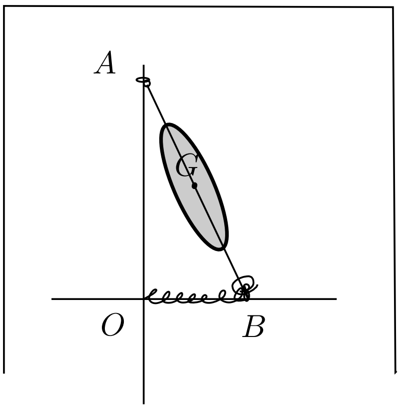
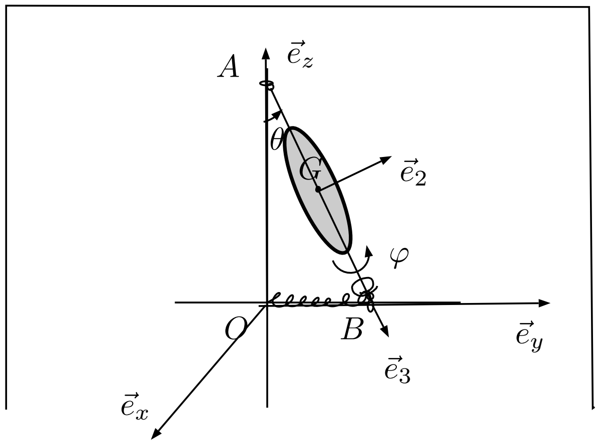
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 13 febbraio 2017. (G. Tondo)

Un disco omogeneo di raggio R e massa m è saldato, lungo un diametro, ad un'asta AB di lunghezza $4R$ e di massa trascurabile, in modo che il centro del disco G coincida con il punto medio di AB. Gli estremi dell'asta sono vincolati, come in figura, a scorrere senza attrito lungo due guide fisse ortogonali, tramite due cerniere sferiche "bucate". Sul rigido agisce il peso proprio opposto ad $\vec{e}_z$, la forza di richiamo di una molla lineare, di costante elastica c, fissata nell'estremo B e nel punto fisso O, la forza di richiamo di una molla angolare, di costante elastica b, fissata nel punto B.





STATICA

Detto θ l'angolo tra i versore $(-\vec{e}_z)$ ed $\vec{e}_3$, φ l'angolo di rotazione del disco intorno all'asta, misurato a partire dalla posizione in cui la molla angolare è a riposo, determinare, in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{8cR}$:

1) le configurazioni di equilibrio del modello $\vec{q}_e = (\theta_e, \varphi_e)$ e la loro stabilità;

2) le reazioni vincolari esterne sul rigido in A;

3) le reazioni vincolari esterne sul rigido in B.

DINAMICA

4) Scrivere le equazione differenziali pure di moto;

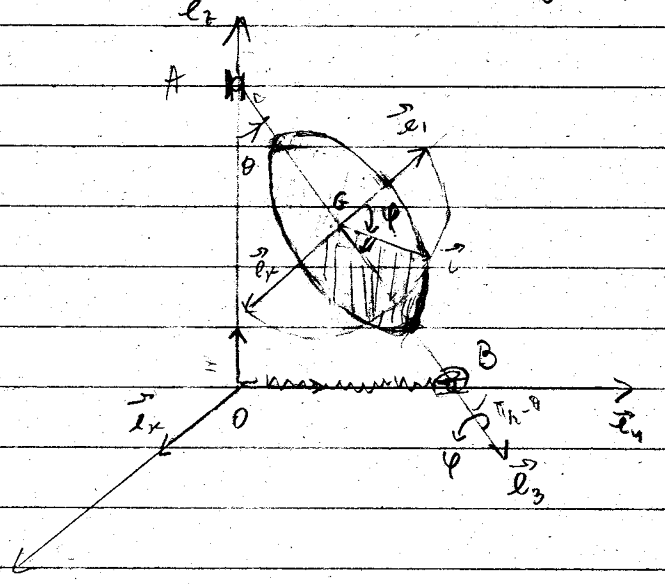
5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) calcolare le reazioni vincolare esterne nei punti A e B, durante il moto.

Nota Bene. Si suggerisce di usare anche una terna intermedia formata dai versori $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, con $\vec{e}_3$ diretto come l'asta, $\vec{e}_2$ ortogonale all'asta e giacente nel piano $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ed $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$. Inoltre, si consiglia di prendere una terna solidale all'asta $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, con $\vec{\jmath} = \vec{e}_3$, il versore $\vec{\imath}$ sul piano del disco, e $\vec{k} = \vec{\imath} \times \vec{\jmath}$. Si scelga l'angolo di rotazione dell'asta, φ, come quello compreso fra i versori $\vec{e}_1$ ed $\vec{\imath}$.

