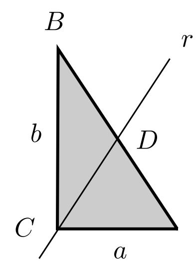
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

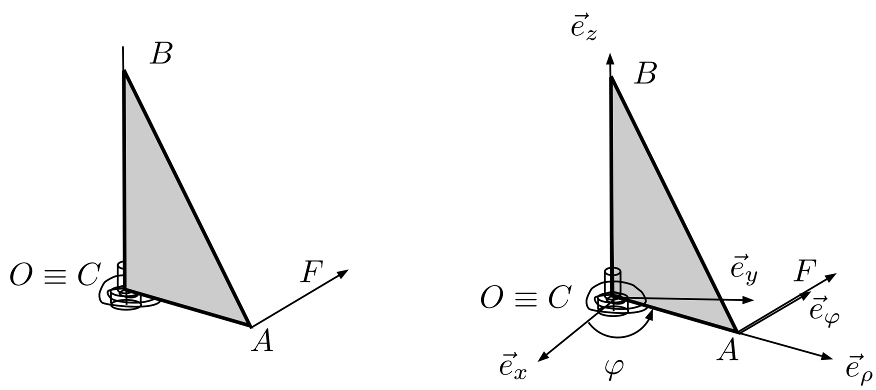
Trieste, 30 giugno 2015. (G. Tondo)

Si consideri una lamina omogenea di massa m, a forma di triangolo rettangolo, con i cateti di lunghezza a e b.

1) Si calcoli il baricentro G e il momento d'inerzia della lamina rispetto a una retta r passante per il vertice C e il punto medio D dell'ipotenusa.



La lamina suddetta è vincolato a ruotare, come in figura, attorno all'asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ passante per C, mediante una cerniera cilindrica fissa in $O \equiv C$. Sulla lamina agiscono: una molla *angolare* di richiamo posta in C e di costante elastica c, il peso proprio, una forza F applicata in A, sempre ortogonale alla lamina come in figura.



STATICA

Detto φ l'angolo tra il piano della lamina e il piano verticale fisso in cui la molla è a riposo, individuato dagli assi $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, determinare:

2) le (eventuali) configurazioni di equilibrio della lamina e la loro stabilità;

3) il risultante e il momento risultante delle reazioni vincolari sulla lamina in C, all'equilibrio.

DINAMICA

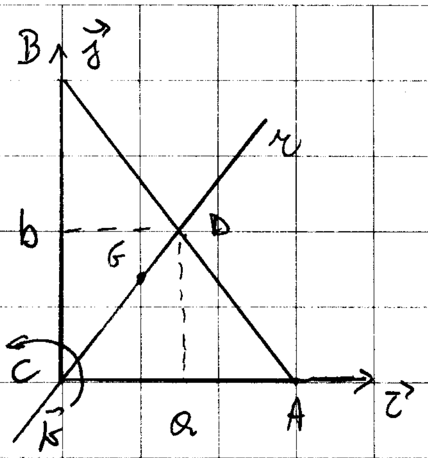
4) Scrivere un' equazione differenziale pura di moto e determinarne la soluzione particolare corrispondente alle condizioni iniziali

$$\varphi(0) = 0 \ , \qquad\qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \ ;$$

5) calcolare il risultante delle reazioni vincolari sulla lamina in C, durante il moto del punto 4) in funzione di φ;

6) calcolare il risultante del momento delle reazioni vincolari sulla lamina in C, durante il moto del punto 4) in funzione di φ.

1) Calcolo del baricentro G della lamina triangolare e del momento d'inerzia I_r.



