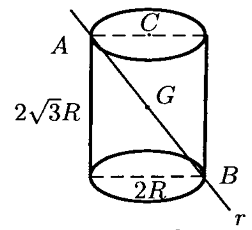
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

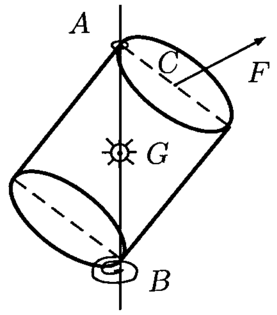
Trieste, 8 giugno 2015. (G. Tondo)

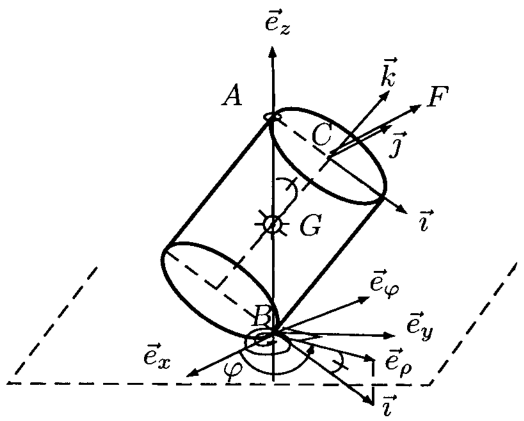
Si consideri un cilindro circolare retto, omogeneo, di massa m, raggio di base R e altezza $h = 2\sqrt{3}R$.

1) Si calcoli il momento d'inerzia del cilindro rispetto a una retta r passante per il baricentro G e per un punto qualsiasi, detto A, di una delle circonferenze di base.



Il cilindro suddetto è vincolato a ruotare, come in figura, attorno all'asse fisso verticale $(G, \vec{e}_z)$ passante per A, mediante una cerniera sferica in G e un collare sottile in A. Sul cilindro agiscono: una molla *angolare* posta in B e di costante elastica c, il peso proprio, una forza F applicata in C, appartenente al piano della base del cilindro e diretta ortogonalmente al diametro passante per A.





STATICA

Determinare:

2) le configurazioni di equilibrio del cilindro e la loro stabilità;

3) le reazioni vincolari sul cilindro in A e in G, all'equilibrio.

DINAMICA

4) Scrivere un' equazione differenziale pura di moto e determinarne la soluzione particolare corrispondente alle condizioni iniziali

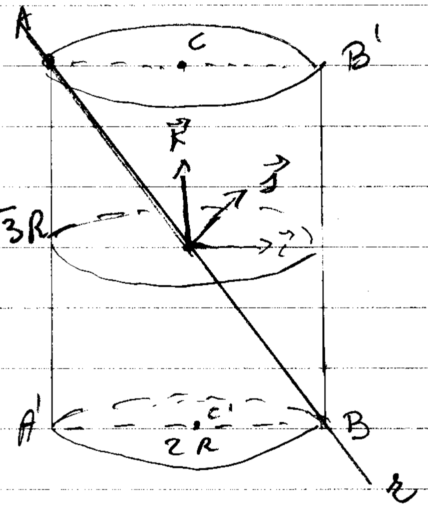
$$\varphi(0) = 0 \,, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \,;$$

5) calcolare le reazioni vincolari sul cilindro in A, durante il moto del punto 4) in funzione di φ;

6) calcolare le reazioni vincolari sul cilindro in G, durante il moto del punto 4) in funzione di φ.

Tema del 8/06/2015

1) Geometria delle masse



La retta r passante per G e per un qualsiasi punto A di una delle circonferenze di base, passa anche per il punto B, appartenente al diametro A'C' parallelo a quello per A.