Cinematica

Il modello è un rigido con 2 gradi di libertà



$$c.l = \{\theta, \varphi\}.$$

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

Il moto dell'asta AB è piano nel piano generato da $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Quindi, la sua velocità angolare $\vec{\omega}^{(a)}$ è data da

$$(1.1) \qquad \vec{\omega}^{(a)} = \dot{\theta}\, \vec{e}_x$$

Il moto del disco si può scomporre nel moto di trascinamento dell'asta che è solidale al disco e in un moto rotatorio intorno all'asta. Pertanto, per il Teo di composizione delle velocità angolari, la velocità angolare del disco è

$$(1.2) \qquad \vec{\omega}^{(d)} = \vec{\omega}^{(a)} + \dot{\varphi}\, \vec{e}_3 = \dot{\theta}\, \vec{e}_x + \dot{\varphi}\, \vec{e}_3 .$$

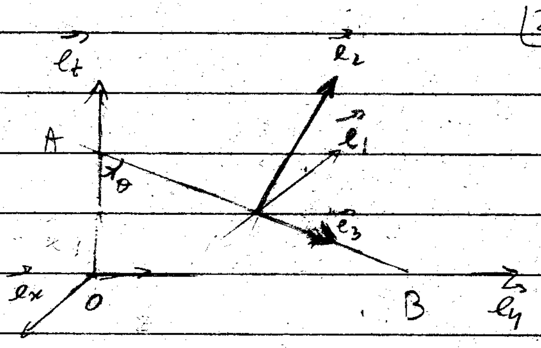
Nel seguito, converrà scomporre i vettori nella terna "fissa"

$$(1.3) \qquad \mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

e nelle terne mobili

$$(1.4) \quad \mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \ \mathcal{B}'' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

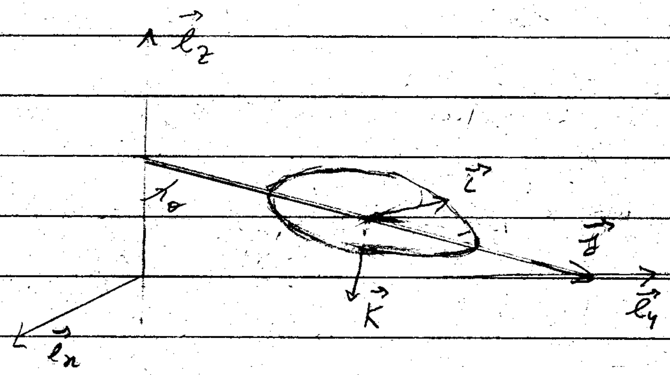
dove abbiamo indicato con



$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$: terna solidale all'asta.

$\vec{e}_1 \equiv -\vec{e}_x$, $\vec{e}_3 = \text{vers}(B-A)$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$

$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{K}\right)$: terna solidale al disco



$\vec{K} \perp$ al disco,
$\vec{j} = \vec{e}_3$
$\vec{i} = \vec{j} \times \vec{K} \Rightarrow \in$ al piano del disco

La legge di trasformazione tra la base $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{B}'$ risulta:

$$
(2.1)\quad
\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= -\vec{e}_x \\
\vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \left(-\cos\theta\, \vec{e}_z + \sin\theta\, \vec{e}_y\right) \times \left(-\vec{e}_x\right) = \left(\cos\theta\, \vec{e}_y + \sin\theta\, \vec{e}_z\right) \\
\vec{e}_3 &= -\cos\theta\, \vec{e}_z + \sin\theta\, \vec{e}_y
\end{aligned}
$$

in termini matriciali

$$
(2.2)\quad
\left[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right] = \left[\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right]
\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}
$$

e in forma più compatta $\vec{e}\,' = \vec{e}\,[B_\theta]$, con $B_\theta B^T = \mathbb{I}$

La trasformazione inversa è data da $\vec{e} = \vec{e}\,'[B_\theta]^T$

dove

$$
(2.3)\quad
[B_\theta]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = [B_\theta]
$$

La legge di trasformazione tra le basi B' ed B'' è:

$$(3.1)\quad \begin{aligned} \vec{i} &= \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2 \\ \vec{j} &= \vec{e}_3 \\ \vec{k} &= \vec{i}\times\vec{j} = (\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2)\times\vec{e}_3 = \sin\varphi\,\vec{e}_1 - \cos\varphi\,\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Quindi, in termini matriciali

$$(3.2)\qquad \vec{e}\,'' = \vec{e}\,'\,[R_\varphi]$$

dove

$$(3.3)\qquad R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & +\sin\varphi \\ +\sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora, la trasformazione tra le basi $\vec{e}$ ed $\vec{e}\,''$ risulta

$$(3.4)\qquad \vec{e}\,'' = \vec{e}\,'\,[R_\varphi] = \vec{e}\,[R_\theta]\,[R_\varphi] \qquad [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = [\vec{e}_2\, \vec{e}_1\, \vec{e}_3]\,[R_\theta R_\varphi]$$

dove la matrice prodotto è data da

$$(3.5)\qquad [R_\theta]\,[R_\varphi] = \begin{bmatrix} -\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta & -\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

