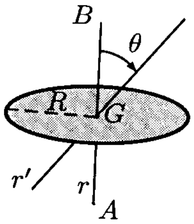
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

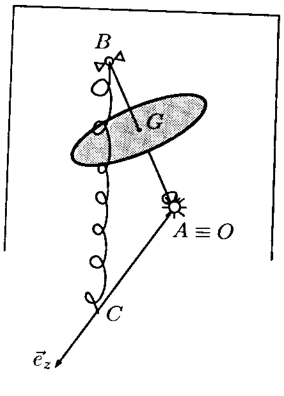
Trieste, 10 gennaio 2017. (G. Tondo)

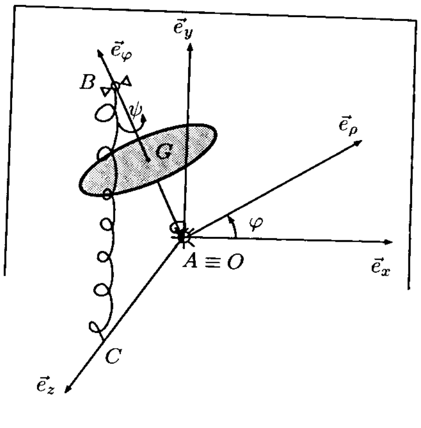
Si consideri il corpo rigido della figura, costituito da un disco *omogeneo* di massa m e raggio R, sul quale è saldato un asse r ortogonale, di massa *trascurabile*, passante per il centro G e di estremi A, B, con $\overline{AG} = \overline{BG} = d$.

1) Si calcoli il momento d'inerzia del rigido rispetto ad un asse r' passante per G e inclinato di un angolo θ rispetto all'asse r.



Il rigido suddetto è vincolato, come in figura, con una cerniera sferica in A ad un punto fisso O e con un appoggio liscio bilatero in B ad un piano verticale passante per O. Sul rigido agisce il peso proprio, la forza di richiamo di una molla lineare, di costante elastica c, fissata nei punti B e C, $\overline{OC} = 2d$, la forza di richiamo di una molla angolare, di costante elastica b, fissata nel punto A.





STATICA

Detto φ l'angolo tra il versore $\vec{e}_y$ e l'asse r e ψ l'angolo di rotazione del disco, misurato a partire dalla posizione in cui la molla angolare è a riposo, determinare:

2) le configurazioni di equilibrio del modello $\vec{q}_e = (\varphi_e, \psi_e)$ e la loro stabilità;

3) le reazioni vincolari esterne sull'asse r in A e in B, all'equilibrio.

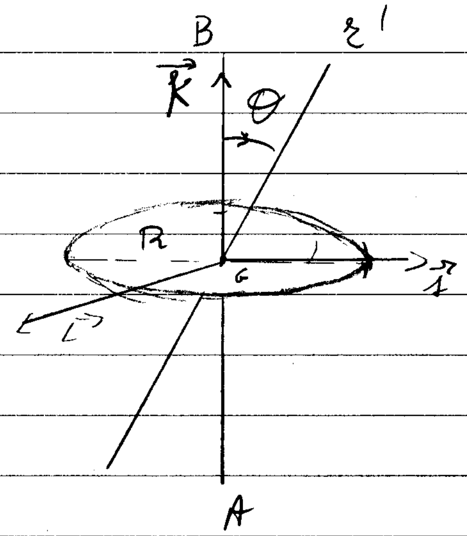
DINAMICA

4) Scrivere le equazione differenziali pure di moto;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) calcolare la reazione vincolare esterne sui punti A e B, durante il moto.

Tema del 10/01/2018



1) Utilizziamo la formula

$$I_{r'} = vers(r') \cdot I_G(vers(r')) \qquad G \in r'$$

Calcoliamo la matrice di I_G, rispetto alla terna $\mathcal{B}_s = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ con

$\vec{j} \in$ piano(r, r') e $\vec{k} \parallel r$. Quindi

$$I_G^{\mathcal{B}_s} = \begin{bmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{bmatrix}, \text{ dove } \quad A = \frac{mR^2}{4}, \; C = 2A = \frac{mR^2}{2}$$

