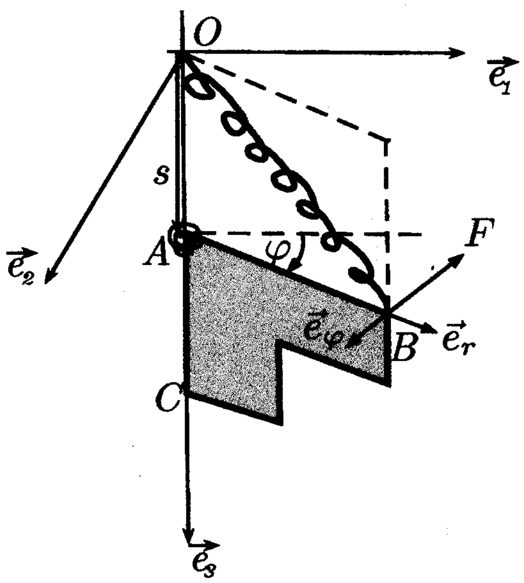
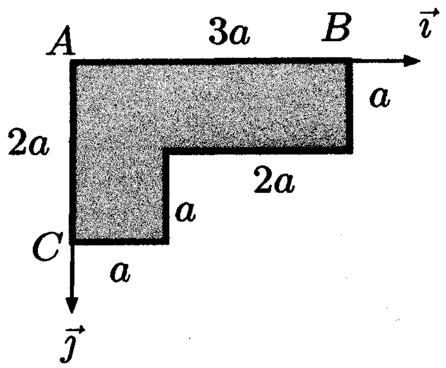
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 12 settembre 2016

(G. Tondo)





La lamina omogenea della figura, di massa $4m$, è vincolata ad una guida fissa verticale passante per O, mediante un collare cilindrico fissato al vertice A. Il vertice B è collegato a una molla di costante elastica c_1, che ha l'altro estremo fissato al punto O, mentre il vertice in A è collegato ad una molla angolare con asse verticale, di costante elastica $c_2 = 3\,c_1 a^2$. Inoltre, nel punto B è applicata una forza F che si mantiene sempre ortogonale alla lamina. Scelte come coordinate libere la coordinata $s \in \mathbf{R}$ di A rispetto a O lungo la guida verticale e l'angolo $\varphi \in \mathbf{R}$ della figura (scelto in modo che $\varphi = 0$ coincida con la posizione di riposo della molla angolare) si chiede di

STATICA

Determinare:

1) il baricentro G della lamina rispetto alla coppia di assi $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$;

2) le configurazioni di equilibrio della lamina e la loro stabilità;

3) la reazione e il momento della reazione vincolare della guida sulla lamina in A, all'equilibrio.

DINAMICA

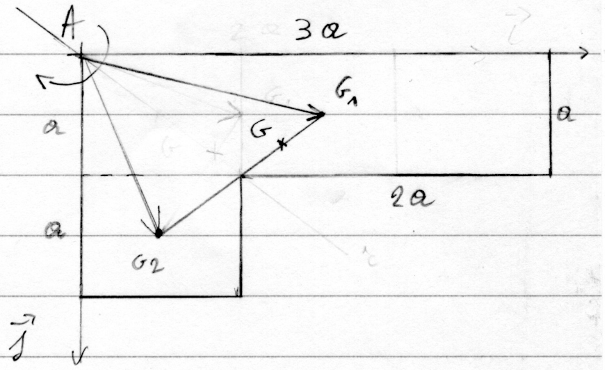
4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto;

5) determinarne l'integrale generale e dire se il moto complessivo è periodico (giustificando la risposta);

6) calcolare la reazione e il momento della reazione vincolare della guida sulla lamina in A, durante i moti.