La trasformazione inversa è data da

$$(3.6)\qquad \vec{e} = \vec{e}\,''\left([R_\theta]\,[R_\varphi]\right)^T$$

con

$$\left([R_\theta][R_\varphi]\right)^T = [R_\varphi]^T\,[R_\theta]^T = \begin{bmatrix} -\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ -\sin\varphi & -\cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Ora possiamo calcolare le componenti di $\vec{\omega}^{(a)}$ e $\vec{\omega}^{(d)}$ nella base fissa $\mathcal{B}$:

(4.1) $$\vec{\omega}^{(a)} = \dot{\theta}\,\vec{e}_x$$

(4.2) $$\vec{\omega}^{(d)} = \dot{\theta}\,\vec{e}_x + \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 = \dot{\theta}\,\vec{e}_x + \dot{\varphi}\left(\sin\theta\,\vec{e}_y - \cos\theta\,\vec{e}_z\right) = \dot{\theta}\,\vec{e}_x + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_y - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_z \quad ;$$

e nella base solidale al disco $\mathcal{B}''$

(4.3) $$\vec{\omega}^{(a)} = \dot{\theta}\,\vec{e}_x = \dot{\theta}\left(-\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{k}\right) = -\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{i} - \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{k}$$

(4.4) $$\vec{\omega}^{(d)} = \dot{\theta}\,\vec{e}_x + \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 = -\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{i} + \dot{\varphi}\,\vec{j} - \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{k}$$

I vettori posizione dei punti rilevanti del rigido sono

(4.5) $$B - O = 4R\sin\theta\,\vec{e}_y ,$$

(4.6) $$G - O = (B-O) + (G-B) = 4R\sin\theta\,\vec{e}_y - 2R\,\vec{e}_3 \overset{(2.1)}{=} 4R\sin\theta\,\vec{e}_y + -2R\left(-\cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_y\right) = 2R\left(\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)$$

(4.7) $$A - O = 4R\cos\theta\,\vec{e}_z$$

(4.8) $$A - B = -4R\,\vec{e}_3 \overset{(2.1)}{=} -4R\left(\sin\theta\,\vec{e}_y - \cos\theta\,\vec{e}_z\right)$$

Statica

Poiché la sollecitazione è conservativa, possiamo utilizzare l'energia potenziale.

$$V(\theta,\varphi) = V^{(peso)} + V^{(molla\ lin)} + V^{(molla\ ang)}$$

$$= -m\vec{g}\cdot(G-O) + \frac{1}{2}c\,|B-O|^2 + \frac{1}{2}b\varphi^2$$

$$= mg\vec{e}_z \cdot 2R(\sin\theta\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z) +$$

(5.1) $$+\frac{1}{2}c\,(4R\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}b\varphi^2$$

$$= 2mgR\cos\theta + 8cR^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}b\varphi^2$$

Calcoliamo i punti stazionari della funzione V.

(5.2) $$\frac{\partial V}{\partial\theta} = -2mgR\sin\theta + 16cR^2\sin\theta\cos\theta = -Q_\theta$$

(5.3) $$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = b\varphi = -Q_\varphi$$

Dunque, le eq. pure di equilibrio sono

(5.4) $$\begin{cases} \sin\theta\,(16cR^2\cos\theta - 2mgR) = 0 \\ b\varphi = 0 \end{cases}$$

Il sistema precedente equivale all'unione di

$$\begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \quad \text{vel} \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2mgR}{16 c R^2} = \lambda \in \mathbb{R}^+ \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del I sistema sono

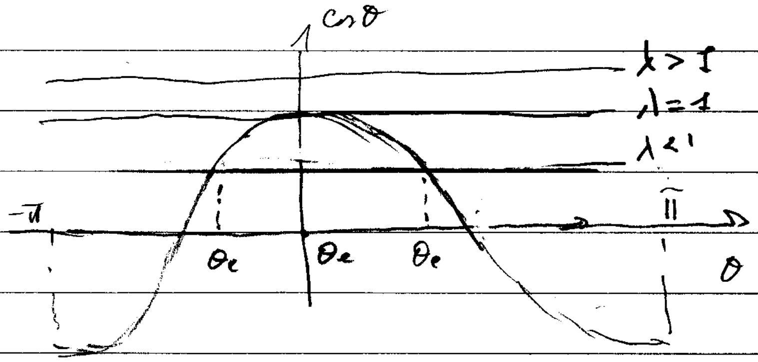
$$\begin{cases} \theta_e = 0, \pi \\ \varphi = 0 \end{cases},$$

quelle del II sistema

se $\lambda > 1$ Nessuna soluzione

se $\lambda = 1$ $(0,0)$

se $\lambda < 1$ $\begin{cases} \theta_e = \pm \arccos\lambda \\ \varphi = 0 \end{cases}$