Per il calcolo di G, ricordiamo che in una lamina omogenea, esso coincide con il baricentro geometrico e quindi divide le mediane (assi di simmetria obliqua, coniugati al lato diviso in due dalla mediana) in due parti una doppia dell'altra

$$\overline{CG} = 2\overline{GD}$$

Allora, considerando la terna di versori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avremo

$$D - C = \frac{1}{2}\left(a\,\vec{i} + b\,\vec{j}\right)$$

$$G - C = \frac{2}{3}\left(D - C\right) = \frac{1}{3}\left(a\,\vec{i} + b\,\vec{j}\right)$$

Calcoleremo il momento d'inerzia rs. a z tramite la formula:

$$I_z = \text{vers}(D-C) \cdot I_C \, \text{vers}(D-C)$$

A tale scopo, calcoliamo la matrice d'inerzia

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$$

rispetto alla terna di assi $(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$I_{11} = \int_R \rho(P) \left(x_2^2 + \cancel{x_3^2}\right) dS = \frac{2m}{ab} \int_0^a dx_1 \left(\int_0^{x_2(x_1)} x_2^2 \, dx_2 \right)$$

dove $x_2(x_1)$ è l'equazione cartesiana della retta passante per i punti A e B, cioè

$$x_2(x_1) = -\frac{b}{a} x_1 + b$$

Allora,

$$I_{11} = \frac{2m}{ab} \int_0^a dx_1 \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_0^{-\frac{b}{a}x_1 + b} = \frac{2m}{3ab} \int_0^a \left(-\frac{b}{a} x_1 + b \right)^3 dx_1$$

$$= \frac{2m}{3ab}\left[\frac{1}{4}\left(-\frac{b}{a}x_1+b\right)^4\left(-\frac{a}{b}\right)\right]_0^a = -\frac{m}{6\cancel{a}b}\frac{\cancel{a}}{b}\left(-b^4\right) = \boxed{\frac{1}{6}mb^2}$$

Analogamente, si trova che $I_{22} = \frac{1}{6}ma^2$. Inoltre,

$$I_{12} = -\int_{\mathcal{R}}\rho(P)\,x_1x_2\,dS = -\frac{2m}{ab}\int_0^a x_1\,dx_1\left(\int_0^{x_2(x_1)} x_2\,dx_2\right) =$$

$$= -\frac{2m}{ab}\int_0^a x_1\,dx_1\left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^{-\frac{b}{a}x_1+b} = -\frac{\cancel{2}m}{ab}\int_0^a \frac{x_1}{\cancel{2}}dx_1\left(-\frac{b}{a}x_1+b\right)^2 =$$

$$= -\frac{m}{ab}\int_0^a x_1\left(-\frac{b}{a}x_1+b\right)^2 dx_1 = \frac{-m}{ab}\int_0^a\left(+\frac{b^2}{a^2}x_1^3-\frac{2b^2}{a}x_1^2+b^2x_1\right)dx_1$$

$$= -\frac{m}{ab}\left[+\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1^4}{4}-\frac{2b^2}{a}\frac{x_1^3}{3}+b^2\frac{x_1^2}{2}\right]_0^a =$$

$$= -\frac{m}{ab}\left(+\frac{b^2}{\cancel{a^2}}\frac{a^{\cancel{4}\,2}}{4}-\frac{2b^2}{\cancel{a}}\frac{a^{\cancel{3}\,2}}{3}+\frac{b^2a^2}{2}\right) = -\frac{1}{12}mab$$

Dunque,

$$(4.1)\qquad I_C = m\begin{bmatrix} \frac{1}{6}b^2 & -\frac{1}{12}ab & 0 \\ -\frac{1}{12}ab & \frac{1}{6}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

$$\text{vers}(D-C) = \frac{\frac{1}{2}(a\vec{i}+b\vec{j})}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

quindi

$$I_r = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[a,b,0]\, m\begin{bmatrix} \frac{1}{6}b^2 & -\frac{1}{12}ab & 0 \\ -\frac{1}{12}ab & \frac{1}{6}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(a^2+b^2) \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{m}{a^2+b^2}[a,b,0]\begin{bmatrix} \frac{1}{6}ab^2-\frac{1}{12}ab^2 \\ -\frac{1}{12}a^2b+\frac{1}{6}a^2b \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{m}{a^2+b^2}[a,b,0]\begin{bmatrix} \frac{1}{12}ab^2 \\ \frac{1}{12}a^2b \end{bmatrix} = \frac{m}{a^2+b^2}\frac{a^2b^2}{6}$$

meeting

argomento / subject: Tema del 30/06/2015

data / date

Cinematica: $l = 1$, c.l $= \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$