Tema del 12/09/2016

1) Baricentro della lamina



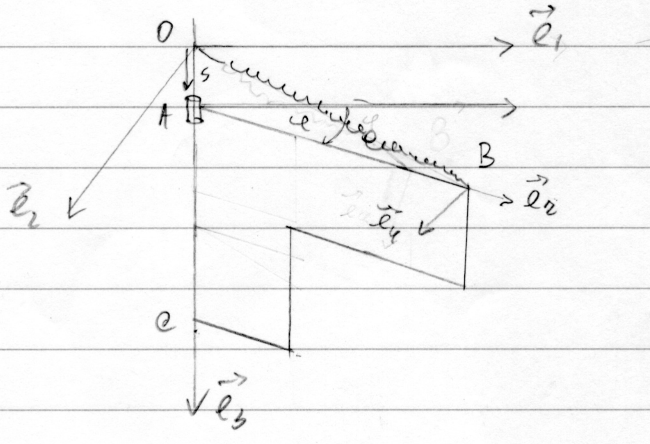
Si può determinare utilizzando la proprietà distributiva

Analiticamente:

$$G-A = \frac{3m(G_1-A)+m(G_2-A)}{4m} = \frac{1}{4}\left(3\left(\frac{3a}{2}\vec{i}+\frac{a}{2}\vec{j}\right)+\left(\frac{a}{2}\vec{i}+\frac{3}{2}a\vec{j}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a\left(5\vec{i}+3\vec{j}\right)$$

Cinematica



Il modello è costituito da un unico rigido ed ha 2 g.l. come si evince dal metodo dei congelamenti successivi.
Coordinate libere: $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
Basi di versori:

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: "fissa"

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_3)$: "intermedia"

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2 \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \end{cases}$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: "solidale"

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{e}_r \\ \vec{j} = \vec{e}_3 \\ \vec{k} = -\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

2) Equilibri

La sollecitazione attiva, data dal peso, dalle molle in B e dalla molla angolare in A, è conservativa. Quindi, possiamo calcolarne l'energia potenziale e poi le componenti lagrangiane

(2.1) $$V(s,\varphi) = -4m\vec{g}\cdot\vec{x}_G + \frac{1}{2}c_1\overline{OB}^2 + \frac{1}{2}c_2\varphi^2$$

(2.2) $$\vec{x}_G := (G-O) = (G-A)+(A-O) = \frac{a}{4}(5\vec{i}+3\vec{j}) + s\vec{e}_3 = \frac{5}{4}a\vec{e}_r + \left(\frac{3}{4}a+s\right)\vec{e}_3$$

(2.3) $$B-O = (B-A)+(A-O) = 3a\vec{e}_r + s\vec{e}_3 \Rightarrow \frac{\partial\vec{x}_B}{\partial s} = \vec{e}_3,\ \frac{\partial\vec{x}_B}{\partial\varphi} = 3a\vec{e}_\varphi$$

(2.4) $$\overline{OB}^2 = |B-O|^2 = 9a^2+s^2$$

Allora

(2.5) $$V(s,\varphi) = -4mg\vec{e}_3\cdot\left(\frac{5}{4}a\vec{e}_r + \left(\frac{3}{4}a+s\right)\vec{e}_3\right) + \frac{1}{2}c_1(9a^2+s^2) + \frac{1}{2}c_2\varphi^2$$

trascurando le costanti

$$= -4mgs + \frac{1}{2}c_1s^2 + \frac{1}{2}c_2\varphi^2$$

(2.6) $$Q_s = \frac{\partial(-V)}{\partial s} = 4mg - c_1 s,\quad Q_\varphi = -c_2\varphi$$

Rimangono da calcolare le componenti lagrangiane del carico follower.

(2.7) $$Q_s^{(foll)} = \vec{F}_B\cdot\frac{\partial\vec{x}_B}{\partial s} = -F\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_3 = 0$$

(2.8) $$Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}_B\cdot\frac{\partial\vec{x}_c}{\partial\varphi} = -F\vec{e}_\varphi\cdot 3a\vec{e}_\varphi = -3Fa$$

le eq. pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} 4mg - c_1 s = 0 \\ -c_2\varphi - 3Fa = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} s_e = 4\dfrac{mg}{c_1} \\ \varphi_e = -\dfrac{3Fa}{c_2} = \dfrac{-3Fa}{3c_1a^2} = -\dfrac{F}{c_1 a} \end{array}$$

Dunque, esiste l'unica configurazione di equilibrio

$$\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e) = \left(4\frac{mg}{c_1}, \frac{-F}{c_1 a}\right)$$

