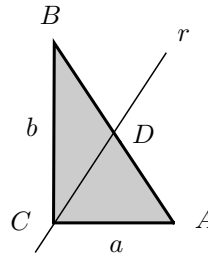


Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

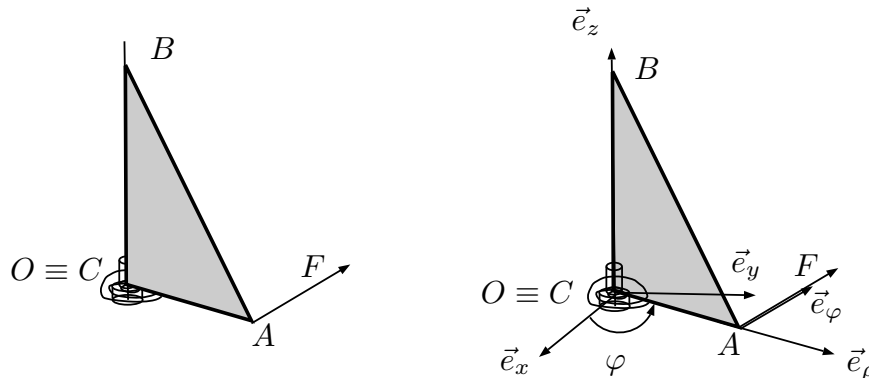
Trieste, 30 giugno 2015. (G. Tondo)

Si consideri una lamina omogenea di massa m , a forma di triangolo rettangolo, con i cateti di lunghezza a e b .

- 1) Si calcoli il baricentro G e il momento d'inerzia della lamina rispetto a una retta r passante per il vertice C e il punto medio D dell'ipotenusa.



La lamina suddetta è vincolato a ruotare, come in figura, attorno all'asse fisso verticale (O, \vec{e}_z) passante per C , mediante una cerniera cilindrica fissa in $O \equiv C$. Sulla lamina agiscono: una molla *angolare* di richiamo posta in C e di costante elastica c , il peso proprio, una forza F applicata in A , sempre ortogonale alla lamina come in figura.



STATICA

Detto φ l'angolo tra il piano della lamina e il piano verticale fisso in cui la molla è a riposo, individuato dagli assi $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, determinare:

- 2) le (eventuali) configurazioni di equilibrio della lamina e la loro stabilità;
- 3) il risultante e il momento risultante delle reazioni vincolari sulla lamina in C , all'equilibrio.

DINAMICA

- 4) Scrivere un'equazione differenziale pura di moto e determinarne la soluzione particolare corrispondente alle condizioni iniziali

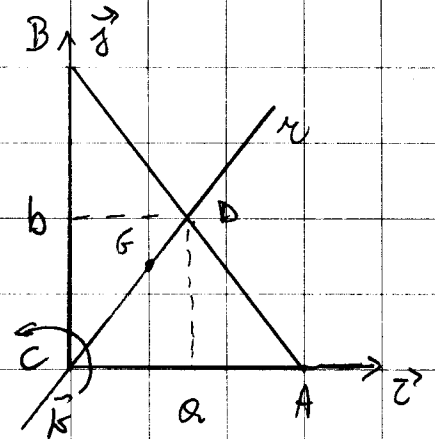
$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0;$$

- 5) calcolare il risultante delle reazioni vincolari sulla lamina in C , durante il moto del punto 4) in funzione di φ ;
- 6) calcolare il risultante del momento delle reazioni vincolari sulla lamina in C , durante il moto del punto 4) in funzione di φ .

Tema del 30/06/2015

1

1) Calcolo del baricentro G della lamina triangolare e del momento d'inerzia I_z .



