quad \varepsilon\vec x(t) = \vec q(t) - \vec q_e = \begin{bmatrix}\varphi(t)\\ s(t)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\varphi_e\\ s_e\end{bmatrix}$$

le eq. linearizzate intorno alle configurazioni di eq.rio

$$(10.4)\quad A\ddot{\vec x} + \cancel{B\dot{\vec x}} + C\vec x = 0 \qquad \text{dove}$$

$$(10.5)\quad A_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot q_i\,\partial \dot q_j}\Big|_{\vec q_e} \ , \quad C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\Big|_{\vec q_e} .$$

$$(11.1)\quad A = \left[\begin{array}{c|c} \frac{Ma^2}{6}\,\frac{2+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{m}{4}\,s_e^2 & 0 \\ \hline 0 & m \end{array}\right]$$

$$(11.2)\quad C = \left[\begin{array}{c|c} c\,a^2\cos 2\varphi_e & -\frac{F}{2} \\ \hline 0 & -c \end{array}\right]$$

Allora

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{Ma^2}{6}\,\frac{2+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{m}{4}\,s_e^2 & 0 \\ 0 & m \end{array}\right]\begin{bmatrix}\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2\end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} -c\,a^2\cos 2\varphi_e & \frac{F}{2} \\ \hline 0 & c \end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = 0$$

ovvero

$$(11.3)\quad \begin{cases} \left(\frac{Ma^2}{6}\,\frac{2+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{m}{4}\,s_e^2\right)\ddot{x}_1 - c\,a^2\cos 2\varphi_e\, x_1 + \frac{F}{2}\,x_2 = 0 \\ m\,\ddot{x}_2 + c\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque, le eq. linearizzate intorno alle configurazioni $\vec{q}_e^{(1)}, \vec{q}_e^{(3)}$

$$(11.4)\quad \begin{cases} \left(\frac{Ma^2}{6}\,\frac{2+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{m}{4}\left(2a - \frac{mg}{2c}\sqrt{3}\right)^2\right)\ddot{x}_1 - c\,a^2\sqrt{1-\lambda^2}\; x_1 + \frac{F}{2}\,x_2 \\ m\,\ddot{x}_2 + c\,x_2 = 0 \end{cases}$$

e intorno alle configurazioni $\vec{q}_e^{(2)}$, $\vec{q}_e^{(4)}$

$$(11.5)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{Ma^2}{6}\,\dfrac{2+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{m}{4}\left(2a-\dfrac{mg}{2c}\sqrt{3}\right)^2\right)\ddot{x}_1+ca^2\sqrt{1-\lambda^2}\,x_1+\dfrac{F}{2}x_2=0 \\ m\,\ddot{x}_2+c\,x_2=0 \end{cases}$$

le equazioni linearizzate intorno alle configurazioni $\vec{q}_e^{(5)}$, $\vec{q}_e^{(6)}$ si ricavano ponendo nei sistemi precedenti

$$\lambda=1$$

6) Reazioni in O e P, in dinamica

Per calcolare le reazioni dinamiche della cerniera in O, nel telaio

$$\mathcal{f}^{(\text{reaz. din.})}=\left\{\left(O,\vec{\phi}'\right),\vec{\mu}'\right\}$$

scriviamo le ECD su tutto il modello

$$(11.6)\quad \begin{cases} \vec{R}^{(\text{est, att})}+\vec{\phi}_0'=M\vec{a}_G+m\vec{a}_P \\ \vec{M}_0^{(\text{est, att})}+\vec{\mu}'=\dfrac{d}{dt}\vec{L}_0 \end{cases}$$

$$(11.7)\quad \vec{x}_G=a\vec{t}\ ,\quad \vec{v}_G=a\dot{\vec{t}}=a\left(\vec{\omega}\times\vec{t}\right)=a\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times\vec{t}=\frac{a}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$(11.8)\quad \vec{a}_G=\frac{a}{2}\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi+\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi\right)=\frac{a}{2}\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi-\dot{\varphi}^2\vec{e}_r\right)$$