Introduciamo le seguenti terne di versori

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: terna "fissa"

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: terna "intermedia"

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: terna "solidale

Le leggi di trasformazione tra le suddette terne sono

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{e}_\rho \\ \vec{j} = \vec{e}_z \\ \vec{k} = -\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

Poiché il moto della lamina è rotatorio intorno all'asse $(O, \vec{e}_z)$, la sua velocità angolare è

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z = \dot{\varphi}\, \vec{j}$$

Statica

La molla angolare di richiamo ha energia potenziale

$$V^{(molla)} = \frac{1}{2} c \varphi^2$$

Il carico follower $\vec{F}_A$ compie il lavoro virtuale

$$LV^{(foll)} = \vec{F}_A \cdot \delta \vec{x}_A$$

$$\vec{x}_A = a \vec{l}_\rho \Rightarrow \delta \vec{x}_A = a\, \delta \vec{l}_\rho = a\, \delta\varphi\, \vec{l}_\varphi$$

Quindi

$$LV^{(foll)} = F \vec{l}_\varphi \cdot a\, \delta\varphi\, \vec{l}_\varphi = F a\, \delta\varphi$$

Allora, la forza follower generalizzata

$$Q_\varphi^{(foll)} = F a$$

ammette energia potenziale pari a

$$V^{(foll)} = -\int F a\, d\varphi = -F a \varphi$$

Dunque, tutta la sollecitazione è conservativa con

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} c \varphi^2 - F a \varphi$$

meeting

argomento / subject
Tema del 30/06/2015

data / date

Gli equilibri sono i punti stazionari di V

(7.1) $V'(\varphi) = c\varphi - Fa = -Q_\varphi$

Quindi, l'eq. pura di equilibrio è

$$c\varphi - Fa = 0 \iff \varphi_e = \frac{Fa}{c}$$

Per determinare la stabilità di φ_e, calcoliamo la derivata seconda di V.

$V''(\varphi) = c > 0 \Rightarrow \varphi_e$ pto di minimo $\Rightarrow$ eq. stabile.

3) Reazioni vincolari in C all'equilibrio.

Sappiamo che una cerniera cilindrica fina e liscia esercita una reazione vincolare $\{\vec{\Phi}_c, \vec{\mu}_c\}$ con $\vec{\Phi}_c$ arbitraria e $\vec{\mu}_c$ giacente nel piano ortogonale all'asse della cerniera. Quindi, si possono scomporre come

$$\vec{\Phi}_c = \phi_\rho \vec{e}_\rho + \phi_\varphi \vec{e}_\varphi + \phi_z \vec{e}_z \,, \quad \vec{\mu} = \mu_\rho \vec{e}_\rho + \mu_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Le ECS si scrivono

$$\vec{R}^{att} + \vec{\phi}_c = \vec{0} \iff \vec{\phi}_c = -\vec{R}^{(att)} = -\left(-mg\vec{e}_r + F\vec{e}_\varphi\right)$$

$$\vec{M}_c^{att} + \vec{\mu} = 0 \qquad \vec{\mu} = -\vec{M}_c^{(att)} = -\left((G-C)\times m\vec{g} - (A-C)\times\vec{F} + c\varphi\vec{e}_r\right)$$