Per il calcolo di G , ricordiamo che in una lamina omogenea, esso coincide con il baricentro geometrico e quindi divide le mediane (assi di simmetria oblique, congiunti al lato diviso in due dalla mediana) in due parti una doppia dell'altra

$$\vec{CG} = 2\vec{GD}$$

Allora, considerando la terna di vettori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avremo

$$\vec{D}-\vec{C} = \frac{1}{2} (a\vec{i} + b\vec{j})$$

$$\vec{G}-\vec{C} = \frac{2}{3} (\vec{D}-\vec{C}) = \frac{1}{3} (a\vec{i} + b\vec{j})$$

Tema del 30/06/2015

2

Calcoleremo il momento d'inerzia I_z e I_x tramite la formula:

$$I_z = \text{vers}(D-C) \cdot I_C \cdot \text{vers}(D-C)$$

A tale scopo, calcoliamo la matrice d'inerzia

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

rispetto alla terna di assi $(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$I_{11} = \int_R \rho(P) (x_2^2 + x_3^2) dS = \frac{2m}{ab} \int_0^a dx_1 \int_0^{x_2(x_1)} x_2^2 dx_2$$

dove $x_2(x_1)$ è l'equazione cartesiana della retta perpendicolare per i punti A e B, cioè

$$x_2(x_1) = -\frac{b}{a}x_1 + b$$

Allora,

$$I_{11} = \frac{2m}{ab} \int_0^a dx_1 \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_0^{-\frac{b}{a}x_1 + b} = \frac{2m}{3ab} \int_0^a \left(-\frac{b}{a}x_1 + b \right)^3 dx_1$$

Tema del 30/06/2015

3

$$= \frac{2m}{3ab} \left[\frac{1}{4} \left(-\frac{b}{a} x_1 + b \right)^4 \left(-\frac{a}{b} \right) \right]_0^a = -\frac{m}{6ab} \frac{a}{b} (-b^4) = \frac{1}{6} m b^2$$

Analogamente, si trova che $I_{22} = \frac{1}{6} m a^2$. Inoltre,

$$I_{12} = - \int_R \rho(P) x_1 x_2 dS = - \frac{2m}{ab} \int_0^a x_1 dx_1 \left(\int_0^{x_2(x_1)} x_2 dx_2 \right) =$$

$$= - \frac{2m}{ab} \int_0^a x_1 dx_1 \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^{-\frac{b}{a} x_1 + b} = - \frac{2m}{ab} \int_0^a \frac{x_1}{2} \left(-\frac{b}{a} x_1 + b \right)^2 dx_1 =$$

$$= - \frac{m}{ab} \int_0^a x_1 \left(-\frac{b}{a} x_1 + b \right)^2 dx_1 = - \frac{m}{ab} \int_0^a \left(\frac{b^2}{a^2} x_1^3 - \frac{2b^2}{a} x_1^2 + b^2 x_1 \right) dx_1$$

$$= - \frac{m}{ab} \left[\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1^4}{4} - \frac{2b^2}{a} \frac{x_1^3}{3} + b^2 \frac{x_1^2}{2} \right]_0^a =$$

$$= - \frac{m}{ab} \left(-\frac{b^2}{a^2} \frac{a^4}{4} - \frac{2b^2}{a} \frac{a^3}{3} + \frac{b^2 a^2}{2} \right) = - \frac{1}{12} m ab$$

Tema del 30/06/2015

4

Dunque,

$$(4.1) \quad I_G = m \begin{bmatrix} \frac{1}{6} b^2 & -\frac{1}{12} ab & 0 \\ -\frac{1}{12} ab & \frac{1}{6} a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} (a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

$$\text{vers } (D-e) = \frac{1}{2} \frac{(a\vec{i} + b\vec{j})}{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Quindi

$$I_G = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} [a, b, 0] m \begin{bmatrix} \frac{1}{6} b^2 & -\frac{1}{12} ab & 0 \\ -\frac{1}{12} ab & \frac{1}{6} a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} (a^2 + b^2) \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{m}{a^2 + b^2} [a, b, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{6} ab^2 - \frac{1}{12} ab^2 \\ -\frac{1}{12} a^2 b + \frac{1}{6} a^2 b \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{m}{a^2 + b^2} [a, b, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{12} ab^2 \\ \frac{1}{12} a^2 b \end{bmatrix} = \frac{m}{a^2 + b^2} \frac{a^2 b^2}{6}$$