$$(11.9)\quad \vec{a}_P=\dot{\vec{v}}_P=\frac{d}{dt}\left(\dot{s}\,\vec{t}+\frac{s}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)=\ddot{s}\,\vec{t}+\dot{s}\,\dot{\vec{t}}+\frac{\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\vec{e}_\varphi+\frac{s}{2}\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi+\frac{s}{2}\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi=$$

$$=\ddot{s}\,\vec{t}+\dot{s}\,\frac{\dot{\varphi}}{2}\vec{e}_\varphi+\frac{\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\vec{e}_\varphi+\frac{s}{2}\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi-\frac{s}{2}\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ddot{s}-s\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r+\left(\dot{s}\dot{\varphi}+\frac{s}{2}\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{s}\,\vec{e}_z$$

Allora, dalla I ECD si ottiene

$$\vec{\Phi}_0{}' = c\,a\cos^2\varphi\,\vec{e}_r - \left(\frac{c\,a}{2}\sin 2\varphi - F\right)\vec{e}_\varphi + (M+m)\,g\,\vec{e}_z +$$

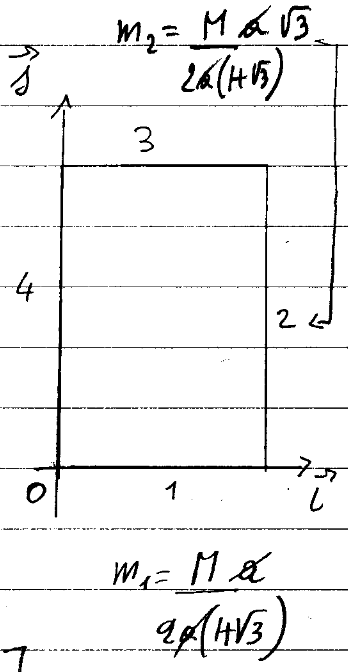
$$(13.1) \qquad + M\frac{a}{2}\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r\right) + \frac{m}{2}\Big[\left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \sqrt{3}\,\ddot{s}\,\vec{e}_z\Big]$$

<u>Calcolo di $\vec{L}_0$</u>

$$(13.2) \quad \vec{L}_0 = \vec{L}_0^{(tel)} + \vec{L}_0^{(P)}$$

$$(13.3) \quad \vec{L}_0^{(tel)} = I_0(\vec{\omega}) = \dot{\varphi}\, I_0(\vec{e}_z)$$

$$(13.4) \quad I_0 = I_0^{(1)} + I_0^{(2)} + I_0^{(3)} + I_0^{(4)}$$



$$(13.5) \quad I_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m_1 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_1 a^2 \end{bmatrix} = \frac{M a^2}{6(1+\sqrt{3})}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(13.6) \quad I_0^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_2\, 3a^2 & -m_2\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 & 0 \\ -m_2\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 & m_2 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_2 a^2 \end{bmatrix} = \frac{M\sqrt{3}\,a^2}{2(1+\sqrt{3})}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(13.7) \quad \left[I_0^{(2)}\right]_{12} = -\frac{m_2}{\sqrt{3}\,a}\int_{R_2} xy\, dR_2 = -\frac{m_2}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}a} y\, dy = -\frac{m_2}{\cancel{\sqrt{3}}}\,\frac{\overset{\sqrt{3}}{\cancel{3}}\,a^2}{2}$$

$$I_O^{(3)} = \begin{bmatrix} m_1 3a^2 & -m_1\sqrt{3}\, a^2/2 & 0 \\ -m_1\sqrt{3}\,\frac{a^2}{2} & \frac{1}{3} m_1 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} m_1 a^2 \end{bmatrix} = \frac{M\, a^2}{2(1+\sqrt{3})} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \tag{14.1}$$

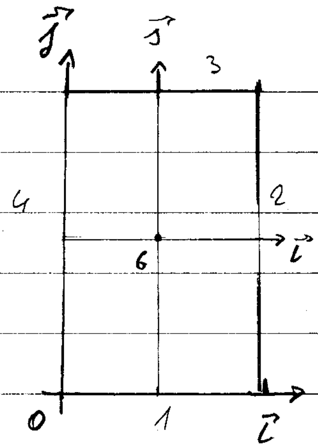
$$\left[I_O^{(3)}\right]_{12} = -\frac{m_1}{a}\int_{R_3} x\, y\, dR_3 = -\frac{m_1 \cancel{a}\sqrt{3}}{\cancel{a}}\int_0^a x\, dx = -m_1\sqrt{3}\,\frac{a^2}{2} \tag{14.2}$$

$$\left[I_O^{(4)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cancel{3}} m_2 \cancel{3} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 a^2 \end{bmatrix} = \frac{M\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}\, a^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{14.3}$$