Dunque, le configurazioni di equilibrio sono

$\vec{q}_e^{(2)} = (0,0)$, $\vec{q}_e^{(4)} = (\pi, 0)$ $\quad \forall \lambda$

$\vec{q}_e^{(1)} = (-\arccos\lambda, 0)$, $\vec{q}_e^{(3)} = (\arccos\lambda, 0)$ $\quad$ se $\lambda < 1$

Studiamone la stabilità. A tale scopo, calcoliamo la matrice Hessiana della funzione V. Riscriviamo

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 16 c R^2 \left(-\lambda \sin\theta + \sin\theta\cos\theta\right)$$

Allora,

$$(7.1)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 16cR^2\left(-\lambda\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1\right), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = b$$

Dunque

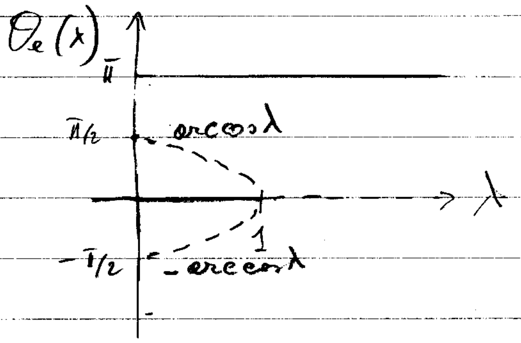
$$(7.2)\quad \mathcal{H}_V = \begin{bmatrix} 16cR^2(-\lambda\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1) & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad \det \mathcal{H}_V = b\,\mathcal{H}_{11}$$

$$(7.3)\quad \mathcal{H}_{11}\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = \mathcal{H}_{11}\big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = 16cR^2\left(-\lambda^2 + 2\lambda^2 - 1\right) = 16cR^2\left(\lambda^2 - 1\right) < 0 \text{ se } \lambda < 1 \Rightarrow \text{instabili}$$

$$(7.4)\quad \mathcal{H}_{11}\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = 16cR^2\left(1 - \lambda\right) > 0 \quad \text{se } \lambda < 1 \quad \Rightarrow \text{stabile se } \lambda < 1$$

$$(7.5)\quad \mathcal{H}_{11}\big|_{\vec{q}_e^{(4)}} = 16cR^2\left(1 + \lambda\right) > 0 \quad \forall\lambda \quad \Rightarrow \text{stabile}$$

I risultati precedenti si possono riassumere nel seguente diagramma di biforcazione a forcone



dove con il tratto continuo abbiamo indicato gli equilibri stabili, con quello tratteggiato, quelli instabili

2) e 3) Reazioni vincolari in A e B, all'equilibrio

I vincoli in A e B sono 2 cerniere sferiche scorrevoli. Poiché sono non dissipative per ipotesi, il lavoro virtuale delle loro reazioni vincolari sul rigido è nullo. Quindi, la loro sollecitazione reattiva si riduce a una sola forza che non ha componenti tangenti agli assi lungo cui scorrono. Dunque, a priori sappiamo che

$$(8.1) \quad \vec{\phi}_A = \phi_x \vec{e}_x + \phi_y \vec{e}_y \ , \quad \vec{\psi}_B = \psi_x \vec{e}_x + \psi_z \vec{e}_z$$

Dobbiamo calcolare le 4 incognite $(\phi_x, \phi_y, \psi_x, \psi_z)$. A tale scopo scriviamo le ECS

$$(8.2) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi}_A + \vec{\psi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_B^{(est,att)} + (A-B) \times \vec{\phi}_A = \vec{0} \end{cases}$$

$$(8.3) \quad \vec{R}^{(est,att)} = -mg\,\vec{e}_z - c(B-O) = -mg\,\vec{e}_z - 4cR\sin\theta_e\,\vec{e}_y$$

Proiettando la I ECS lungo la terna fissa, si trova

$$(8.4) \quad \begin{array}{l} \vec{e}_x: \\ \vec{e}_y: \\ \vec{e}_z: \end{array} \begin{cases} \phi_x + \psi_x = 0 \\ -4cR\sin\theta_e + \phi_y = 0 \\ -mg + \psi_z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \psi_x = -\phi_x \\ \phi_y = 4cR\sin\theta_e \\ \psi_z = mg \end{cases}$$

Trovata la soluzione per (ϕ_y, ψ_z) scriviamo la II ECS per trovare le altre 2 incognite (ϕ_x, ψ_x).