Tema del 30/06/2015

5

Cinematica: $l=1$, c.l. = φ , $\varphi \in \mathbb{R}$

Introduciamo le seguenti terne di vettori

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: terna "fissa"

$(\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z)$: terna "intermedia"

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: terna "solidale"

Le leggi di trasformazione tra le suddette terne sono

$$\begin{cases} \vec{e}_\varphi = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\psi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{e}_\varphi \\ \vec{j} = \vec{e}_\psi \\ \vec{k} = -\vec{e}_y \end{cases}$$

Poiché il moto della lamina è rotatorio intorno all'asse $(0, \vec{e}_z)$, la sua velocità angolare è

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z = \dot{\varphi} \vec{j}$$

Tema del 30/06/2015

6

Statica

Le molla angolare di richiamo ha energia potenziale

$$V^{(molla)} = \frac{1}{2} c \varphi^2$$

Il carico follower \vec{F}_A compie il lavoro virtuale

$$LV^{(Foll)} = \vec{F}_A \cdot \delta \vec{x}_A$$

$$\vec{x}_A = a \vec{e}_\varphi \Rightarrow \delta \vec{x}_A = a \delta \vec{e}_\varphi = a \delta \varphi \vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$LV^{(Foll)} = F_A \vec{e}_\varphi \cdot a \delta \varphi \vec{e}_\varphi = F_A a \delta \varphi$$

Allora, la forza follower generalizzata

$$Q_\varphi^{(Foll)} = F_A a$$

connette energia potenziale pari a

$$V^{(Foll)} = - \int F_A a d\varphi = - F_A a \varphi$$

Dunque, tutta la sollecitazione è conservativa con

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} c \varphi^2 - F_A a \varphi$$

Tema del 30/06/2015

7

Gli equilibri sono i punti stazionari di V

$$(7.1) \quad V'(\varphi) = c\varphi - Fa = -Q\varphi$$

Quindi, l'eq. pura di equilibrio è

$$c\varphi - Fa = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_e = \frac{Fa}{c}$$

Per determinare la stabilità di φ_e , calcoliamo la derivata seconda di V .

$$V''(\varphi) = c > 0 \Rightarrow \varphi_e \text{ pto di minimo} \Rightarrow \text{eq. stabile.}$$

3) Regioni vincolari in \mathcal{C} all'equilibrio.

Supponiamo che una cerniera cilindrica fissa e liscia esercita una regione vincolare $\{\vec{\phi}_c, \vec{\mu}_c\}$ con $\vec{\phi}_c$ arbitraria e $\vec{\mu}_c$ giacente nel piano ortogonale all'asse della cerniera.

Quindi, si possono scomporre come

$$\vec{\phi}_c = \phi_p \vec{e}_1 + \phi_\varphi \vec{e}_\varphi + \phi_z \vec{e}_z, \quad \vec{\mu}_c = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Le ECS si scrivano

$$\vec{R} + \vec{\phi}_c = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\phi}_c = -\vec{R} = -(-mg\vec{e}_z + F\vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{M}_c^{ext} + \vec{\mu} = \vec{0} \quad \vec{\mu} = -\vec{M}_c^{ext} = -(G \cdot C) \times m\vec{g} - (A \cdot C) \times F\vec{e}_\varphi + c\varphi\vec{e}_z$$

Da qui, all'equilibrio

$$\vec{\phi}_c = mg\vec{e}_z - F\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{1}{3}(a\vec{e}_y + b\vec{e}_z) \times mg\vec{e}_z - (a\vec{e}_y \times F\vec{e}_\varphi) + c\varphi\vec{e}_z \\ &= \frac{mga}{3}\vec{e}_y \times \vec{e}_z + (-Fa + c\varphi)\vec{e}_z \\ &= -\frac{mga}{3}\vec{e}_\varphi = \frac{mga}{3}\vec{k} \end{aligned}$$