Lo studio della stabilità tramite lo studio dell'energia potenziale ha senso se tutta la sollecitazione attiva è conservativa. E' immediato verificare che, in questo caso, il carico follower è conservativo, poiché $Q_s^{(foll)}$ e $Q_\varphi^{(foll)}$ superano il test delle derivate in croce

$$\frac{\partial Q_s^{(foll)}}{\partial \varphi} = 0 = \frac{\partial Q_\varphi^{(foll)}}{\partial s}$$

Allora, anche il carico follower ammette energia potenziale, $V^{(foll)}$ che non è necessario calcolare. Infatti, la matrice Hessiana di $V^{(tot)} = V + V^{(foll)}$ è data da

$$\mathcal{H}_{V^{(tot)}} = \mathcal{H}_V + \mathcal{H}_{V^{(foll)}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_s}{\partial s} & \dfrac{\partial Q_s}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial Q_\varphi}{\partial s} & \dfrac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q^{(foll)}}{\partial s} & \dfrac{\partial Q_s^{(foll)}}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial Q_\varphi^{(foll)}}{\partial s} & \dfrac{\partial Q_\varphi^{(foll)}}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ \hline 0 & 3c_1a^2 \end{array}\right] \Rightarrow \vec{q}_e \text{ è un punto di min.} \Rightarrow \text{eq. stabile}$$

2) Reazioni in A all'equilibrio

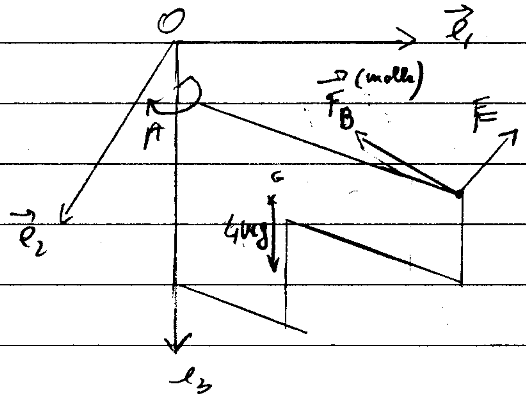
L'insieme delle reazioni del vincolo in A si può sempre ridurre a una forza e una coppia

(4.1) $$\mathcal{L}^{(reatt)} = \left\{ (A, \vec{\phi}), \vec{\mu} \right\}$$

Poiché il vincolo è, per ipotesi, non dissipativo

(4.2) $$\vec{\phi} \cdot \vec{e}_3 = 0, \quad \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0,$$

sia in statica, sia in dinamica. Per determinare $\mathcal{L}^{(reatt)}$ scriviamo le ECS sul modello.



(4.3) $$\begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est,att)} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

(4.4) $$\vec{R}^{(est,att)} = 4m\vec{g} + \vec{F}_B = 4m\vec{g} - c_1(B-O) - F\vec{e}_\varphi = 4mg\vec{e}_3 - c_1(3a\vec{e}_2 + s\vec{e}_3) - F\vec{e}_\varphi$$

Quindi

(4.5) $$\vec{\phi} = -\vec{R}^{(est,att)}_{|q_e} = -\cancel{(4mg - c_1 s_e)\vec{e}_3} + 3c_1 a\, \vec{e}_2{}_{|q_e} + F\vec{e}_\varphi{}_{|q_e}$$

$$\vec{M}_A^{(est,att)} = -c_2\varphi\vec{e}_3 + (G-A)\times 4m\vec{g} + (B-A)\times \vec{F}_B$$

(4.6) $$= -c_2\varphi\vec{e}_3 + \frac{a}{4}(5\vec{i} + 3\cancel{\vec{j}})\times 4mg\vec{j} + 3a\vec{e}_2 \times \left(-c_1(3a\cancel{\vec{e}_2} + s\vec{e}_3) - F\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= -c_2\varphi\vec{e}_3 + 5mga\vec{k} + 3ac_1 s\,\vec{e}_\varphi - 3aF\vec{e}_3 =$$
$$= -c_2\varphi\vec{e}_3 + a(-5mg + 3c_1 s)\vec{e}_\varphi - 3aF\vec{e}_3$$