Dunque, all'equilibrio

$$\vec{\phi}_c = mg\vec{e}_r - F\vec{e}_{\varphi_e}$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{3}\left(a\vec{e}_\rho + b\vec{e}_r\right)\times mg\vec{e}_r - \left(a\vec{e}_\rho\times F\vec{e}_{\varphi_e}\right) + c\varphi\vec{e}_r$$

$$= \frac{mga}{3}\vec{e}_\rho\times\vec{e}_r + \cancel{\left(-Fa + c\varphi_e\right)\vec{e}_r}$$

$$= -\frac{mga}{3}\vec{e}_{\varphi_e} = \frac{mga}{3}\vec{K}$$

Dinamica

Sappiamo che l'eq. pura di moto di un rotore è

(9.1) $$I_z \ddot{\varphi} = Q_\varphi ,$$

dove I_z è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. In questo caso

(9.2) $$I_z = I_{22} = \frac{1}{6} m a^2 ,$$

quindi, per la (7.1) segue che

(9.3) $$\ddot{\varphi} = \frac{6}{m a^2}\left(Fa - c\varphi\right)$$

ovvero

(9.4) $$\ddot{\varphi} + \frac{6}{m a^2} c \varphi = \frac{6}{m a^2} F a .$$

L'integrale generale della 9.3) è dato dalla somma di quello dell'omogenea associata

$$\varphi(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{6c}{m a^2}}\, t + \alpha\right)$$

più una soluzione particolare della non omogenea, ad esempio la soluzione stazionaria

$$\varphi = \varphi_e = \frac{Fa}{c} .$$

Quindi,

$$\varphi(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{6c}{ma^2}}\, t + \alpha\right) + \frac{Fa}{c}$$

Imponendo le condizioni iniziali omogenee

$$\varphi(0) = 0 \,, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

si trova

$$\begin{cases} A \cos\alpha + \dfrac{Fa}{c} = 0 \\ -A\sqrt{\dfrac{6c}{ma^2}}\, \sin\alpha = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} A = -\dfrac{Fa}{c} \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Dunque, la soluzione del problema di Cauchy è

$$\varphi(t) = \frac{Fa}{c}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{6c}{ma^2}}\, t\right)$$

5) Risultante delle reazioni vincolari in C durante il moto in funzione di φ.

Dalla I ECD

(11.1) $$m\vec{g} + F\vec{e}_\varphi + \vec{\phi}'_C = m\vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (G-O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (G-O))$$

$$= \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \frac{1}{3}(a\vec{e}_\rho + \cancel{b\vec{e}_z}) + \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \left(\dot{\varphi}\vec{e}_z \times \frac{1}{3}(a\vec{e}_\rho + \cancel{b\vec{e}_z})\right)$$

$$= \frac{1}{3}a\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \left(\frac{1}{3}a\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho\right)$$

(11.2) $$= \frac{1}{3}a\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \frac{1}{3}a\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z \times (\vec{e}_\varphi)$$

$$= \frac{1}{3}a\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho\right)$$

Quindi

(11.3) $$\vec{\phi}'_C = mg\,\vec{e}_z - F\vec{e}_\varphi + \frac{m}{3}a\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho\right)$$

$$= mg\,\vec{e}_z + \left(\frac{m}{3}a\ddot{\varphi} - F\right)\vec{e}_\varphi - \frac{m}{3}a\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho$$

Ora dobbiamo ricavare

(11.4) $$\ddot{\varphi} = f(\varphi) \quad , \quad \dot{\varphi}^2 = g(\varphi)$$

e sostituirle nella (11.3).

A tale scopo, ricaviamo $\ddot{\varphi}$ dalla EL (9.3) e $\dot{\varphi}^2$ dalla conservazione dell'energia meccanica. Infatti, il rigido è una macchina semplice, a vincoli non dissipativi, bilateri, fissi e sollecitazione posizionale. Dunque, l'energia meccanica è un integrale primo di moto

(12.1) $$E = K + V = E_{|t=0}$$

L'energia cinetica K è data da

$$K = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\mathbb{I}_C(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot\mathbb{I}_C(\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_{Cz} = \frac{1}{12}ma^2\dot{\varphi}^2$$

Quindi

(12.2) $$\frac{1}{12}ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}c\varphi^2 - Fa\varphi = E_{|t=0} = 0$$

Dunque,

(12.3)* $$\dot{\varphi}^2 = \frac{12}{ma^2}\left(-\frac{c}{2}\varphi^2 + Fa\varphi\right) = \frac{6}{ma^2}\left(2Fa\varphi - c\varphi^2\right)$$

