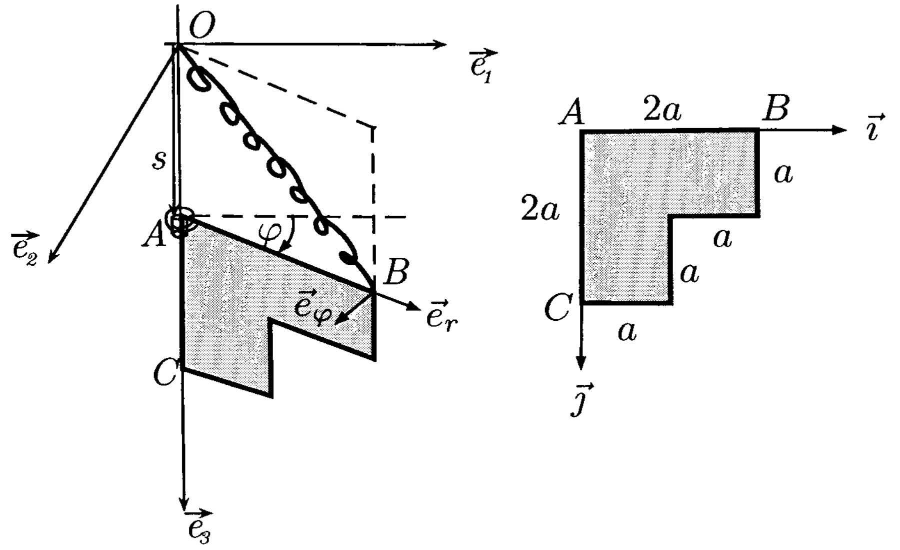
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 13 giugno 2016

(G. Tondo)



La lamina omogenea della figura, di massa $3m$, è vincolata ad una guida fissa verticale passante per O, mediante un collare cilindrico fissato al vertice A. Il vertice B è collegato a una molla di costante elastica c_1, che ha l'altro estremo fissato al punto O, mentre il vertice in A è collegato ad una molla angolare con asse verticale, di costante elastica $c_2 = 4c_1a^2$. Scelte come coordinate libere la coordinata $s \in \mathbb{R}$ di A rispetto a O lungo la guida verticale e l'angolo $\varphi \in \mathbb{R}$ della figura (scelto in modo che $\varphi = 0$ coincida con la posizione di riposo della molla angolare) si chiede di

STATICA

Determinare:

1) il baricentro G della lamina rispetto alla coppia di assi $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$;

2) le configurazioni di equilibrio della lamina e la loro stabilità;

3) la reazione e il momento della reazione vincolare della guida sulla lamina in A, all'equilibrio.

DINAMICA

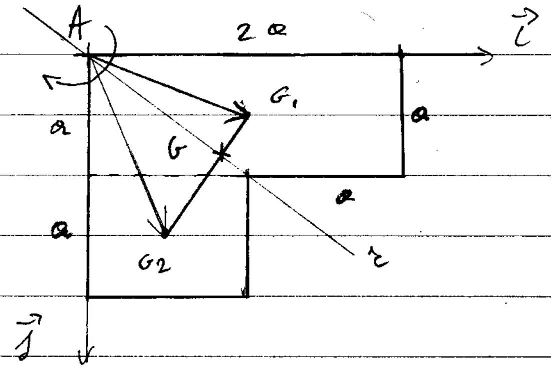
4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto;

5) determinarne l'integrale generale e dire se i moti complessivi sono periodici (giustificando la risposta);

6) calcolare la reazione e il momento della reazione vincolare della guida sulla lamina in A, durante i moti.

Tema del 13/06/2016

1) Baricentro della lamina



Si può determinare utilizzando la proprietà di simmetria e la proprietà distributiva:

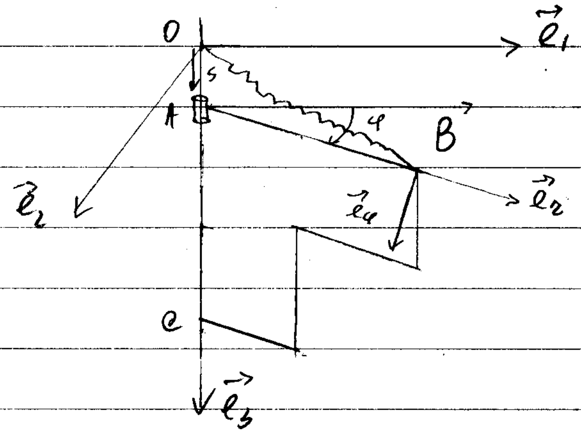
$$G = r \cap G_1G_2 .$$

Analiticamente:

$$G - A = \frac{2\cancel{m}\,(G_1 - A) + \cancel{m}\,(G_2 - a)}{3\cancel{m}} = \frac{1}{3}\left(2\left(a\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j}\right) + \left(\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}a\vec{j}\right)\right) =$$

$$= \frac{5}{6}a\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Cinematica



Il modello è costituito da un unico rigido ed ha 2 g.l. come si evince dal metodo di congelamenti successivi.
Coordinate libere: $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
Basi di versori:

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: "fissa"

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_3)$: "intermedia"

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2 \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \end{cases}$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: "solidale"

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{e}_r \\ \vec{j} = \vec{e}_3 \\ \vec{k} = -\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

2) Equilibri

La sollecitazione attiva, data dal peso, dalla molla in B e dalla molla angolare in A, è conservativa. Dunque, possiamo utilizzare il Teo. di stazionarietà dell'energia potenziale

$$V(s,\varphi) = -3m\vec{g}\cdot\vec{x}_G + \frac{1}{2}c_1\overline{OB}^2 + \frac{1}{2}c_2\varphi^2$$

$$\vec{x}_G := (G-O) = (G-A)+(A-O) = \frac{5a}{6}(\vec{i}+\vec{j}) + s\,\vec{e}_3 = \frac{5a}{6}\vec{e}_2 + \left(\frac{5}{6}a+s\right)\vec{e}_3$$

$$B-O = (B-A)+(A-O) = 2a\,\vec{e}_2 + s\,\vec{e}_3$$

$$\overline{OB}^2 = |B-O|^2 = 4a^2+s^2$$

Allora

$$V(s,\varphi) = -3mg\,\vec{e}_3\cdot\left(\frac{5}{6}a\,\vec{e}_2 + \left(\frac{5}{6}a+s\right)\vec{e}_3\right) + \frac{1}{2}c_1(4a^2+s^2) + \frac{1}{2}c_2\varphi^2$$

trascurando le costanti

$$= -3mgs + \frac{1}{2}c_1s^2 + \frac{1}{2}c_2\varphi^2$$

Cerchiamo i punti stazionari di V.

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -3mg + c_1 s = -Q_s$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = c_2\varphi = 4c_1a^2\varphi = -Q_\varphi$$

Le eq. pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -3mg + c_1 s = 0 \\ 4c_1 a^2 \varphi = 0 \end{cases} \iff \begin{aligned} s_e &= \frac{3mg}{c_1} \\ \varphi_e &= 0 \end{aligned}$$

Dunque, esiste l'unica configurazione di equilibrio

$$\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e) = \left(\frac{3mg}{c_1}, 0\right)$$

Studiamone la stabilità:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = c_1, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 4c_1 a^2$$

Allora

$$\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 4c_1 a^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &\mathcal{H}_{11} = c_1 > 0 \\ &\det(\mathcal{H}_{V|q_e}) > 0 \end{aligned}$$

Quindi, $\vec{q}_e$ è un punto di minimo per V, dunque è un equilibrio stabile

2) Reazioni in A all'equilibrio

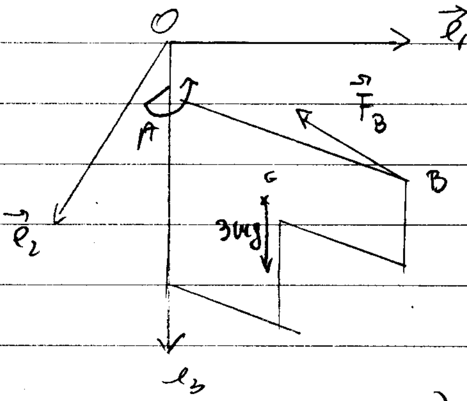
L'insieme delle reazioni del vincolo in A si può sempre ridurre a una forza e una coppia

(4.1) $$\mathcal{L}^{(reatt)} = \left\{ (A, \vec{\phi}), \vec{\mu} \right\}$$

Poiché il vincolo è, per ipotesi, non dissipativo

(4.2) $$\vec{\phi} \cdot \vec{e}_3 = 0, \quad \vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0,$$

sia in statica, sia in dinamica. Per determinare $\mathcal{L}^{(reatt)}$ scriviamo le ECS sul modello.