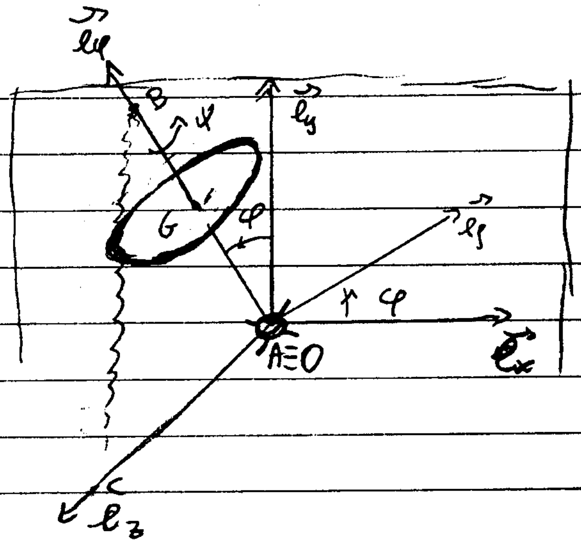
$$vers(r') = \sin\theta \, \vec{j} + \cos\theta \, \vec{k}$$

Dunque

$$I_{r'} = [0, \sin\theta, \cos\theta] \begin{bmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = [0, \sin\theta, \cos\theta] \begin{bmatrix} 0 \\ A\sin\theta \\ C\cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= A\sin^2\theta + C\cos^2\theta = A(\sin^2\theta + 2\cos^2\theta) = A(1+\cos^2\theta) =$$

$$= \frac{mR^2}{4}(1+\cos^2\theta)$$



Cinematica

Il rigido $\mathcal{R}$ ha 2 g.l, come si può dedurre dal metodo dei congelamenti successivi. Infatti, l'asse AB, fisso in O può ruotare nel piano $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ intorno all'asse $\vec{e}_z$. Congelando tale rotazione, rimane libera la rotazione del disco intorno al suo asse. Congelando anche questa, il rigido è congelato. Si può arrivare alla stessa conclusione con il metodo del bilancio. Il rigido ha un punto fisso, A, quindi 3 g.l.. Il vincolo di appoggio di B nel piano $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ è un vincolo semplice. Quindi

$$l = g - v = 3 - 1 = 2 \quad \text{Coord. libere} = \{(\varphi, \psi)\}$$

Consideremo le seguenti basi: $\qquad 0 \le \varphi < 2\pi$

$\mathcal{B}_{f} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: base "fissa" $\qquad \psi \in \mathbb{R}$

$\mathcal{B}_i = (\vec{e}_\xi, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: base "intermedia", $\vec{\omega}^{(t_2)} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$

$\mathcal{B}_s = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: base "solidale" a $\mathcal{R}$, $\vec{\omega}^{(rel)} = \dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi$

$$\begin{cases} \vec{e}_\xi = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\,\vec{e}_\xi - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\,\vec{e}_\xi + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\dot{\vec{e}}_\xi = \vec{\omega}^{(t_2)} \times \vec{e}_\xi = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\xi = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \quad , \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = \vec{\omega}^{(t_2)} \times \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\xi$$

$$B-O = 2d\,\vec{e}_\varphi = 2d(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)$$

$$G-O = d\,\vec{e}_\varphi = d(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)$$

$$B-C = (B-O)+(O-C) = 2d\,\vec{e}_\varphi - 2d\,\vec{e}_z = 2d(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_z)$$

$$\overset{!}{=} 2d(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y - \vec{e}_z)$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\psi}(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)$$

Statica

2) La sollecitazione, dovuta al peso proprio e alle molle, è conservativa. Quindi, ammette energia potenziale

$$V(\varphi,\psi) = -m\vec{g}\cdot(G-O) + \frac{1}{2}c\,\overline{BC}^2 + \frac{1}{2}b\psi^2$$

$$\overline{BC}^2 = (B-C)\cdot(B-C) = 4d^2(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_z)\cdot(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_z) = 4d^2\cdot 2 = 8d^2$$

Dunque,

$$V = mg\,\vec{e}_y\cdot d\,\vec{e}_\varphi \cancel{+\frac{1}{2}c(8d^2)} + \frac{1}{2}b\psi^2$$