Dunque,

$$I_O = a^2 \begin{bmatrix} 3m_1 + 2m_2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}(m_1+m_2) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(m_1+m_2) & \frac{2}{3} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} m_1 + 3m_2 \end{bmatrix} = \frac{M\, a^2}{2(1+\sqrt{3})} \begin{bmatrix} 3+2\sqrt{3} & -\frac{3+\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{3+\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3}+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3}+3\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{14.4}$$

In alternativa, possiamo utilizzare il teorema di Huygens-Steiner



$$(15.1)\quad I_O = I_G + M \begin{bmatrix} y_G^2 + \cancel{z_G^2} & -x_G y_G & -\cancel{x_G z_G} \\ -x_G y_G & x_G^2 + \cancel{z_G^2} & -\cancel{y_G z_G} \\ -\cancel{x_G z_G} & -\cancel{y_G z_G} & x_G^2 + y_G^2 \end{bmatrix} =$$

$$= I_G + M a^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(15.2)\quad I_G = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\cancel{12}\,4} m_2 \cancel{3}^{1} a^2 + m_1 \frac{3}{\cancel{4}}\right)2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{1}{12} m_1 a^2 + m_2 \frac{a^2}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) a^2 \end{bmatrix} =$$

$$= a^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) & & \\ & \left(\frac{1}{6} m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) & \\ & & \frac{5}{3} m_1 + m_2 \end{bmatrix} = \frac{a^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{3M + \sqrt{3}M}{2(1+\sqrt{3})} & & \\ & M\frac{\left(\frac{1}{3} + \sqrt{3}\right)}{2(1+\sqrt{3})} & \\ & & M\frac{\frac{10}{3} + 2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} \end{bmatrix}$$

$$(15.3)\quad I_O = a^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 & & \\ & \frac{1}{6} m_1 + \frac{1}{2} m_2 & \\ & & \frac{5}{3} m_1 + m_2 \end{bmatrix} + 2(m_1 + m_2) a^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (14.4)$$

Dunque

$$\vec{L}_0^{(tel)} = \dot{\varphi}\, I_0(\vec{e}_z) = \dot{\varphi}\, I_0(\vec{j}) = \frac{M a^2}{2(1+\sqrt{3})}\dot{\varphi}\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \left(\frac{2}{3}+\sqrt{3}\right)\vec{j}\right)$$

(16.1)

$$= \frac{M a^2}{2(1+\sqrt{3})}\dot{\varphi}\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r + \left(\frac{2}{3}+\sqrt{3}\right)\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{L}_0^{(P)} = (P-O)\times m\vec{v}_P = s\vec{t}\times m\left(\dot{s}\vec{t} - \frac{s}{2}\dot{\varphi}\vec{K}\right) = -\frac{m s^2}{2}\dot{\varphi}\,\vec{t}\times\vec{K} = m\frac{s^2}{2}\dot{\varphi}\,\vec{n}$$

(16.2)

$$= m\frac{s^2}{2}\dot{\varphi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right)$$

Allora

(16.3)

$$\vec{L}_0 = \dot{\varphi}\left(-\frac{M a^2}{4(1+\sqrt{3})}(3+\sqrt{3}) - m\frac{\sqrt{3}}{4}s^2\right)\vec{e}_r + \dot{\varphi}\left(\frac{M a^2}{2(1+\sqrt{3})}\left(\frac{2}{3}+\sqrt{3}\right) + \frac{m s^2}{4}\right)\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \ddot{\varphi}\left(-\frac{M a^2(3+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} - m\frac{\sqrt{3}}{4}s^2\right)\vec{e}_r - m\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\varphi}s\dot{s}\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}^2\left(\frac{M a^2(3+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} - \frac{m\sqrt{3}s^2}{4}\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+\ddot{\varphi}\left(\frac{M a^2}{2(1+\sqrt{3})}\left(\frac{2}{3}+\sqrt{3}\right) + \frac{m s^2}{4}\right)\vec{e}_z + \frac{m}{2}\dot{\varphi}s\dot{s}\,\vec{e}_z$$