Allora, in $\vec{q}_e$ vale

$$(5.1)\quad \vec{\mu} = -\vec{H}_A^{(est,att)}\Big|_{\vec{q}_e} = a\left(5mg - 3c_1\varphi_e\right)\vec{e}_\varphi + \cancel{\left(c_2\varphi_e + 3aF\right)\vec{e}_3}$$

$$= a\left(5mg - 3\cancel{c_1}\frac{4mg}{\cancel{c_1}}\right)\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e} = -7mga\,\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e}$$

Dinamica

4) Eq. differenziali pure di moto

Scriviamo le EL. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello. Conviene utilizzare la rappresentazione

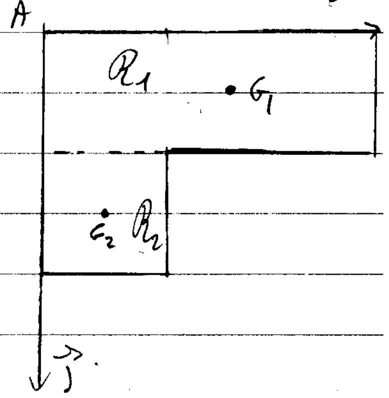
$$(5.2)\quad K = \frac{1}{2}(4m)|\vec{v}_A|^2 + \cancel{4m\,\vec{v}_A\cdot\vec{\omega}\times(G-A)} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I_A(\vec{\omega}),$$

in cui il prodotto misto si annulla poiché $\vec{v}_A \,//\, \vec{\omega} \,//\, \vec{e}_3$.

$$(5.3)\quad \vec{v}_A = \dot{s}\,\vec{e}_3, \qquad \vec{\omega}\cdot I_A(\vec{\omega}) = \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_3\cdot I_A(\vec{e}_3)$$

Calcolo di $\vec{e}_3\cdot I_A(\vec{e}_3)$

Sappiamo che $\vec{e}_3\cdot I_A(\vec{e}_3)$ è il momento d'inerzia del rigido rispetto all'asse $(A, \vec{e}_3\equiv\vec{\imath})$. Calcoliamolo.



$$I_{A3} = I_{A3}^{(1)} + I_{A3}^{(2)} = \frac{1}{3}(3m)(3a)^2 + \frac{1}{3}ma^2 = \left(9+\frac{1}{3}\right)ma^2 =$$

$$(5.4)\quad = \frac{28}{3}ma^2$$

Allora

(6.1) $K = 2\, m\, \dot{s}^2 + \frac{14}{3} m a^2 \dot{\varphi}^2 =$

EL_s: $\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = 4 m \dot{s}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{s}}\right) = 4 m \ddot{s}$, $\frac{\partial K}{\partial s} = 0$

$$4 m \ddot{s} = Q_s + Q_s^{(Roll)}$$

(6.2) $\boxed{4 m \ddot{s} = 4 m g - c_1 s}$

EL_φ: $\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{28}{3} m a^2 \dot{\varphi}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{28}{3} m a^2 \ddot{\varphi}$, $\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{28}{3} m a^2 \ddot{\varphi} = Q_\varphi + Q_\varphi^{(Roll)}$$

(6.3) $\boxed{\frac{28}{3} m a^2 \ddot{\varphi} = -3 c_1 a^2 \varphi - 3 F a}$

Dunque, il sistema delle EL è

(6.4) $\begin{cases} 4 m \ddot{s} + c_1 s = 4 m g \\ \frac{28}{3} m a \ddot{\varphi} + 3 c_1 a \varphi = -3 F \end{cases}$

cioè un sistema di EDO del 2° ordine, lineare a coefficienti costanti, non omogenee e disaccoppiate.