Poichè $G \in r$, prendiamo una terna principale centrale $(G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e calcoliamo la matrice d'inerzia.

$$[I_G] = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}$$

dove gli elementi

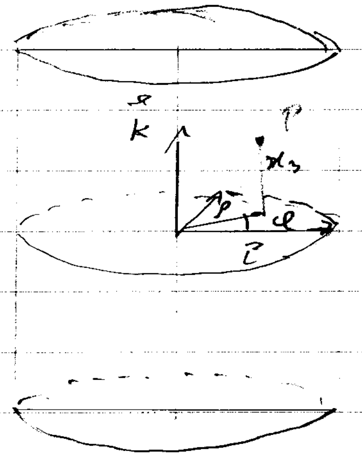
$$I_{11} = \sigma \int_B (x_2^2 + x_3^2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \equiv I_{22}$$

$$I_{33} = \sigma \int_B (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

sono i momenti d'inerzia del cilindro rispetto agli assi principali $(G, \vec{i})$, $(G, \vec{j})$, $(G, \vec{k})$, rispettivamente, e σ è la densità di massa, poi è

$$\sigma = \frac{M}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h} = \frac{m}{\pi R^3\, 2\sqrt{3}}$$

Per il calcolo degli integrali di volume, conviene usare coordinate adattate al problema, cioè coordinate cilindriche legate alle coordinate cartesiane (O, x_1, x_2, x_3) dalla trasformazione



$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ x_2 = \rho \sin\varphi & \rho > 0 \\ x_3 = x_3 & x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La matrice Jacobiana è

$$[J] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[J] = \rho$$

Quindi

$$I_{11} = \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(\rho^2 \sin^2\varphi + x_3^2\right) \rho \, d\rho$$

$$= \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^R \rho^3 \sin^2\varphi \, d\rho + \int_0^R \rho x_3^2 \, d\rho \right)$$

$$= \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx_3 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho + \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 \, dx_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \, d\rho$$

Poiché

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx_3 = h$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\Big[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\pi = \pi$$

$$\int_0^R \rho^3 \, d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 \, dx_3 = \left[\frac{x_3^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{3}\, 2\, \frac{h^3}{8} = \frac{h^3}{12}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad , \quad \int_0^R \rho \, d\rho = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R = \frac{R^2}{2} \, ,$$

segue che

$$I_{11} = \sigma\left(h\pi\frac{R^4}{4} + \frac{h^3}{12}\,\cancel{2}\pi\frac{R^2}{\cancel{2}}\right) = \frac{m}{\cancel{\pi R^2 h}}\left(\cancel{\pi}\,\cancel{h}\,\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{4} + \cancel{\pi}\,\frac{h^{\cancel{3}\,2}\cancel{R^2}}{12}\right)$$

$$= m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{\cancel{12}\,R^2}{\cancel{12}}\right) = \frac{5}{4} m R^2 = I_{22}$$

(4.1)

$$I_{33} = \sigma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \rho \, d\rho = \sigma\left(h\, 2\pi \frac{R^4}{4}\right) = \sigma \pi h \frac{R^4}{2} =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 \cancel{h}} \pi \cancel{h} \frac{R^{\cancel{4}2}}{2} = m\frac{R^2}{2}$$

Dunque,

(4.2)

$$[I_G] = m \begin{bmatrix} \frac{5}{4}R^2 & & \\ & \frac{5}{4}R^2 & \\ & & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix},$$

(4.3) $$\mathrm{vers}(A-G) = \frac{A-G}{|A-G|} = \left(-R\,\vec{i} + \sqrt{3}R\,\vec{k}\right)\frac{1}{2R} = \frac{1}{2}\left(-\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{k}\right)$$

Quindi, il momento d'inerzia I_r è pari a

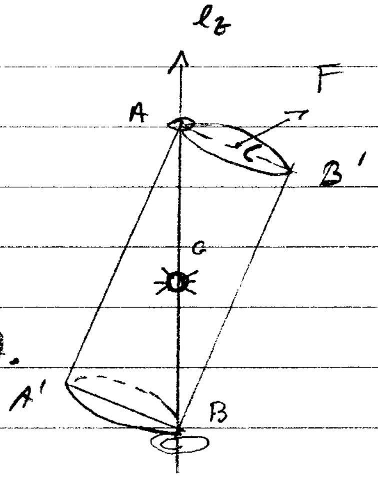
(4.4)

$$I_r = \mathrm{vers}(A-G) \cdot I_G\left(\mathrm{vers}(A-G)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1, & 0, & \sqrt{3} \end{bmatrix} mR^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & & \\ & \frac{5}{4} & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{mR^2}{4}\begin{bmatrix} -1, & 0, & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \frac{mR^2}{4}\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{11}{16} mR^2$$

Cinematica



Il cilindro è vincolato ad avere 2 punti fissi (e quindi un asse): il baricentro G e un punto della circonferenza di base, che chiamiamo A. Naturalmente, l'asse per A e G, passa per il punto della circonferenza della base opposta ad A, punto che sta sul diametro parallelo ad AC.