Dinamica

Sappiamo che l'eq. pure di moto di un rotore è

$$(9.1) \quad I_z \ddot{\varphi} = Q_{\varphi},$$

dove I_z è il momento d'inerzia rispetto all'axe di rotazione. In questo caso

$$(9.2) \quad I_z = I_{zz} = \frac{1}{6} m a^2,$$

quindi, per la (7.1) segue che

$$(9.3) \quad \ddot{\varphi} = \frac{6}{m a^2} (F a - c \varphi)$$

ovvero

$$(9.4) \quad \ddot{\varphi} + \frac{6}{m a^2} c \varphi = \frac{6}{m a^2} F a.$$

L'integrale generale della (9.3) è dato dalla somma di quella dell'omogenea associata

$$\varphi(t) = A \exp\left(\sqrt{\frac{6c}{m a^2}} t + \alpha\right)$$

più una soluzione particolare della non omogenea, ad esempio la soluzione stazionaria

$$\varphi = \varphi_0 = \frac{F a}{c}.$$

Quindi,

$$\varphi(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{6c}{m a^2}} t + d\right) + \frac{F a}{c}$$

Imponendo le condizioni iniziali omogenee

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

si trova

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cos d + \frac{F a}{c} = 0 \\ -A \sqrt{\frac{6c}{m a^2}} \sin d = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{F a}{c} \\ d = 0 \end{array} \right.$$

Dunque, la soluzione del problema di Cauchy è

$$\varphi(t) = \frac{F a}{c} \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{6c}{m a^2}} t\right)\right)$$

5) Rimettente delle equazioni vincolari in \mathcal{C} durante il moto in funzione di φ .

Dallo I ECD

$$(11.1) \quad m\vec{g} + F\vec{e}_\varphi + \phi_C = m\vec{a}_C$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r} - \vec{O}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{O})) \\ &= \ddot{\varphi} \vec{e}_2 \times \frac{1}{3}(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) + \dot{\varphi} \vec{e}_2 \times \left(\dot{\varphi} \vec{e}_2 \times \frac{1}{3}(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) \right) \\ &= \frac{1}{3} a \ddot{\varphi} \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \dot{\varphi} \vec{e}_2 \times \left(\frac{1}{3} a \dot{\varphi} \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \right) \end{aligned}$$

$$(11.2) \quad \begin{aligned} &= \frac{1}{3} a \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{3} a \dot{\varphi}^2 \vec{e}_2 \times (\vec{e}_\varphi) \\ &= \frac{1}{3} a (\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r) \end{aligned}$$

Quindi

$$(11.3) \quad \begin{aligned} \vec{\phi}_C &= m g \vec{e}_2 - F \vec{e}_\varphi + \frac{m}{3} a (\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r) \\ &= m g \vec{e}_2 + \left(\frac{m}{3} a \ddot{\varphi} - F \right) \vec{e}_\varphi - \frac{m}{3} a \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r \end{aligned}$$

Ora dobbiamo ricavare

$$(11.4) \quad \dot{\varphi} = f(\varphi), \quad \dot{\varphi}^2 = g(\varphi)$$

e sostituirle nella (11.3).

A tale scopo, ricaviamo $\ddot{\varphi}$ dalle EL (9.3) e $\dot{\varphi}^2$ dalla conservazione dell'energia meccanica. Infatti, il rigolo è una meccanica semplice, e i vincoli non dissipativi, bilateri, fissi e olotrattorie posizionali. Dunque, l'energia meccanica è un integrale primo di moto

$$(12.1) \quad E = K + V = E|_{t=0}$$

L'energia cinetica K è data da

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_C(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_C(\vec{e}_z) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 I_{Cz} = \frac{1}{12} m a^2 \dot{\varphi}^2$$

Quindi

$$(12.2) \quad \frac{1}{12} m a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} c \varphi^2 - F a \varphi = E|_{t=0} = 0$$

Dunque,

$$(12.3) \quad \ddot{\varphi}^2 = \frac{12}{m a^2} \left(-\frac{c}{2} \varphi^2 + F a \varphi \right) = \frac{c}{m a^2} \left(2 F a \varphi - c \varphi^2 \right)$$

Allora, sostituendo la (12.2) e la (12.3) nella (11.3)