5) Integriamo il sistema delle EL (6.4), che sono entrambe non omogenee. Quindi, il loro integrale generale è somma di una soluzione particolare, per esempio la soluzione stazionaria, più l'integrale generale dell'omogenea associata. Dunque, per la prima (6.4)

(7.1) $$\ddot{s} + \frac{c_1}{4m} s = g$$

consideriamo la soluzione stazionaria

(7.2) $$s_e = \frac{4mg}{c_1}$$

e l'integrale generale dell'omogenea associata

(7.3) $$\hat{s}(t) = A\cos(\nu_1 t + \alpha) \qquad \nu_1 = \sqrt{\frac{c_1}{4m}}$$

Quindi

(7.4) $$s(t) = A\cos(\nu_1 t + \alpha) + \frac{4mg}{c_1}$$

la seconda delle EL (6.4) è

(7.5) $$\ddot{\varphi} + \frac{9}{28}\frac{c_1}{m}\varphi = -\frac{9}{28}\frac{F}{ma}$$

dunque

(7.6) $$\varphi(t) = B\cos(\nu_2 t + \beta) - \frac{F}{c_1 a} \qquad \nu_2 = 3\sqrt{\frac{c_1}{28m}}$$

Il rapporto tra i periodi della (7.4) e della (7.6) vale

$$\frac{T_s}{T_\varphi} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = 3\sqrt{\frac{\cancel{c_1}}{\cancel{28}_7 \cancel{m}}\frac{\cancel{4m}}{\cancel{c_1}}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \text{non periodico}$$

6) Reazioni vincolari e momento delle reazioni in dinamica: $\mathcal{L}'=\{(A,\vec{\phi}'),\vec{\mu}'\}$

Scriviamo le ECD nel modello:

$$(8.1)\quad \begin{cases} \vec{\phi}' + \vec{R}^{(ext,att)} = 4m\,\vec{a}_G \\ \vec{\mu}' + \vec{M}_A^{(ext,att)} = \dfrac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}_A \times 4m\,\vec{v}_G \end{cases}$$

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = \frac{d^2}{dt^2}(G-O) \overset{(2.2)}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{4}a\,\dot{\vec{e}}_2 + \dot{s}\,\vec{e}_3\right) = \frac{5}{4}a\,\ddot{\vec{e}}_2 + \ddot{s}\,\vec{e}_3$$

$$\ddot{\vec{e}}_2 = \frac{d}{dt}\dot{\vec{e}}_2 = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = -\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_2 + \ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$(8.2)\quad \vec{a}_G = -\frac{5}{4}a\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_2 + \frac{5}{4}a\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \ddot{s}\,\vec{e}_3$$

Dunque

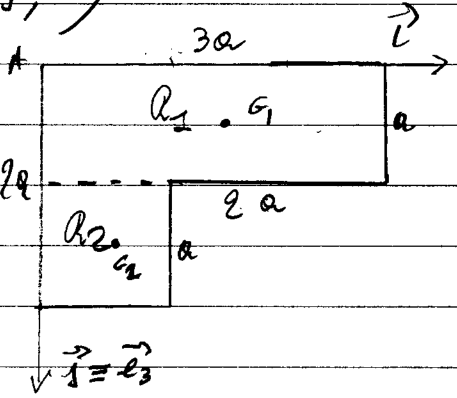
$$(8.3)\quad \vec{\phi}' = -\vec{R}^{(ext,att)} + 4m\,\vec{a}_G = -4mg\,\vec{e}_3 + c_1(3a\,\vec{e}_2 + s\,\vec{e}_3) + F\,\vec{e}_\varphi$$
$$+\,4m\left(-\frac{5}{4}a\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_2 + \frac{5}{4}a\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \ddot{s}\,\vec{e}_3\right)$$

$$(8.4)\quad \vec{\phi}' = (3ac_1 - 5ma\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_2 + (F + 5ma\,\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \underbrace{(4m\ddot{s} - 4mg + c_1 s)}_{(6.4)}\vec{e}_3$$
$$= (3ac_1 - 5ma\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_2 + (F + 5ma\,\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi$$

Poichè il modello è rigido, la II ECD si può scrivere

$$\vec{\mu}' + \vec{M}_A^{(est,e\#)} = I_A(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times I_A(\vec{\omega}) + (G-A)\times 4m\,\vec{a}_A$$