(macchina semplice)

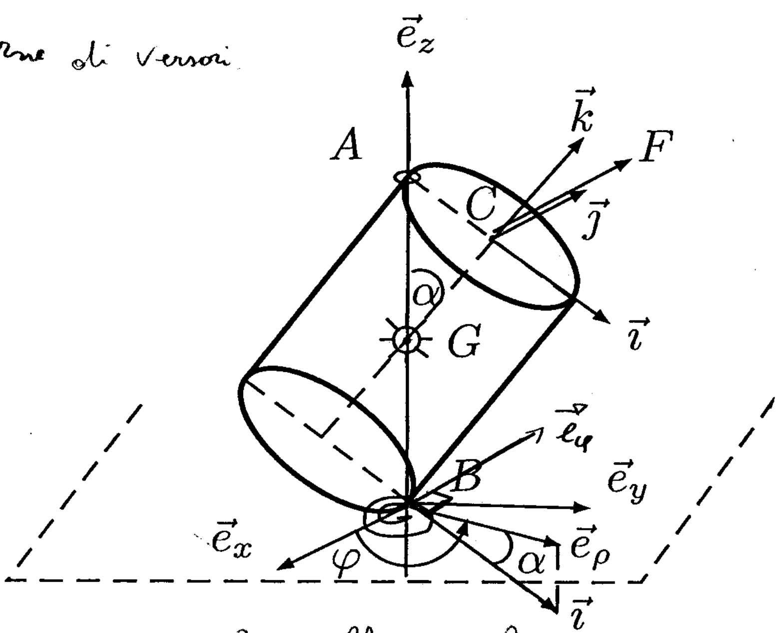
Dunque, il cilindro ha 1 g.d.l e come coordinata libera prendiamo l'angolo di rotazione φ ($\varphi \in \mathbb{R}$) misurato tra 2 piani, uno fisso e uno solidale al cilindro, che fisseremo qui sotto.

Consideriamo le seguenti terne di versori

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: terna "fissa"

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: terna "intermedia"

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: terna "solidale"



Il versore $\vec{e}_z$ è preso parallelo a un asse verticale ed $\vec{e}_x$ in modo che per $\varphi = 0$ la molla angolare sia a riposo; $\vec{k}$ è parallelo all'asse di simmetria del cilindro, $\vec{i}$ è parallelo al diametro AC e $\vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}$; $\vec{e}_\rho$ è scelto parallelo all'intersezione del piano (verticale) passante per gli assi $(B; \vec{e}_z)$, $(B; \vec{i})$ e il piano orizzontale per B. L'angolo di rotazione φ sarà quello compreso tra l'asse fisso $(B, \vec{e}_x)$ e l'asse solidale $(B, \vec{e}_\rho)$ ed $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho$.

Ricaviamo le leggi di trasformazione tra le suddette terne e le loro inverse.

$$
(6.1)\quad
\begin{aligned}
\vec{e}_\rho &= \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \qquad & \vec{e}_x &= \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\
\vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \qquad & \vec{e}_y &= \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\
\vec{e}_z &= \vec{e}_z \qquad & \vec{e}_z &= \vec{e}_z
\end{aligned}
$$

$$
(6.2)\quad
\begin{aligned}
\vec{i} &= \cos\alpha\, \vec{e}_\rho - \sin\alpha\, \vec{e}_z = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \vec{e}_\rho - \frac{1}{2}\, \vec{e}_z \\
\vec{j} &= \vec{k} \times \vec{i} = (\cos\alpha\, \vec{e}_z + \sin\alpha\, \vec{e}_\rho) \times (\cos\alpha\, \vec{e}_\rho - \sin\alpha\, \vec{e}_z) = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\, \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \\
\vec{k} &= \cos\alpha\, \vec{e}_z + \sin\alpha\, \vec{e}_\rho = \frac{1}{2}\, \vec{e}_\rho + \frac{\sqrt{3}}{2}\, \vec{e}_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_\rho &= \cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{k} \qquad & \sin\alpha &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \\
\vec{e}_\varphi &= \vec{j} \\
\vec{e}_z &= -\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{k} \qquad & \cos\alpha &= \frac{\overline{GC}}{\overline{AG}} = \frac{\sqrt{3}\,R}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Componendo le (6.1) con le (6.2) si trova