Trascurando il termine costante, si trova

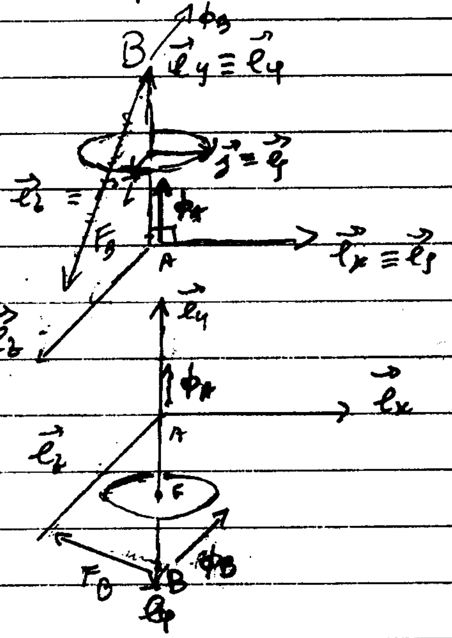
$$V(\varphi,\psi) = mgd\cos\varphi + \frac{1}{2}b\psi^2$$

Cerchiamo i punti stazionari della funzione V.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = -mgd\sin\varphi = -Q_\varphi \\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial \psi} = b\psi = -Q_\psi \end{cases}$$

Dunque, i punti stazionari $\Leftrightarrow$ equilibri del modello sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} mgd\sin\varphi = 0 \\ b\psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi = \pi \\ \psi = 0 \end{cases}$$



cioè

$$\vec{q}_e^{\,(1)} = (0,0)$$

$$\vec{q}_e^{\,(2)} = (\pi,0)$$

Stabilità

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -mgd\cos\varphi, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \psi \partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = b$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -mgd\cos\varphi & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathcal{H}_{11} &= -mgd\cos\varphi \\ \det\mathcal{H} &= b\,\mathcal{H}_{11} \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{11}\big|_{\vec{q}_e^{\,(1)}} < 0$, $\det\mathcal{H} < 0 \Rightarrow \vec{q}_e^{\,(1)}$ è una sella $\Rightarrow$ instabile

$\mathcal{H}_{11}\big|_{\vec{q}_e^{\,(2)}} > 0$, $\det\mathcal{H} > 0 \Rightarrow \vec{q}_e^{\,(2)}$ è pto di minimo $\Rightarrow$ stabile

3) Reazioni esterne in A e B, all'equilibrio: $\mathcal{L}^{(v)} = \{(A, \vec{\phi}_A), (B, \vec{\phi}_B = \phi\,\vec{e}_z)\}$

Sappiamo che nelle configurazioni di equilibrio le ECS sono necessariamente soddisfatte. Quindi, all'equilibrio

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi}_A + \vec{\phi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_O^{(est,att)} + (B-O)\times\vec{\phi}_B = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{R}^{(est,att)} = m\vec{g} + \vec{F}_B^{(molla)} = -mg\,\vec{e}_y - c(B-C) = -mg\,\vec{e}_y - 2cd(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_z)$$

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = (G-O)\times m\vec{g} + (B-O)\times\vec{F}_B^{(molla)} - b\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$= d\,\vec{e}_\varphi \times -mg\,\vec{e}_y + 2d\,\vec{e}_\varphi\times\left[-2cd\left(\cancel{\vec{e}_\varphi} - \vec{e}_z\right)\right] - b\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$= mgd\sin\varphi\,\vec{e}_z - b\varphi\,\vec{e}_\varphi + 4cd^2\,\vec{e}_\rho$$

$$(B-O)\times\vec{\phi}_B = 2d\,\vec{e}_\varphi \times \phi\,\vec{e}_z = 2d\phi\,\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z = 2d\phi\,\vec{e}_\rho$$

Nelle configurazione di eq. $\vec{q}_e^{(1)}$:

$$\vec{R}^{(est,att)}_{|\vec{q}_e^{(1)}} = -mg\,\vec{e}_y - 2cd(\vec{e}_y - \vec{e}_z) = -(mg+2cd)\,\vec{e}_y + 2cd\,\vec{e}_z$$

$$\vec{M}^{(est,att)}_{|\vec{q}_e^{(1)}} = 4cd^2\,\vec{e}_x$$

$$(B-O)\times\vec{\phi}_B{}_{|\vec{q}_e^{(1)}} = 2d\phi\,\vec{e}_x$$

$$\begin{cases} -(mg+2cd)\,\vec{e}_y + 2cd\,\vec{e}_z + \phi\,\vec{e}_z = -\vec{\phi}_A \Rightarrow \vec{\phi}_A = \dots \\ 4cd^2\,\vec{e}_x + 2d\phi\,\vec{e}_x = 0 \qquad \Rightarrow \phi = -2cd \end{cases}$$