Calcoliamo I_A rispetto alla terna $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



$$I_{Axx} = I^{(1)}_{Axx} + I^{(2)}_{Axx} = \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}m a^2 + \left(\frac{1}{12} m a^2 + m\left(\frac{3a}{2}\right)^2\right) =$$
$$= \left(1+\frac{1}{12}+\frac{9}{4}\right) m a^2 = \frac{10}{3} m a^2$$

$$I_{Ayy} = I^{(1)}_{Ayy} + I^{(2)}_{Ayy} = \frac{1}{3}3m(3a)^2 + \frac{1}{3} m a^2 = \frac{28}{3} m a^2$$

$$I_{Axy} = I^{(1)}_{Axy} + I^{(2)}_{Axy}$$

$$I^{(1)}_{Axy} = -\int_{R_1} \rho\, xy\, dR_1 = -\frac{\cancel{3}m}{\cancel{3}a^2}\int_0^{3a} x\left(\int_0^a y\,dy\right)dx =$$

$$= -\frac{m}{\cancel{a^2}}\int_0^{3a} x\frac{\cancel{a^2}}{2}\,dx = -\frac{m}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{3a} = -\frac{m}{4}9a^2$$

$$I^{(2)}_{Axy} = -\int_{R_2} \rho\, xy\, dR_2 = -\frac{m}{a^2}\int_0^a x\left(\int_a^{2a} y\,dy\right)dx = -\frac{m}{a^2}\int_0^a x\left[\frac{y^2}{2}\right]_a^{2a}dx$$

$$= -\frac{m}{a^2 2}\left(4a^2-a^2\right)\int_0^a x\,dx = -\frac{3}{2}m\frac{a^2}{2} = -\frac{3}{4} m a^2$$

Quindi

$$I_{Axy} = -\frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{4}} m a^2 = -3 m a^2$$

Dunque, la matrice di I_A rs. alla terna $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è

$$I_A = ma^2 \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -3 & 0 \\ -3 & \frac{28}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{38}{3} \end{bmatrix}$$

Allora,

$$I_A(\vec{e}_3) = I_A(\vec{j}) = ma^2\left(-3\vec{i} + \frac{28}{3}\vec{j}\right) = \left(-3\,\vec{e}_2 + \frac{28}{3}\vec{e}_3\right) ma^2$$

$$I_A(\dot{\vec{\omega}}) = I_A(\ddot{\varphi}\vec{e}_3) = \ddot{\varphi}\, I_A(\vec{e}_3) = \ddot{\varphi}\left(-3\,\vec{e}_2 + \frac{28}{3}\vec{e}_3\right) ma^2$$

$$\vec{\omega} \times I_A(\vec{\omega}) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times I_A(\dot{\varphi}\vec{e}_3) = \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_3 \times I_A(\vec{e}_3) = \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_3 \times \left(-3\,\vec{e}_2 + \frac{28}{3}\vec{e}_3\right) ma^2$$

$$= -3ma^2\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -3\,ma^2\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi$$

$$(G-A) \times 4m\vec{a}_A = \frac{a}{\cancel{4}}\left(5\vec{i} + \cancel{3\vec{j}}\right) \times \cancel{4}m\,\ddot{s}\,\vec{e}_3 = 5ma\,\ddot{s}\;\vec{i}\times\vec{j} =$$

$$= 5\,ma\,\ddot{s}\,\vec{k} = -5\,ma\,\ddot{s}\,\vec{e}_\varphi$$

Dunque

$$\vec{\mu}' + \Pi_A^{(at,eff)} = \left(-3\,\vec{e}_2 + \frac{28}{3}\vec{e}_3\right) ma^2\ddot{\varphi} - 3\,ma^2\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi - 5\,ma\,\ddot{s}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\mu}'^{(4.6)} = c_2\varphi\,\vec{e}_3 - a\left(-5mg + 3c_1 s\right)\vec{e}_\varphi + 3Fa\,\vec{e}_3 \left(-3\,\vec{e}_2 + \frac{28}{3}\vec{e}_3\right) ma^2\ddot{\varphi} - ma\left(3a\dot{\varphi}^2 + 5\ddot{s}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$= -3\,ma^2\ddot{\varphi}\,\vec{e}_2 - a\left(-5mg + 3c_1 s + 3ma\dot{\varphi}^2 + 5m\ddot{s}\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left(3c_1 a^2\varphi + 3Fa + \frac{28}{3}ma^2\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_3$$

(6.4)