$$
(6.3)\quad
\begin{aligned}
\vec{i} &= \cos\alpha(\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y) - \sin\alpha\, \vec{e}_z = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\, \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\, \vec{e}_y - \frac{1}{2}\, \vec{e}_z \\
\vec{j} &= -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\
\vec{k} &= \sin\alpha(\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y) + \cos\alpha\, \vec{e}_z = \frac{1}{2}\cos\varphi\, \vec{e}_x + \frac{1}{2}\sin\varphi\, \vec{e}_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\, \vec{e}_z
\end{aligned}
$$

e le sue inverse

$$
(6.4)\quad
\begin{aligned}
\vec{e}_x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\, \vec{i} - \sin\varphi\, \vec{j} + \frac{1}{2}\cos\varphi\, \vec{k} \\
\vec{e}_y &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j} + \frac{1}{2}\sin\varphi\, \vec{k} \\
\vec{e}_z &= -\frac{1}{2}\, \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, \vec{k}
\end{aligned}
$$

Statica

I vincoli sono olonomi, non dissipativi, bilateri e fissi. Scriviamo l'equazione pura di equilibrio

(7.1) $Q_\varphi^{(att)} = 0$

A tale scopo, calcoliamo il lavoro virtuale della sollecitazione attiva

$$LV^{(att)} = \vec{R}^{(att)} \cdot \delta \vec{x}_G + \vec{M}_G^{(att)} \cdot \vec{\varepsilon}$$

Poiché $\delta \vec{x}_G = \vec{0}$ ed $\vec{\varepsilon} = \delta\varphi \, \vec{e}_z$

$$LV^{(att)} = \vec{M}_G^{(att)} \cdot \delta\varphi \, \vec{e}_z = Q_\varphi^{(att)} \delta\varphi$$

Allora

(7.2) $Q_\varphi^{(att)} = \vec{M}_G^{(att)} \cdot \vec{e}_z$

è il momento assiale della sollecitazione attiva lungo l'asse di rotazione.

Quindi

$$\vec{M}_G^{(att)} = \vec{M}_G^{(anello)} + (C-G) \times \vec{F}_C + \cancel{(G-G)} \times m\vec{g}$$

(7.3) $$= -c\,\varphi\,\vec{e}_z + \sqrt{3}R\,\vec{K} \times F\vec{J} = -c\,\varphi\,\vec{e}_z - F\sqrt{3}R\,\vec{I} =$$

$$= -c\varphi\,\vec{e}_z - F\sqrt{3}R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{e}_\xi - \frac{1}{2}\,\vec{e}_z\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}FR\,\vec{e}_\xi + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}FR - c\varphi\right)\vec{e}_z$$

Dunque, l'eq puro di equilibrio è

$$(7.4) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} F R - c\varphi = 0$$

che ammette l'unica soluzione

$$(7.5) \quad \varphi_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{F R}{c} .$$

Essendo il modello una macchina semplice, la sollecitazione attiva, che è posizionale, è anche conservativa, cioè ammette energia potenziale data da

$$(7.6) \quad V(\varphi) = -\int Q(\varphi)\, d\varphi = -\int \left(\frac{\sqrt{3}}{2} F R - c\varphi \right) d\varphi = = \frac{1}{2} c \varphi^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} F R \varphi$$

Calcoliamo la derivata seconda all'equilibrio φ_e

$$V'(\varphi) = -Q_\varphi = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} F R - c\varphi \right)$$

$$V''(\varphi) = c \Rightarrow V''(\varphi_e) = c > 0 \Rightarrow \min \Rightarrow \text{stabilità}$$

Dunque l'unica configurazione di equilibrio (7.5) è stabile.