Allora, sostituendo la (12.2) e la (12.3) nella (11.3)

$$\vec{\Phi}'_C = mg\vec{e}_z + \left(\frac{m}{3}\cancel{a}\frac{6}{ma^2}(Fa - c\varphi) - F\right)\vec{e}_\varphi - \frac{ma}{3}\frac{6}{ma^2}\left(2Fa\varphi - c\varphi^2\right)\vec{e}_\rho$$

$$= mg\vec{e}_z + \left(F - \frac{2c\varphi}{a}\right)\vec{e}_\varphi - 2\varphi\left(2F - \frac{2c\varphi}{a}\right)\vec{e}_\rho$$

6) Risultante del momento delle reazioni vincolari in funzione di φ.

Dalla II ECD segue

$$\vec{M}_c^{(est,att)} + \vec{\mu}'_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \mathbb{I}_c(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_c(\vec{\omega})$$

$$\mathbb{I}_c(\vec{\omega}) = \mathbb{I}_c(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_c(\vec{j}) = m\dot{\varphi}\left(\frac{-1}{12}ab\,\vec{i} + \frac{1}{6}a^2\vec{j}\right)$$

$$\mathbb{I}_c(\vec{e}_z) = \mathbb{I}_c(\vec{j}) = m\left(-\frac{1}{12}ab\,\vec{i} + \frac{1}{6}a^2\vec{j}\right) = \frac{ma}{6}\left(\frac{b}{2}\vec{e}_\rho + a\,\vec{e}_z\right)$$

Quindi,

$$\mathbb{I}_c(\vec{\omega}) = \frac{m\dot{\varphi}a}{6}\left(-\frac{1}{2}b\,\vec{e}_\rho + a\,\vec{e}_z\right)$$

$$\mathbb{I}_c(\dot{\vec{\omega}}) = \mathbb{I}_c(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{m\ddot{\varphi}}{6}a\left(-\frac{1}{2}b\,\vec{e}_\rho + a\,\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{\omega} \times \mathbb{I}_c(\vec{\omega}) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \frac{ma}{6}\dot{\varphi}\left(-\frac{b}{2}\vec{e}_\rho + \cancel{a\,\vec{e}_z}\right)$$

$$= \frac{ma}{6}\dot{\varphi}^2\left(-\frac{b}{2}\right)\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho$$

$$= -\frac{mab}{12}\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \frac{ma}{6}\ddot{\varphi}\left(-\frac{b}{2}\vec{e}_\rho + a\,\vec{e}_z\right) - \frac{mab}{12}\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi$$

Allora

$$\vec{\mu}' = -\vec{M}_c^{(est,e\phi)} + \frac{d\vec{L}_c}{dt}$$

$$= -\frac{mga}{3}\vec{e}_\varphi - (Fa - c\varphi)\vec{e}_z +$$

$$+ \frac{ma}{6}\ddot{\varphi}\left(-\frac{b}{2}\vec{e}_\varphi + a\vec{e}_z\right) - \frac{mab}{12}\dot{\varphi}^2\vec{e}_\varphi$$

Sostituendo nella precedente eq. la (9.3) e la (12.3) si ottiene

$$\vec{\mu}' = -\frac{mga}{3}\vec{e}_\varphi - \cancel{(Fa - c\varphi)\vec{e}_z} +$$

$$+\frac{ma}{6}\frac{6}{ma^2}(Fa - c\varphi)\left(-\frac{b}{2}\vec{e}_\varphi + \cancel{a\vec{e}_z}\right) +$$

$$-\frac{mab}{12}\frac{6}{ma^2}(2Fa\varphi - c\varphi^2)\vec{e}_\varphi$$

$$= -\frac{b}{2a}(Fa - c\varphi)\vec{e}_\varphi - \left[\frac{mga}{3} + \frac{b}{2a}(2Fa\varphi - c\varphi^2)\right]\vec{e}_\varphi$$