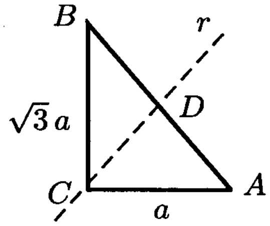
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

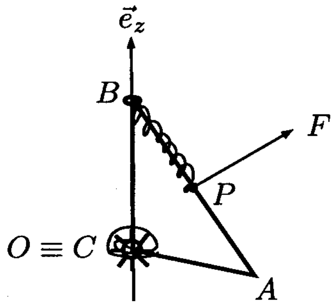
Trieste, 18 luglio 2016. (G. Tondo)

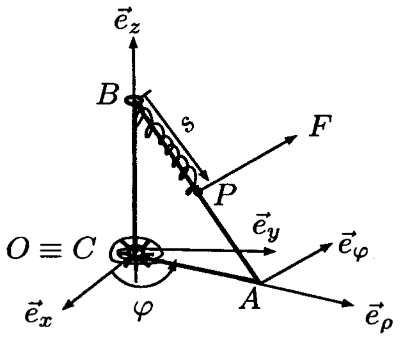
Si consideri il telaio *omogeneo* della figura, a forma di triangolo rettangolo, di massa totale M e con i cateti di lunghezza $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = \sqrt{3}\, a$.

1) Si calcoli il baricentro G e il momento d'inerzia del telaio rispetto alla mediana r passante per il vertice C.



Il telaio suddetto è vincolato a ruotare, come in figura, attorno all'asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ passante per C, mediante una cerniera sferica fissa in $O \equiv C$ e un collare sottile in B. Inoltre, sull'ipotenusa del telaio è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m. Sul telaio agiscono: il peso proprio ed una molla *angolare* di richiamo posta in C e di costante elastica c. Sul punto P agiscono: il peso proprio, la forza di richiamo di una molla fissata nel vertice B e di costante elastica $b > mg\,\sqrt{3}/(4a)$, una forza F sempre ortogonale al telaio, come in figura.





STATICA

Detta s l'ascissa di P su AB e φ l'angolo tra il piano del telaio e il piano verticale fisso in cui la molla angolare è a riposo, individuato dagli assi $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, determinare:

2) le configurazioni di equilibrio del modello $\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e)$;

3) le reazioni vincolari esterne sul telaio in C e in B, all'equilibrio.

DINAMICA

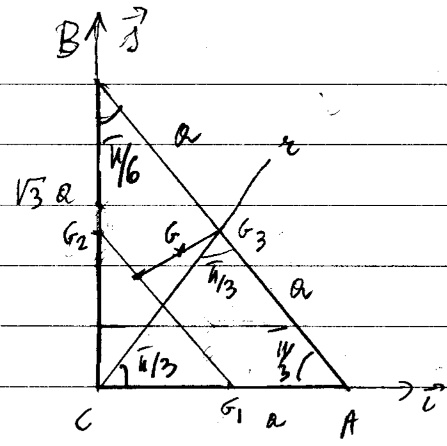
4) Scrivere le equazione differenziali pure di moto;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) calcolare la reazione vincolare interna sul punto P, durante il moto.

Tema del 18/07/2016

1) Per calcolare il baricentro del telaio, applichiamo la proprietà distributiva ai tre lati omogenei.



$$G - C = \frac{m_1(G_1 - C) + m_2(G_2 - C) + m_3(G_3 - C)}{M} \qquad \rho = \frac{M}{(3+\sqrt{3})a}$$

$$= \frac{1}{M}\left(\frac{M}{3+\sqrt{3}}\,\frac{a}{2}\,\vec{i} + \frac{M\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\,\vec{j} + \frac{M\,2}{3+\sqrt{3}}\left(\frac{a}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{3}\,a}{2}\,\vec{j}\right)\right)$$

$$m_1 = \frac{M}{3+\sqrt{3}} \qquad m_2 = \frac{M}{(3+\sqrt{3})\cancel{a}}\sqrt{3}\cancel{a} \qquad m_3 = \frac{M}{(3+\sqrt{3})\cancel{a}}2\cancel{a}$$

$$= a\left[\frac{3}{2(3+\sqrt{3})}\,\vec{i} + \frac{1}{3+\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\vec{j}\right] =$$

$$= \frac{a}{2(3+\sqrt{3})}\left(3\vec{i} + \left(3 + 2\sqrt{3}\right)\vec{j}\right)$$

N.B. Il baricentro del telaio appartiene alla mediana CG_3 per simmetria, ma NON coincide con il baricentro geometrico del triangolo. Sappiamo dall'Es. 5.2.3, pag. 70 degli Appunti che questo succede per tutti i telai triangolari, eccetto per quelli equilateri.