3) Reazioni vincolari all'equilibrio in A e in G

Il collare sottile in A esercita una reazione sul cilindro, posta nel piano orizzontale:

(8.2) $\vec{\Psi}_A = \Psi_\rho \vec{e}_\rho + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi$,

mentre la cerniera fissa in G una reazione di direzione, a priori, arbitraria

(8.3) $\vec{\Phi}_G = \phi_\rho \vec{e}_\rho + \phi_\varphi \vec{e}_\varphi + \phi_z \vec{e}_z$

Quindi, dobbiamo trovare 5 incognite $(\Psi_\rho, \Psi_\varphi, \phi_\rho, \phi_\varphi, \phi_z)$.
A tale scopo, scriviamo le ECS

(8.4) $\vec{R}^{\,est,att} + \vec{R}^{\,est,reatt} = \vec{0}$ $\qquad m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{\Psi}_A + \vec{\Phi}_G = \vec{0}$

(8.5) $\vec{M}_G^{\,est,att} + \vec{M}_G^{\,est,reatt} = \vec{0}$ $\qquad \vec{M}_G^{\,est,at} + (A-G)\times\vec{\Psi}_A = \vec{0}$

Possiamo risolvere la (8.5) rispetto a $\vec{\Psi}_A$ e poi sostituire il risultato nella (8.4) per trovare $\vec{\Phi}_G$.
Allora,

(8.6) $\vec{\Psi}_A \times (A-G) = \vec{M}_G^{\,est,at} \Leftarrow \vec{\Psi}_A = \dfrac{A-G}{|A-G|^2} \times \vec{M}_G^{\,est,at}$

Quindi

$$\vec{\Psi}_A = \frac{2R}{2\cdot 4R^2}\,\vec{e}_z \times \left(-\frac{3}{2}FR\,\vec{e}_\xi + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}FR - c\,\varphi_e\right)\cancel{\vec{e}_z}\right)$$

(9.1)
$$= -\frac{3}{4}F\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\xi = -\frac{3}{4}F\,\vec{e}_\varphi(\varphi_e)$$

Dalle (8.4) segue che

$$\vec{\phi}_G = -\vec{\Psi}_A - m\vec{g} - \vec{F}_c = \frac{3}{4}F\,\vec{e}_\varphi + mg\,\vec{e}_z - F\,\vec{e}_\varphi$$

$$= -\frac{F}{4}\,\vec{e}_\varphi(\varphi_e) + mg\,\vec{e}_z$$

Le stesse reazioni, proiettate lungo la terna fissa $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sono

$$\vec{\Psi}_A = -\frac{3}{4}F\left(-\sin\varphi_e\,\vec{e}_x + \cos\varphi_e\,\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{\phi}_G = -\frac{F}{4}\left(-\sin\varphi_e\,\vec{e}_x + \cos\varphi_e\,\vec{e}_y\right) + mg\,\vec{e}_z\,,$$

mentre, proiettate lungo la terna solidale, si scrivono

$$\vec{\Psi}_A = -\frac{3}{4}F\,\vec{j}$$

$$\vec{\phi}_G = -\frac{F}{4}\,\vec{j} + mg\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right)$$

Dinamica

1) Scriviamo l'eq di Lagrange associata a φ.
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del rigido. Poichè ha un asse fisso,

$$(10.1)\quad K = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_G(\dot{\varphi}\,\vec{e}_2) = $$
$$= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_2\cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2)$$

Lo scalare $\vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2)$ è il momento d'inerzia del cilindro rs. all'asse di rotazione per G e A, quindi

$$(10.2)\quad \vec{e}_2\cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_2) = I_2 \overset{(4.4)}{=} \frac{11}{16}\, m R^2$$

Dunque

$$(10.3)\quad K = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{16} m R^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{11}{16} m R^2 \dot{\varphi}\,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{11}{16} m R^2 \ddot{\varphi}$$

Perciò

$$EL_\varphi \qquad \frac{11}{16} m R^2 \ddot{\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} FR - c\varphi$$

ovvero

$$(10.4)\quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{16}{11}\frac{c}{mR^2}\,\varphi = \frac{8}{11}\frac{\sqrt{3}}{mR}\,F}$$

La (10.4) è una EDO lineare a coefficienti costanti. Il suo integrale generale è la somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare della (10.4). L'omogenea associata