Il primo termine della II (8.2) è

$$\vec{M}_B^{(est,est)} = (G-B)\times m\vec{g} - b\varphi\,\vec{e}_3 = -2R\,\vec{e}_3\times(-mg\,\vec{e}_z) - b\varphi\,\vec{e}_3$$

$$= 2mgR\,\vec{e}_3\times\vec{e}_z - b\varphi\,\vec{e}_3$$

(9.1)
$$\overset{(2.3)}{=} 2mgR\,\vec{e}_3\times(\sin\theta\,\vec{e}_2 - \cos\theta\,\vec{e}_3) - b\varphi\,\vec{e}_3$$

$$= -2mgR\sin\theta\,\vec{e}_1 - b\varphi\,\vec{e}_3$$

$$(A-B)\times\vec{\phi}_A = -4R\,\vec{e}_3\times(\phi_x\,\vec{e}_x + \phi_y\,\vec{e}_y) = -4R(\phi_x\,\vec{e}_3\times\vec{e}_x + \phi_y\,\vec{e}_3\times\vec{e}_y)$$

(9.2)
$$\overset{(2.3)}{=} -4R\phi_x\,\vec{e}_3\times(-\vec{e}_1) - 4R\phi_y\,\vec{e}_3\times(\cos\theta\,\vec{e}_2 + \sin\theta\,\vec{e}_3)$$

$$= 4R\phi_x\,\vec{e}_2 + 4R\phi_y\cos\theta\,\vec{e}_1$$

Quindi, il momento risultante rispetto a B di tutte le forze esterne sul rigido è:

(9.3)
$$\vec{M}_B = (4R\phi_y\cos\theta - 2mgR\sin\theta)\,\vec{e}_1 + 4R\phi_x\,\vec{e}_2 - b\varphi\,\vec{e}_3$$

Dunque, le II ECS proiettate lungo la base intermedia $\mathcal{B}'$ è

(9.4)
$$\begin{cases} 4R\phi_y\cos\theta_e - 2mgR\sin\theta_e = 0 & \text{O.K.} \\ 4R\phi_x = 0 \iff \phi_x = 0 & \\ -b\varphi_e = 0 & \text{O.K.} \end{cases}$$

La II eq. delle (8.4) fornisce la soluzione

(10.1) $\quad \phi_x = 0$

mentre la I e la III devono essere identicamente soddisfatte in ogni configurazione di equilibrio. Verificarlo per esercizio.

Sostituendo la (10.1) nella I eq. del sistema (8.4) abbiamo quindi la soluzione

(10.3) $\quad \vec{\Psi}_B = m g \, \vec{e}_z \qquad \forall \, \vec{q}_e$

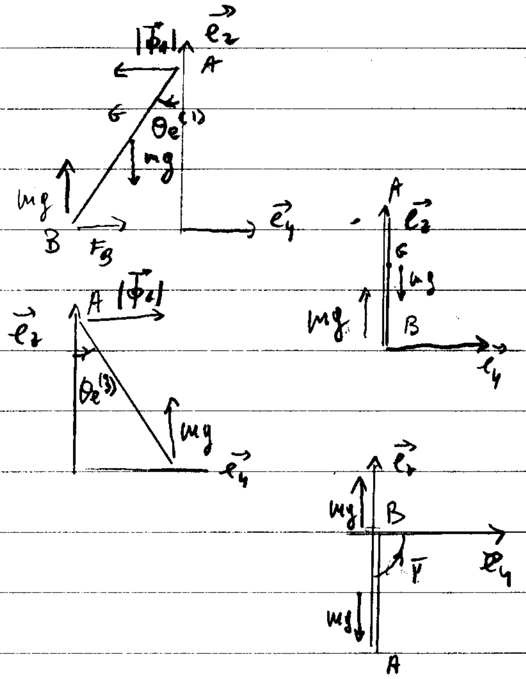
(10.4)

$\vec{q}_e^{\,(1)}: \quad \vec{\phi}_A = -4cR\sqrt{1-\lambda^2}\,\vec{e}_y$

$\vec{q}_e^{\,(2)}: \quad \vec{\phi}_A = \vec{0}$

$\vec{q}_e^{\,(3)}: \quad \vec{\phi}_A = 4cR\sqrt{1-\lambda^2}\,\vec{e}_y$

$\vec{q}_e^{\,(4)}: \quad \vec{\phi}_A = \vec{0}$



N.B. Si osservi che le ECS costituiscono un sistema di 6 eq. scalari nelle 6 incognite $(\theta_e, \varphi_e, \phi_x, \phi_y, \Psi_x, \Psi_y)$. Quindi, possono essere utilizzate per rispondere simultaneamente alle domande 1), 2), 3).

Dinamica

Scriviamo le eq. di Lagrange. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del rigido.

$$K = \frac{1}{2} m |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I_G(\vec{\omega})$$

Derivando la (4.6) rs. al tempo si trova

$$\vec{v}_G = 2R\left(\cos\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_1 - \sin\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_3\right)$$

$$|\vec{v}_G|^2 = 4R^2\left[(\cos\theta\dot\theta)^2 + (\sin\theta\dot\theta)^2\right] = 4R^2\dot\theta^2$$

Determiniamo la matrice d'inerzia rispetto alla terna solidale $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ che è una $TPI(G)$ per simmetria:

$$[I_G]^{\mathcal{B}''} = mR^2 \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$I_G(\vec{\omega}) \overset{(4.4)}{=} [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]\, mR^2 \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot\theta\cos\varphi \\ \dot\varphi \\ -\dot\theta\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= mR^2\left(-\frac{1}{4}\dot\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \frac{1}{4}\dot\varphi\,\vec{j} - \frac{1}{2}\dot\theta\sin\varphi\,\vec{k}\right)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I_G(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} mR^2\left(\frac{1}{4}\dot\theta^2\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\dot\theta^2\sin^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{mR^2}{8}\left[(1+\sin^2\varphi)\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\right]$$