(16.4)

$$= \left[\ddot{\varphi}\left(-\frac{M a^2(3+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} - \frac{m\sqrt{3}s^2}{4}\right) - m\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\varphi}s\dot{s}\right]\vec{e}_r - \dot{\varphi}^2\left[\frac{M a^2(3+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} - \frac{m\sqrt{3}s^2}{4}\right]\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left[\ddot{\varphi}\left(\frac{M a^2}{2(1+\sqrt{3})}\left(\frac{2}{3}+\sqrt{3}\right) + \frac{m s^2}{4}\right) + \frac{m}{2}\dot{\varphi}s\dot{s}\right]\vec{e}_z$$

Quindi

$$\vec{\mu}_O' = -\frac{F\sqrt{3}}{2}s\,\vec{e}_z - \frac{g}{2}\left(M_a + ms\right)\vec{e}_\varphi - \cancel{\left(\frac{ca^2}{2}\sin 2\varphi - \frac{Fs}{2}\right)\vec{e}_z} +$$

$$+\left[-\ddot{\varphi}\left(\frac{Ma^2(3+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} + \frac{m\sqrt{3}}{4}s^2\right) - \frac{m\sqrt{3}}{2}\dot{\varphi}s\dot{s}\right]\vec{e}_z +$$

(17.1)
$$+\dot{\varphi}^2\left[-\frac{Ma^2(3+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} - \frac{m\sqrt{3}}{4}s^2\right]\vec{e}_\varphi +$$

$$\cancel{+\left[\ddot{\varphi}\left(\frac{Ma^2}{2(1+\sqrt{3})}\left(\frac{2}{3}+\sqrt{3}\right) + \frac{ms^2}{4}\right) + \frac{m}{2}\dot{\varphi}s\dot{s}\right]\vec{e}_z}$$

$$\overset{(10.1)}{=} -\left[F\frac{\sqrt{3}}{2}s + \ddot{\varphi}\left(\frac{Ma^2(3+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} + \frac{m\sqrt{3}}{4}s^2\right) + m\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\varphi}\dot{s}s\right]\vec{e}_z$$

$$-\left[\frac{g}{2}\left(Ma + ms\right) + \dot{\varphi}^2\left(\frac{Ma^2(3+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} - m\frac{\sqrt{3}}{4}s^2\right)\right]\vec{e}_\varphi$$

Per calcolare le reazioni dinamiche interne sul punto P, scriviamo l'equazione della dinamica per P nella base $(\vec{t},\vec{n},\vec{k})$

(17.2)
$$\vec{F}_P + \vec{\phi}_P' = m\vec{a}_P$$

Quindi, tenuto conto delle (7.2), (11.9) e (1.2), si ottiene

(17.3)
$$\vec{\phi}_P' = -\vec{F}_P + m\vec{a}_P = -\left[c(2a-s) - \frac{mg}{2}\sqrt{3}\right]\vec{t} + \frac{mg}{2}\vec{n} - F\vec{K} +$$

$$+m\left[\frac{1}{2}\left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right)\frac{1}{2}\left(\vec{t} - \sqrt{3}\vec{n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\ddot{s}}{2}\left(\sqrt{3}\vec{t} + \vec{n}\right) - \left(\dot{s}\dot{\varphi} + \frac{s}{2}\ddot{\varphi}\right)\vec{K}\right]$$

$$\overset{(10.2)}{=} \cancel{-\left[c(2a-s) - \frac{mg}{2}\sqrt{3} + \frac{m}{4}(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2) + m\frac{3}{4}\ddot{s}\right]}\vec{t} +$$

$$+\left[\frac{mg}{2} - \frac{m}{4}\left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right)\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\ddot{s}\right]\vec{n} - \left[F + m\left(\dot{s}\dot{\varphi} + \frac{s}{2}\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{K}$$