(11.1) $$\ddot{\varphi} + \frac{16}{11}\frac{c}{mR^2}\varphi = 0$$

è l'eq. di un oscillatore armonico di pulsazione

(11.2) $$\nu = \sqrt{\frac{16}{11}\frac{c}{mR^2}}$$

quindi ammette l'integrale generale

(11.3) $$\varphi(t) = A\cos(\nu t + \beta) \qquad A, \beta \in \mathbb{R}$$

La soluzione particolare più semplice della (10.4) è quella stazionaria, data dalla (8.1). Dunque, l'integrale generale della (10.4) può essere scritto come

(11.4) $$\varphi(t) = A\cos(\nu t + \beta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{FR}{c}$$

Imponiamo le condizioni iniziali $\varphi(0)=0$ $\dot{\varphi}(0)=0$. Allora, le costanti A e β devono soddisfare il sistema

(11.5) $$\begin{cases} A\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{FR}{c} = 0 \\ A\nu\sin\beta = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} A = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{FR}{c} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Dunque, la soluzione particolare cercata è:

(11.6) $$\varphi(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{FR}{c}\left(1 - \cos\nu t\right)$$

5) Reazioni vincolari in A durante il moto in funzione di φ

Scriviamo la II E.CS con polo in G, in modo da eliminare il contributo di $\vec{\Phi}_G'$.

$$\vec{M}_G^{(est)} + (A-G) \times \vec{\varphi}_A' = \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

cioè

$$\vec{\varphi}_A' \times (A-G) = \vec{M}_G^{(est)} - \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

Dunque,

$$\vec{\varphi}_A' = \frac{(A-G)}{|A-G|^2} \times \left(\vec{M}_G^{(est)} - \frac{d\vec{L}_G}{dt} \right) = \frac{A-G \times \vec{M}_G^{(est)}}{|A-G|^2} - \frac{A-G}{|A-G|^2} \times \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

Poiché $\vec{L}_G = \mathbb{I}_G(\vec{\omega})$ $\qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z = \dot{\varphi}\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right)$

$$\left.\frac{d\vec{L}_G}{dt}\right|_{\text{spazio}} = \mathbb{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_G(\vec{\omega}) \quad , \quad \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$\mathbb{I}_G(\vec{e}_z) = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]\, mR^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & & \\ & \frac{5}{4} & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]\, mR^2 \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} = \frac{mR^2}{4}\left(-\frac{5}{2}\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{k}\right)$$

N.B. Il vettore $\mathbb{I}_G(\vec{e}_z)$ NON è parallelo a $\vec{e}_z$, poiché $(G, \vec{e}_z)$ NON è API(G).

Quindi,

(13.1) $$\mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \mathbb{I}_G(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_G(\vec{e}_z) = \dot{\varphi}\,\frac{mR^2}{4}\left(-\frac{5}{2}\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{k}\right)$$

(13.2) $$\mathbb{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) = \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \ddot{\varphi}\,\mathbb{I}_G(\vec{e}_z) = \ddot{\varphi}\,\frac{mR^2}{4}\left(-\frac{5}{2}\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{k}\right)$$
$$\overset{(6.2)}{=} \frac{mR^2}{4}\,\ddot{\varphi}\left[-\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_\rho - \frac{1}{2}\vec{e}_z\right) + \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\vec{e}_\rho + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_z\right)\right] = \frac{mR^2}{4}\ddot{\varphi}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{e}_\rho + \frac{11}{4}\vec{e}_z\right)$$

(13.3) $$\vec{\omega}\times\mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \dot{\varphi}\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right)\times\dot{\varphi}\,\frac{mR^2}{4}\left(-\frac{5}{2}\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{k}\right) =$$
$$= \frac{mR^2}{4}\dot{\varphi}^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i}\times\vec{k} - \frac{5\sqrt{3}}{4}\,\vec{k}\times\vec{i}\right)$$
$$= \frac{mR^2}{4}\dot{\varphi}^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)\vec{j}$$
$$= -\frac{3\sqrt{3}}{16}\,mR^2\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi$$

Allora,

(13.4) $$\mathbb{I}_G(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times\mathbb{I}_G(\vec{\omega}) = \frac{mR^2}{4}\ddot{\varphi}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{e}_\rho + \frac{11}{4}\vec{e}_z\right) - \frac{3\sqrt{3}}{16}mR^2\dot{\varphi}^2\vec{e}_\varphi$$