Dunque,

$$K = \frac{m}{2}\left(4R^2\dot\theta^2\right) + \frac{mR^2}{8}\left(\dot\theta^2(1+\sin^2\varphi)+\dot\varphi^2\right)$$

$$= \frac{1}{8} mR^2\left[\left(17+\sin^2\varphi\right)\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\right]$$

(12.1)

$$= \frac{1}{2}\left[\dot\theta, \dot\varphi\right] \frac{mR^2}{4}\begin{bmatrix} 17+\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta \\ \dot\varphi\end{bmatrix}$$

EL_θ: $\dfrac{\partial K}{\partial\dot\theta} = \dfrac{1}{4} mR^2\left(17+\sin^2\varphi\right)\dot\theta$, $\dfrac{\partial K}{\partial\theta} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{1}{4}mR^2\left(17+\sin^2\varphi\right)\ddot\theta + \frac{1}{4}mR^2\left(2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi\,\dot\theta\right)$$

(12.2) $\dfrac{1}{4}mR^2\left[\left(17+\sin^2\varphi\right)\ddot\theta + \sin 2\varphi\,\dot\theta\,\dot\varphi\right] = +2mgR\sin\theta - 8cR^2\sin 2\theta$

EL_φ: $\dfrac{\partial K}{\partial\dot\varphi} = \dfrac{1}{4}mR^2\dot\varphi$, $\dfrac{\partial K}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{8}mR^2\left(2\sin\varphi\cos\varphi\right)\dot\theta^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi}\right) = \frac{1}{4}mR^2\ddot\varphi$$

(12.3) $\dfrac{1}{4}mR^2\left[\ddot\varphi - \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi\,\dot\theta^2\right] = -b\varphi$

5) Linearizzazione intorno agli equilibri.

La sollecitazione è conservativa, quindi, introdotti gli scarti dalle configurazioni di equilibrio

$$\vec{x} = \frac{\vec{q} - \vec{qe}}{\varepsilon} \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

l'equazioni linearizzate si scrivono

$$A \ddot{\vec{x}} + \mathcal{V} \vec{x} = 0$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta}^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\theta}} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\varphi}^2} \end{bmatrix}_{|\vec{qe}} , \qquad \mathcal{V} = \mathcal{H}_{IV}(\vec{qe})$$

Tenendo conto della (12.1) e della (7.2), si ottiene

$$\frac{mR^2}{4} \begin{bmatrix} 17 + \sin^2 \varphi_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{11|\vec{qe}} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque,

$$\begin{cases} \frac{mR^2}{4} 17 \ddot{x}_1 + 16cR^2(\lambda^2 - 1) x_1 = 0 \\ \frac{mR^2}{4} \ddot{x}_2 + b x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{intorno a } \vec{qe}^{(1)} \text{ e } qe^{(3)}$$

$$\begin{cases} \frac{mR^2}{4} 17 \ddot{x}_1 + 16cR^2(1-\lambda) x_1 = 0 \\ \frac{mR^2}{4} \ddot{x}_2 + b x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{intorno a } qe^{(2)} = (0,0)$$

$$\begin{cases} \frac{mR^2}{4} 17 \ddot{x}_1 + 16cR^2(1+\lambda) x_1 = 0 \\ \frac{mR^2}{4} \ddot{x}_2 + b x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{intorno } qe^{(3)} = (\pi, 0)$$

6) Reazioni vincolari esterne nei punti A e B, durante il moto

Scriviamo le ECD, tenendo conto che $\vec{\Phi}'_A = \phi'_x \vec{e}_x + \phi'_y \vec{e}_y$,
$\Psi'_B = \Psi'_x \vec{e}_x + \Psi'_z \vec{e}_z$.

$$(14.1) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi}'_A + \vec{\Psi}'_B = m\vec{a}_G \\ \vec{M}_B^{(est,att)} + (A-B) \times \vec{\phi}'_A = \dfrac{d\vec{L}_B}{dt} + \vec{V}_B \times m\vec{V}_G \end{cases}$$

$$(14.2) \quad \vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = 2R\left[\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_y - \left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_z\right]$$

Proiettando la I ECD sulla base fissa $\mathcal{B}$ si trova

$$(14.3) \quad \begin{cases} \vec{e}_x: & \phi'_x + \Psi'_x = 0 \\ \vec{e}_y: & -4cR\sin\theta + \phi'_y = 2mR\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right) \\ \vec{e}_z: & -mg + \Psi'_z = -2mR\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) \end{cases}$$