(4.3) $$\begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est,att)} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

(4.4) $$\vec{R}^{(est,att)} = 3m\vec{g} + \vec{F}_B = 3m\vec{g} - c_1(B-O) = 3mg\,\vec{e}_3 - c_1(2a\,\vec{e}_r + s\,\vec{e}_3)$$

Quindi

(4.5) $$\vec{\phi} = -\vec{R}^{(est,att)}_{|q_e} = \cancel{-(3mg - c_1 s_e)\vec{e}_3} + 2c_1 a\,\vec{e}_{r|q_e} = 2c_1 a\,\vec{e}_1$$

$$\vec{M}_A^{(est,att)} = -c_2\varphi\,\vec{e}_3 + (G-A)\times 3m\vec{g} + (B-A)\times \vec{F}_B$$

(4.6) $$= -c_2\varphi\,\vec{e}_3 + \frac{5}{6}a\,(\vec{i}+\cancel{\vec{j}})\times 3mg\,\vec{j} + 2a\,\vec{e}_r \times \left(-c_1(\cancel{2a\,\vec{e}_r} + s\,\vec{e}_3)\right)$$

$$= -c_2\varphi\,\vec{e}_3 + \frac{5}{2}mga\,\vec{K} + 2ac_1 s\,\vec{e}_\varphi = -c_2\varphi\,\vec{e}_3 + a\left(\frac{5}{2}mg + 2c_1 s\right)\vec{e}_\varphi$$

Allora, in $\vec{q}_e$ vale

$$(5.1)\quad \vec{\mu} = -\vec{H}_A^{(ext,att)}\Big|_{\vec{q}_e} = a\left(\frac{5}{2}mg - 2c_1 s_e\right)\vec{e}_2 = a\left(\frac{5}{2}mg - 2c_1\frac{3mg}{c_1}\right)\vec{e}_2$$
$$= -\frac{7}{2}mga\,\vec{e}_2$$

Dinamica

4) Eq. differenziali pure di moto

Scriviamo le EL. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello. Conviene utilizzare la rappresentazione

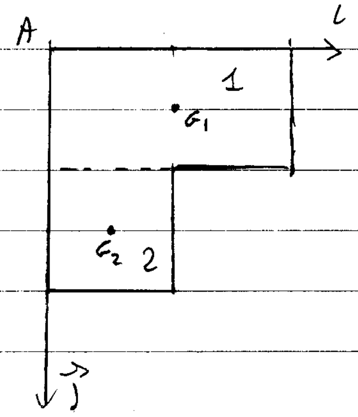
$$(5.2)\quad K = \frac{1}{2}(3m)\left|\vec{v}_A\right|^2 + \cancel{3m\,\vec{v}_A\cdot\vec{\omega}\times(G-A)} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I_A(\vec{\omega}),$$

in cui il prodotto misto si annulla poiché $\vec{v}_A \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{e}_3$.

$$(5.3)\quad \vec{v}_A = \dot{s}\,\vec{e}_3, \qquad \vec{\omega}\cdot I_A(\vec{\omega}) = \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_3\cdot I_A(\vec{e}_3)$$

Calcolo di $\vec{e}_3\cdot I_A(\vec{e}_3)$

Sappiamo che $\vec{e}_3\cdot I_A(\vec{e}_3)$ è il momento d'inerzia del rigido rispetto all'asse $(A, \vec{e}_3\equiv\vec{i})$. Calcoliamolo.



$$I_{A3} = I_{A3}^{(1)} + I_{A3}^{(2)} = \frac{1}{3}(2m)(2a)^2 + \frac{1}{3}ma^2 = \left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)ma^2 =$$
$$(5.4)\quad = 3ma^2$$

Allora

(6.1) $$K = \frac{3}{2} m \dot{s}^2 + \frac{3}{2} m a^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2} m \left(\dot{s}^2 + a^2 \dot{\varphi}^2\right)$$