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_C^1 &= m g \vec{e}_z + \left(\frac{m a}{3} \frac{c}{m a^2} (F a - c \varphi) - F \right) \vec{e}_y = \frac{m a c}{3} \frac{c}{m a^2} (2 F a \varphi - c \varphi^2) \vec{e}_y \\ &= m g \vec{e}_z + \left(F - \frac{2 c \varphi}{a} \right) \vec{e}_y - 2 \varphi \left(2 F - \frac{2 c \varphi}{a} \right) \vec{e}_y \end{aligned}$$

- 6) Risultante del momento delle reazioni vincolari in funzione di φ .

Dalla II ECD segue

$$\vec{M}_C^{(ext, att)} + \vec{\mu}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \mathbb{I}_C(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_C(\vec{\omega})$$

$$\mathbb{I}_C(\vec{\omega}) = \mathbb{I}_C(\dot{\varphi} \vec{e}_z) = \dot{\varphi} \mathbb{I}_C(\vec{j}) = \dot{\varphi} \left(\frac{1}{12} ab \vec{i} + \frac{1}{6} a^2 \vec{j} \right)$$

$$\mathbb{I}_C(\vec{e}_z) = \mathbb{I}_C(\vec{j}) = m \left(\frac{1}{12} ab \vec{i} + \frac{1}{6} a^2 \vec{j} \right) = \frac{mR}{6} \left(\frac{b}{2} \vec{e}_y + a \vec{e}_z \right)$$

Quindi,

$$\mathbb{I}_C(\dot{\vec{\omega}}) = \frac{m \dot{\varphi} a}{6} \left(-\frac{1}{2} b \vec{e}_y + a \vec{e}_z \right)$$

$$\mathbb{I}_C(\ddot{\vec{\omega}}) = \mathbb{I}_C(\ddot{\varphi} \vec{e}_z) = \frac{m \ddot{\varphi} a}{6} \left(-\frac{1}{2} b \vec{e}_y + a \vec{e}_z \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \mathbb{I}_C(\vec{\omega}) &= \dot{\varphi} \vec{e}_z \times \frac{mR}{6} \dot{\varphi} \left(-\frac{b}{2} \vec{e}_y + a \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{ma}{6} \dot{\varphi}^2 \left(-\frac{b}{2} \right) \vec{e}_z \times \vec{e}_y \\ &= -\frac{mab}{12} \dot{\varphi}^2 \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \frac{ma}{6} \ddot{\varphi} \left(-\frac{b}{2} \vec{e}_y + a \vec{e}_z \right) - \frac{mab}{12} \dot{\varphi}^2 \vec{e}_x$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \vec{\mu} &= -M_c \vec{e}_\varphi + \frac{dL_c}{dt} \vec{e}_\varphi \\
 &= -\frac{mg a}{3} \vec{e}_\varphi + (F a - c \varphi) \vec{e}_\varphi + \\
 &\quad + \frac{m a}{6} \dot{\varphi}^2 \left(-\frac{b}{2} \vec{e}_\varphi + a \vec{e}_z \right) - \frac{m a b}{12} \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\varphi
 \end{aligned}$$

Sostituendo nella precedente eq. la (9.3) e la (12.3) si ottiene

$$\begin{aligned}
 \vec{\mu}' &= -\frac{mg a}{3} \vec{e}_\varphi - (F a - c \varphi) \vec{e}_\varphi + \\
 &\quad + \frac{m a}{6} \frac{6}{m a^2} (F a - c \varphi) \left(-\frac{b}{2} \vec{e}_\varphi + a \vec{e}_z \right) + \\
 &\quad - \frac{m a b}{12} \frac{6}{m a^2} (2 F a \varphi - c \varphi^2) \vec{e}_\varphi \\
 &= -\frac{b}{2 a} (F a - c \varphi) \vec{e}_\varphi - \left[\frac{m g a}{3} + \frac{b}{2 a} (2 F a \varphi - c \varphi^2) \right] \vec{e}_\varphi
 \end{aligned}$$