Dalle ultime 2 equazioni ricaviamo

$$(14.4) \quad \begin{cases} \phi'_y = 4cR\sin\theta + 2mR\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right) \\ \Psi'_z = mg + 2mR\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) \end{cases}$$

mentre la I fornisce

$$(14.5) \quad \Psi'_x = -\phi'_x$$

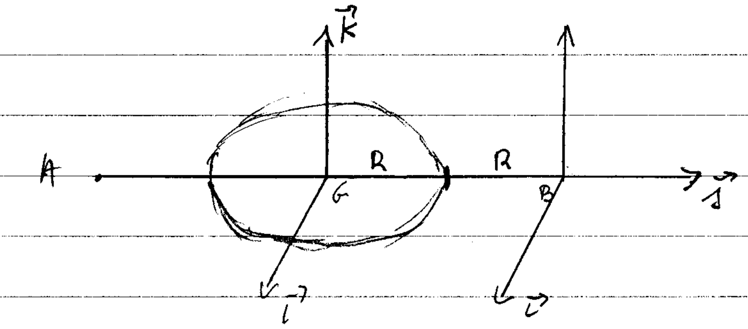
Abbiamo bisogno di un'altra equazione per trovare l'incognita ϕ'_x. Utilizziamo la II delle (14.1) nella forma

(15.1) $\vec{M}_B^{(est,att)} + (A-B) \times \Phi'_A = I_B(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times I_B(\vec{\omega}) + (G-B) \times m\, \vec{a}_B$

Calcolo I_B rispetto alla base solidale $\mathcal{B}'' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Sappiamo che $\mathcal{B}$ è una TPI(G) e rimane TPI per ogni punto degli API(G). Quindi, la terna $(B, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una TPI(B). Dunque, la matrice rappresentativa è diagonale

(15.2) $$[I_B]^{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}$$

ed ha nella diagonale i momenti d'inerzia rs. agli assi $(B, \vec{i})$, $(B, \vec{j})$, $(B, \vec{k})$. Possiamo calcolare tali momenti tramite il Teo di Huygens-Steiner.

(15.3) 

(15.4)
$$J_1 = \frac{1}{4} m R^2 + m \overline{BG}^2 = \frac{1}{4} m R^2 + m (2R)^2 = \frac{17}{4} m R^2$$
$$J_2 = \frac{1}{4} m R^2$$
$$J_3 = \frac{1}{2} m R^2 + \overline{BG}^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m (2R)^2 = \frac{9}{2} m R^2$$

Dunque

(15.5) $$[I_B]^{\mathcal{B}''} = m R^2 \begin{bmatrix} \frac{17}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Calcoliamo, ora, i termini del lato destro della (15.1).
Dalla (4.4) ricaviamo

$$(16.1)\quad \dot{\vec{\omega}} = -\left(\ddot{\theta}\cos\varphi - \sin\varphi\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{i} + \ddot{\varphi}\,\vec{j} - \left(\ddot{\theta}\sin\varphi + \cos\varphi\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{k}$$

Quindi,

$$(16.2)\quad I_B(\dot{\vec{\omega}}) = mR^2\left[\frac{17}{4}\left(\sin\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi} - \cos\varphi\,\ddot{\theta}\right)\vec{i} + \frac{1}{4}\ddot{\varphi}\,\vec{j} - \frac{9}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\varphi + \cos\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\vec{k}\right]$$

$$(16.3)\quad I_B(\vec{\omega}) = mR^2\left[\frac{17}{4}\left(-\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{i}\right) + \frac{1}{4}\dot{\varphi}\,\vec{j} - \frac{9}{2}\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{k}\right]$$

$$\vec{\omega}\times I_B(\vec{\omega}) = mR^2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\dot{\theta}\cos\varphi & \dot{\varphi} & -\dot{\theta}\sin\varphi \\ -\frac{17}{4}\cos\varphi\,\dot{\theta} & \frac{1}{4}\dot{\varphi} & -\frac{9}{2}\sin\varphi\,\dot{\theta} \end{vmatrix} = \quad (16.4)$$

$$= mR^2\,\vec{i}\left(-\frac{9}{2}\sin\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{4}\sin\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right) +$$
$$- mR^2\,\vec{j}\left(+\frac{9}{2}\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}^2 - \frac{17}{4}\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}^2\right) +$$
$$+ mR^2\,\vec{k}\left(-\frac{1}{4}\cos\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{17}{4}\cos\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)$$
$$= mR^2\left[-\frac{17}{4}\sin\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\vec{i} - \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}^2\,\vec{j} + 4\cos\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\vec{k}\right)$$

Quindi, sommando la (16.2) e la (16.4) otteniamo

$$I_B(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times I_B(\vec{\omega}) = mR^2\left[-\frac{17}{4}\cos\varphi\,\ddot{\theta}\,\vec{i} + \frac{1}{4}\left(-\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\varphi}\right)\vec{j} - \frac{1}{2}\left(9\ddot{\theta}\sin\varphi + \cos\varphi\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{k}\right]$$