EL_s: $\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = 3m\dot{s}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{s}}\right) = 3m\ddot{s}$, $\frac{\partial K}{\partial s} = 0$

$$3m\ddot{s} = Q_s$$

(6.2) $$\boxed{3m\ddot{s} = 3mg - c_1 s}$$

EL_φ: $\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = 3ma^2\dot{\varphi}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 3ma^2\ddot{\varphi}$, $\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$

$$3ma^2\ddot{\varphi} = Q_\varphi$$

(6.3) $$\boxed{3m\cancel{a^2}\ddot{\varphi} = -4c_1\cancel{a^2}\varphi}$$

Dunque, il sistema delle EL è

(6.4) $$\begin{cases} 3m\ddot{s} + c_1 s = 3mg \\ 3m\ddot{\varphi} + 4c_1\varphi = 0 \end{cases}$$

cioè un sistema di EDO del 2° ordine, lineare a coefficienti costanti e disaccoppiate fra loro.

5) Integriamo il sistema delle EL (6.4)

La prima è non omogenea

(7.1) $\ddot{s} + \frac{c_1}{3m} s = g$,

quindi il suo integrale generale è somma di una soluzione particolare, per esempio la soluzione stazionaria

(7.2) $s_e = \frac{3mg}{c_1}$

e dell'integrale generale dell'omogenea associata

(7.3) $\tilde{s}(t) = A\cos(\nu_1 t + \alpha)$ $\nu_1 = \sqrt{\frac{c_1}{3m}}$

Quindi

(7.4) $s(t) = A\cos(\nu_1 t + \alpha) + \frac{3mg}{c_1}$

la seconda delle EL (6.4) è omogenea

(7.5) $\ddot{\varphi} + \frac{4c_1}{3m}\varphi = 0$

dunque

(7.6) $\varphi(t) = B\cos(\nu_2 t + \beta)$ $\nu_2 = \sqrt{\frac{4c_1}{3m}}$

Il rapporto tra i periodi della (7.4) e della (7.6) vale

$\frac{T_s}{T_\varphi} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{4c_1}{3m}\frac{3m}{c_1}} = 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ moto periodico.

6) Reazioni vincolari e momento delle reazioni in dinamica: $\mathcal{S}' = \{(A, \vec{\Phi}'), \vec{\mu}'\}$

Scriviamo le ECD nel modello:

$$(8.1)\quad \begin{cases} \vec{\Phi}' + \vec{R}^{(e^*, e^{**})} = 3m\,\vec{a}_G \\ \vec{\mu}' + \vec{M}_A^{(e^*, e^{**})} = \dfrac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{V}_A \times 3m\,\vec{V}_G \end{cases}$$

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = \frac{d^2}{dt^2}(G-O) = \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{6}a\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{s}\,\vec{e}_3\right) = \frac{5}{6}a\,\ddot{\vec{e}}_r + \ddot{s}\,\vec{e}_3$$

$$\ddot{\vec{e}}_r = \frac{d}{dt}\dot{\vec{e}}_r = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = -\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r + \ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$(8.2)\quad \vec{a}_G = -\frac{5}{6}a\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r + \frac{5}{6}a\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \ddot{s}\,\vec{e}_3$$

Dunque

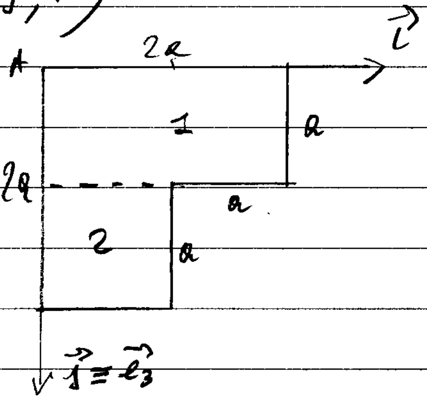
$$(8.3)\quad \vec{\Phi}' = -\vec{R}^{(e^*, e^{**})} + 3m\,\vec{a}_G = -3mg\,\vec{e}_3 + c_1\left(2a\,\vec{e}_r + s\,\vec{e}_3\right) + 3m\left(-\frac{5}{6}a\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r + \frac{5}{6}a\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \ddot{s}\,\vec{e}_3\right)$$

$$(8.4)\quad \vec{\Phi}' = \left(2ac_1 - \frac{5}{2}ma\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \frac{5ma}{2}\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \left(3m\ddot{s} - 3mg + c_1 s\right)\vec{e}_3 \overset{(6.2)}{=} \left(2ac_1 - \frac{5}{2}ma\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \frac{5ma}{2}\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Poiché il modello è rigido, la II ECD si può scrivere

$$\vec{\mu}^{\,I} + \vec{M}_A^{(est,ext)} = I_A(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times I_A(\vec{\omega}) + (G-A) \times 3m\,\vec{a}_A$$