Dunque,

$$\Psi'_A \overset{(13.1)}{=} -\frac{3}{4}F\vec{e}_\varphi - \frac{2R}{4R^2}\vec{e}_z\times\frac{mR^2}{16}\left[-\ddot{\varphi}\,3\sqrt{3}\,\vec{e}_\rho + \ddot{\varphi}\,11\,\vec{e}_z - 3\sqrt{3}\,\dot{\varphi}^2\vec{e}_\varphi\right]$$

(13.5) $$= -\frac{3}{4}F\vec{e}_\varphi - \frac{mR}{32}\left[-3\sqrt{3}\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho - 3\sqrt{3}\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi\right]$$

$$= \left(-\frac{3}{4}F + \frac{3\sqrt{3}}{32}mR\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi - \frac{3\sqrt{3}}{32}mR\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho$$

Per esprimere la (13.5) in funzione della sola coordinata φ, osserviamo che, essendo il modello una macchina semplice con vincoli non dissipativi, bilateri, fissi e sollecitazione posizionale, la sua energia meccanica è un integrale primo di moto. Quindi, vale

(14.1) $E = K + V = E_{|t=0}$

In particolare,

(14.2) $E \overset{(10.3),(7.6)}{=} \frac{11}{32} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} c \varphi^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} F \varphi$

e inoltre, le condizioni iniziali $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ implicano

(14.3) $E_{|t=0} = 0$

Allora, durante il moto suddetto

(14.4) $\frac{11}{32} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} c \varphi^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} F R \varphi = 0$,

cioè

(14.5) $\dot{\varphi}^2 = \frac{16}{11 m R^2} \left(\sqrt{3} F R \varphi - c \varphi^2 \right) = f(\varphi)$

Inoltre, dalla EL (10.4) ricaviamo

(14.6) $\ddot{\varphi} = -\frac{16}{11} \frac{c}{m R^2} \varphi + \frac{8\sqrt{3}}{11 m R} F = g(\varphi)$

Dunque, sostituendo la (14.5) e la (14.6) nella (13.3) si ottiene

$$\vec{\Psi}'_A = \left(-\frac{3}{4}F + \frac{3\sqrt{3}}{32}mR\left(-\frac{16}{11}\frac{c}{mR^2}\varphi + \frac{8\sqrt{3}}{11\,mR}F\right)\right)\vec{e}_\varphi$$

$$- \frac{3\sqrt{3}}{2\,\cancel{32}}\frac{\cancel{mR}\,\cancel{16}}{11\,\cancel{m}R^2}\left(\sqrt{3}\,FR\varphi - c\varphi^2\right)\vec{e}_\xi$$

$$(15.1) \quad = -\left(\frac{6}{11}F + \frac{3\sqrt{3}}{22}\frac{c\varphi}{R}\right)\vec{e}_\varphi - \frac{3\sqrt{3}}{22}\left(\sqrt{3}\,F\varphi - \frac{c\varphi^2}{R}\right)\vec{e}_\xi$$

6) Reazione vincolare in G durante il moto in funzione di φ

Dalla I ECD, si ottiene

$$\vec{R}^{(est)} + \vec{\Phi}'_G + \vec{\Psi}'_A = m\,\cancel{\vec{a}_G}$$

Quindi

$$\vec{\Phi}'_G = -\vec{\Psi}'_A - \vec{R}^{(est)}$$

$$\stackrel{(15.1)}{=} +\left(\frac{6}{11}F + \frac{3\sqrt{3}}{22}\frac{c\varphi}{R}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{3\sqrt{3}}{22}\left(\sqrt{3}\,F\varphi - \frac{c\varphi^2}{R}\right)\vec{e}_\xi +$$

$$+ mg\,\vec{e}_z - F\,\vec{e}_\varphi =$$

$$= \left(-\frac{5}{11}F + \frac{3\sqrt{3}}{22}\frac{c\varphi}{R}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{3\sqrt{3}}{22}\left(\sqrt{3}\,F\varphi - \frac{c\varphi^2}{R}\right)\vec{e}_\xi + mg\,\vec{e}_z$$