Dunque, in $\vec{q_e}^{(1)} = (0,0)$

$$\vec{\phi}_B = -2cd\,\vec{e_z}\,,\quad \vec{\phi}_A = (mg+2cd)\,\vec{e_y}$$

Analogamente, in $\vec{q_e}^{(2)}$

$$\vec{R}^{(est,att)}\Big|_{\vec{q_e}^{(2)}} = -mg\,\vec{e_y} - 2cd\left(-\vec{e_y}-\vec{e_z}\right) = -(mg-2cd)\,\vec{e_y} + 2cd\,\vec{e_z}$$

$$\vec{M}^{(est,att)}_{\vec{q_e}^{(2)}} = -2d\,\vec{e_y}\times\left(2cd\,\vec{e_z}\right) = -4cd^2\,\vec{e_x}$$

$$(B-O)\times\vec{\phi}_B = 2d\,\vec{e_y}\times\phi\,\vec{e_z} = -2d\,\vec{e_y}\times\phi\,\vec{e_z} = -2d\phi\,\vec{e_x}$$

$$\begin{cases} -(mg-2cd)\,\vec{e_y} + 2cd\,\vec{e_z} + \phi\,\vec{e_z} = -\vec{\phi}_A & \Rightarrow \vec{\phi}_A = \\ -4cd^2\,\vec{e_x} - 2d\phi\,\vec{e_x} = 0 & \Rightarrow \phi = -2cd \end{cases}$$

Dunque, in $\vec{q_e}^{(2)} = (\pi, 0)$

$$\vec{\phi}_B = -2cd\,\vec{e_z}\,,\quad \vec{\phi}_A = (mg-2cd)\,\vec{e_y}$$

Dinamica

4) Equazioni differenziali pure di moto.

Scriviamo le eq. di Lagrange del modello. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot I_A(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\vec{L}_A$$

Per il teo di Huygens-Steiner:

$$I_A(\vec{\omega}) = I_G(\vec{\omega}) + m(G-A)\times(\vec{\omega}\times(G-A))$$

$$= I_G(\vec{\omega}) + m d\,\vec{e}_\varphi \times \left[\left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \cancel{\dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi}\right)\times d\,\vec{e}_\varphi\right]$$

$$= I_G(\vec{\omega}) + m d^2 \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \times(\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi)$$

$$= I_G(\vec{\omega}) + m d^2 \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

Quindi, poichè $\vec{e}_z$ ed $\vec{e}_\varphi$ sono API(G), pur non essendo solidali al disco,

$$\vec{L}_A = I_A(\vec{\omega}) = I_G(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi) + m d^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$= \dot{\varphi}\, I_G(\vec{e}_z) + \dot{\psi}\, I_G(\vec{e}_\varphi) + m d^2 \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$= \dot{\varphi}\,(A + m d^2)\,\vec{e}_z + C\dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\omega}\cdot\vec{L}_A = (\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi)\cdot\left[\dot{\varphi}\,(A + m d^2)\,\vec{e}_z + C\dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi\right] =$$

$$= (A + m d^2)\,\dot{\varphi}^2 + C\dot{\psi}^2$$

Dunque,

$$K = \frac{1}{2}\left[\left(A + md^2\right)\dot{\varphi}^2 + C\dot{\psi}^2\right] = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{R^2}{4}+d^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\psi}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\dot{\varphi}, \dot{\psi}]\, m \begin{bmatrix} \frac{R^2}{4}+d^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Eq di Lagrange

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m\left(\frac{R^2}{4}+d^2\right)\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\left(\frac{R^2}{4}+d^2\right)\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}} = m\frac{R^2}{2}\dot{\psi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}}\right) = m\frac{R^2}{2}\ddot{\psi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \psi} = 0$$

$$\begin{cases} m\left(\frac{R^2}{4}+d^2\right)\ddot{\varphi} = mgd\sin\varphi \\ m\frac{R^2}{2}\ddot{\psi} = -b\psi \end{cases}$$

5). Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri.