Calcoliamo I_A rispetto alla terna $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



$$I_{Axx} = I_{Ayy} \overset{(5.4)}{=} 3ma^2$$

$$I_{Azz} = I_{Axx} + I_{Ayy} = 6ma^2$$

$$I_{Axy} = I^{(1)}_{Axy} + I^{(2)}_{Axy}$$

$$I^{(1)}_{Axy} = -\int_{R_1} \rho\, xy\, dR_1 = -\frac{2m}{2a^2}\int_0^{2a} x\left(\int_0^a y\,dy\right)dx =$$

$$= -\frac{m}{a^2}\int_0^{2a} x\,\frac{a^2}{2}\,dx = -\frac{m}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a} = -\frac{m}{4}\,4a^2 = -ma^2$$

$$I^{(2)}_{Axy} = -\int_{R_2} \rho\, xy\, dR_2 = -\frac{m}{a^2}\int_0^a x\left(\int_a^{2a} y\,dy\right)dx = -\frac{m}{a^2}\int_0^a x\left[\frac{y^2}{2}\right]_a^{2a}dx$$

$$= -\frac{m}{a^2\,2}\left(4a^2 - a^2\right)\int_0^a x\,dx = -\frac{3}{2}\,m\,\frac{a^2}{2} = -\frac{3}{4}\,ma^2$$

Quindi

$$I_{Axy} = -\frac{7}{4}\,ma^2$$

Dunque, la matrice di I_A rs. alla terna $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ è

$$I_A = ma^2 \begin{bmatrix} 3 & -\frac{7}{4} & 0 \\ -\frac{7}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Allora,

$$I_A(\vec{e}_3) = I_A(\vec{j}) = ma^2\left(-\frac{7}{4}\vec{i} + 3\vec{j}\right) = \left(-\frac{7}{4}\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3\right)ma^2$$

$$I_A(\dot{\vec{\omega}}) = I_A(\ddot{\varphi}\vec{e}_3) = \ddot{\varphi}\, I_A(\vec{e}_3) = \ddot{\varphi}\left(-\frac{7}{4}\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3\right)ma^2$$

$$\vec{\omega}\times I_A(\vec{\omega}) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3\times I_A(\dot{\varphi}\vec{e}_3) = \dot{\varphi}^2\vec{e}_3\times I(\vec{e}_3) = \dot{\varphi}^2\vec{e}_3\times\left(-\frac{7}{4}\vec{e}_2 + \cancel{3\vec{e}_3}\right)ma^2$$

$$= -\frac{7}{4}ma^2\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_3\times\vec{e}_2 = -\frac{7}{4}ma^2\dot{\varphi}^2\vec{e}_\varphi$$

$$(G-A)\times 3m\vec{a}_A = \frac{5}{6}a\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\times 3m\ddot{s}\,\vec{e}_3 = \frac{5}{2}ma\ddot{s}\,\vec{i}\times\vec{j} =$$

$$= \frac{5}{2}ma\ddot{s}\,\vec{k} = -\frac{5}{2}ma\ddot{s}\,\vec{e}_\varphi$$

Dunque

$$\vec{\mu}' + \vec{M}_A^{(at,att)} = \left(-\frac{7}{4}\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3\right)ma^2\ddot{\varphi} - \frac{7}{4}ma^2\dot{\varphi}^2\vec{e}_\varphi - \frac{5}{2}ma\ddot{s}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\mu}' = c_2\varphi\,\vec{e}_3 - a\left(-\frac{5}{2}mg + 2c_1 s\right)\vec{e}_\varphi + \left(-\frac{7}{4}\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3\right)ma^2\ddot{\varphi} - ma\left(\frac{7}{4}a\dot{\varphi}^2 + \frac{5}{2}\ddot{s}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\overset{(6.3)}{=} -\frac{7}{4}ma^2\ddot{\varphi}\,\vec{e}_2 - a\left(-\frac{5}{2}mg + 2c_1 s + \frac{7}{4}ma\dot{\varphi}^2 + \frac{5}{2}m\ddot{s}\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left(4c_1a^2\varphi + 3ma^2\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_3$$