Conviene proiettare tale vettore nella base intermedia $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
A tale scopo, usiamo la (3.3). Dunque,

$$I_B(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times I_B(\vec{\omega}) = mR^2 \Big[-\frac{17}{4} \cos\varphi \ddot{\theta} \left(\cos\varphi \vec{e}_1 + \sin\varphi \vec{e}_2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \sin 2\varphi \dot{\theta}^2 + \ddot{\varphi} \right) \vec{e}_3 +$$

$$- \frac{1}{2} \left(9\ddot{\theta} \sin\varphi + \cos\varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} \right) \left(\sin\varphi \vec{e}_1 - \cos\varphi \vec{e}_2 \right)$$

$$= mR^2 \left[-\frac{17}{4} \cos^2\varphi \ddot{\theta} - \frac{9}{2} \sin^2\varphi \ddot{\theta} - \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} \right] \vec{e}_1$$

$$+ mR^2 \left[\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \sin 2\varphi \, \dot{\theta}^2 + \ddot{\varphi} \right) \right] \vec{e}_3 +$$

$$+ mR^2 \left[-\frac{17}{4} \sin\varphi \cos\varphi \, \ddot{\theta} + \frac{9}{2} \sin\varphi \cos\varphi \, \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \cos^2\varphi \, \dot{\varphi} \dot{\theta} \right] \vec{e}_2$$

$$= mR^2 \left[-\frac{1}{4} \left(17 + \sin^2\varphi \right) \ddot{\theta} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \, \dot{\varphi} \dot{\theta} \right] \vec{e}_1$$

(17.1)

$$+ mR^2 \left[\frac{1}{8} \sin 2\varphi \, \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \cos^2\varphi \, \dot{\varphi} \dot{\theta} \right] \vec{e}_2 +$$

$$+ mR^2 \left[\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \sin 2\varphi \, \dot{\theta}^2 + \ddot{\varphi} \right) \right] \vec{e}_3$$

Infine, calcoliamo l'ultimo termine della (15.1)

(17.2) $$\vec{a}_B = \frac{d^2}{dt^2}(B-O) \overset{(4.5)}{=} \frac{d}{dt}\left(4R \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_4 \right) = 4R \left(\cos\theta \ddot{\theta} - \sin\theta \dot{\theta}^2 \right) \vec{e}_4$$

$$(G-B) \times m \vec{a}_B = -2R \vec{e}_3 \times m 4R \left(\cos\theta \ddot{\theta} - \sin\theta \dot{\theta}^2 \right) \vec{e}_4$$

(17.3) $$= -8mR^2 \left(\cos\theta \ddot{\theta} - \sin\theta \dot{\theta}^2 \right) \vec{e}_3 \times \left(\cos\theta \vec{e}_2 + \sin\theta \vec{e}_3 \right)$$

$$= +8mR^2 \left(\cos\theta \ddot{\theta} - \sin\theta \dot{\theta}^2 \right) \cos\theta \, \vec{e}_1$$

Quindi, il lato destro della (15.1) si scrive

$$I_B(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times I_B(\vec{\omega}) + (G-B) \times m\,\vec{a}_B =$$

(18.1)
$$= mR^2\left[-\frac{1}{4}\left(17+\sin^2\varphi\right)\ddot{\theta} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\,\dot{\varphi}\dot{\theta} + 8\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)\cos\theta\right]\vec{e}_1$$
$$+\, mR^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin^2\varphi\,\ddot{\theta} + \cos^2\varphi\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\right]\vec{e}_2$$
$$+\, mR^2\left[\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\varphi}\right)\right]\vec{e}_3$$

Tenendo conto delle (9.4), la II ECD proiettata sulla base intermedia

(18.2)
$$\begin{cases} \vec{e}_1: & 4R\,\Phi'_y\cos\theta - 2mgR\sin\theta = mR^2\left[-\frac{1}{4}\left(17+\sin^2\varphi\right)\ddot{\theta} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\,\dot{\varphi}\dot{\theta} + 8\cos\theta\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right)\right] \\ \vec{e}_2: & 4R\,\Phi'_x = \frac{mR^2}{2}\left(\frac{1}{4}\sin^2\varphi\,\ddot{\theta} + \cos^2\varphi\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right) \\ \vec{e}_3: & -k\varphi = \frac{mR^2}{4}\left(\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\dot{\theta}^2\right) \end{cases}$$

La II della (18.2) fornisce

(8.3)
$$\Phi'_x = \frac{mR}{8}\left(\frac{1}{4}\sin^2\varphi\,\ddot{\theta} + \cos^2\varphi\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)$$

che, sostituita nella (14.5) completa la soluzione. Si noti che, al contrario della Statica, in dinamica le reazioni in A e in B hanno una componente non appartenente al piano (y,z), dovuta alle forze d'inerzia.

N.B. La III della (18.2) coincide con l'EL_φ (12.3). Inoltre, sostituendo la I della (14.4) nella I della (8.2) si ottiene l'EL_θ (12.2).