Poichè la sollecitazione è conservativa, le EL linearizzate intorno a $\vec{q}_e$ si riducono a

$$A(\vec{q}_e)\ddot{\vec{x}} + \mathcal{H}_V(\vec{q}_e)\vec{x} = \vec{0} \qquad \vec{x} = \frac{\vec{q} - \vec{q}_e}{\varepsilon} \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Allora,

$$m\begin{bmatrix} \frac{R^2}{4}+d^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mgd\cos\varphi_e & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m\left(\frac{R^2}{4}+d^2\right)\ddot{x}_1 - mgd\cos\varphi_e\, x_1 = 0 \\ m\frac{R^2}{2}\ddot{x}_2 + b\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Intorno a $\vec{q}_e^{(1)}$:

$$\begin{cases} m\left(\frac{R^2}{4}+d^2\right)\ddot{\varphi} - mgd\,\varphi = 0 \\ m\frac{R^2}{2}\ddot{\psi} + b\psi = 0 \end{cases}$$

Intorno a $\vec{q}_e^{(2)}$

$$\begin{cases} m\left(\frac{R^2}{4}+d^2\right)\ddot{\varphi} + mgd\,\varphi = mgd\,\pi \\ m\frac{R^2}{2}\ddot{\psi} + b\psi = 0 \end{cases}$$

6) Reazioni vincolari esterne

Scriviamo le ECD

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\Phi}_A' + \vec{\Phi}_B' = m\,\vec{a}_G \\ \vec{M}_O^{(est,att)} + (B-O)\times\vec{\Phi}_B' = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{a}_G = \frac{d^2}{dt^2}(G-O) = \frac{d}{dt}\left(d\,\vec{e}_\varphi\right) = \frac{d}{dt}\left(-d\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho\right) = -d\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\rho\right)$$

$$= -d\left[\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho\right)\right] = -d\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(A+md^2\right)\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + C\dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi\right] =$$

$$= \left(A+md^2\right)\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z + C\left(\ddot{\psi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{\psi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi\right)$$

$$= \left(A+md^2\right)\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z + C\ddot{\psi}\,\vec{e}_\varphi - C\dot{\psi}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

Dalla II ECD,

$$\vec{\Phi}_B' = \frac{B-O}{|B-O|^2}\times\left(\vec{M}_O^{(est,att)} - \frac{d\vec{L}_O}{dt}\right) =$$

$$= \frac{2d}{4d^2}\,\vec{e}_\varphi\times\Big[+hcd^2\,\vec{e}_\rho - \cancel{b\dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi} + mgd\sin\varphi\,\vec{e}_z +$$

$$- \left(A+md^2\right)\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z - \cancel{C\ddot{\psi}\,\vec{e}_\varphi} + C\dot{\psi}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho\Big]$$

$$= \frac{1}{2d}\,\vec{e}_\varphi\times\left[\left(+hcd^2 + C\dot{\psi}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\rho + \left(+mgd\sin\varphi - \left(A+md^2\right)\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_z\right]$$

$$= \frac{1}{2d}\left[-\left(hcd^2 + C\dot{\psi}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_z + \Big(\underbrace{+mgd\sin\varphi - \cancel{\left(A+md^2\right)\ddot{\varphi}}}_{EL_\varphi}\Big)\vec{e}_\rho\right]$$

Quindi,

$$\vec{\Phi}'_B = -\left(2ed + \frac{\ell}{2d}\,\dot{\varphi}\dot{\phi}\right)\vec{e}_z$$

Sostituendo nella I ECD, si trova

$$\vec{\Phi}'_A = mg\left(\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi\right) + 2ed\left(\vec{e}_\varphi - \cancel{\vec{e}_z}\right) + \left(2\cancel{e}d + \frac{\ell}{2d}\,\dot{\varphi}\dot{\phi}\right)\vec{e}_z +$$

$$-md\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi\right) =$$

$$= m\left(g\sin\varphi - d\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\rho + \left(mg\cos\varphi + 2ed - md\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{\ell}{2d}\,\dot{\varphi}\dot{\phi}\,\vec{e}_z$$