Calcolo del momento d'inerzia I_r.

a) Il modo più veloce è quello di calcolare I_r come somma dei momenti dei tre lati rispetto ad r

$$I_r = I_r^{(1)} + I_r^{(2)} + I_r^{(3)}$$

Per calcolare il momento d'inerzia di un'asta omogenea lunga L, r.s. ad una retta passante per un estremo e formante un angolo α con l'asta, si usa la formula

$$I_r(\alpha) = \frac{1}{3} m L^2 \sin^2\alpha$$

Dunque, nel nostro caso

$$I_r^{(1)} = \frac{1}{3} m_1 a^2 \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}\frac{M a^2}{3+\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{M a^2}{4(3+\sqrt{3})}$$

$$I_r^{(2)} = \frac{1}{3} m_2 (\sqrt{3}a)^2 \sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\frac{M\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\, 3a^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{M}{(3+\sqrt{3})4}\sqrt{3}\, a^2$$

Analogamente, per calcolare il momento d'inerzia di un'asta omogenea lunga L (e di massa m), r.s. ad una retta passante per il centro e formante un angolo α con l'asta, si può usare la formula

$$I_r(\alpha) = \frac{1}{12} m L^2 \sin^2\alpha$$

Dunque,

$$I_r^{(3)} = \frac{1}{12} m_3 (2a)^2 \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{12}\frac{M\,2}{3+\sqrt{3}}\, 4a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{M}{(3+\sqrt{3})2} a^2$$

$$I_r = \frac{M a^2}{3+\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{M a^2 \cancel{(3+\sqrt{3})}}{\cancel{3+\sqrt{3}}\; 4} = \frac{1}{4} M a^2$$

b) Metodo standard

Calcoliamo la matrice d'inerzia del telaio rispetto alla terna $(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Denotando con $(x, y, 0)$ le coordinate di un generico punto P del telaio, si ha

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx}+I_{yy} \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \cancel{I_{xx}^{(1)}} + I_{xx}^{(2)} + I_{xx}^{(3)}$$

$$I_{xx}^{(2)} = \frac{1}{3} m_2 (\sqrt{3}a)^2 = \frac{1}{\cancel{3}} \frac{M\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cancel{3} a^2 = \frac{M\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} a^2$$

$$I_{xx}^{(3)} = \frac{1}{3} m_3 (2a)^2 \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \frac{M\, 2}{3+\sqrt{3}} 4a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2Ma^2}{3+\sqrt{3}}$$

Quindi

$$I_{xx} = \frac{M}{3+\sqrt{3}} (2+\sqrt{3}) a^2$$

Analogamente,

$$I_{yy} = I_{yy}^{(1)} + \cancel{I_{yy}^{(2)}} + I_{yy}^{(3)}$$

$$I_{yy}^{(1)} = \frac{1}{3} m_1 a^2 = \frac{1}{3} \frac{M}{3+\sqrt{3}} a^2$$

$$I_{yy}^{(3)} = \frac{1}{3} m_3 (2a)^2 \sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \frac{M}{3+\sqrt{3}} 2 \cancel{4} a^2 \frac{1}{\cancel{4}} = \frac{2}{3} \frac{M}{3+\sqrt{3}} a^2$$

Quindi

$$(2.21)\quad I_{yy} = \frac{M}{3+\sqrt{3}} a^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{M}{3+\sqrt{3}} a^2$$

Il momento deviatore rs. ai piani passanti per C e ortogonali agli assi $(C, \vec{i})$ e $(C, \vec{j})$ è dato da

$$I_{xy} = -\frac{M}{(3+\sqrt{3})a} \int_{R} x\, y\, dR =$$

$$= -\frac{M}{(3+\sqrt{3})a} \int_{R_1} \cancel{x\, y}\, dR_1 - \frac{M}{(3+\sqrt{3})a} \int_{R_2} xy\, dR_2 - \frac{M}{(3+\sqrt{3})a} \int_{R_3} xy\, dR_3$$

L'integrale suddetto si riduce, quindi, a un integrale di linea lungo l'ipotenusa del triangolo che si può parametrizzare con l'ascissa curvilinea s

$$\gamma : [0, 2a] \mapsto \left(x(s) = \frac{s}{2},\ y(s) = \sqrt{3}a - \frac{s\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\dot{\vec{\gamma}} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \Rightarrow |\dot{\gamma}|^2 = 1$$

Dunque

$$\int_{R_3} x\, y \, dR_3 = \int_0^{2a} x(s)\, y(s)\, |\dot{\gamma}(s)|\, ds =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{s\sqrt{3}}{2}\left(a-\frac{s}{2}\right) ds = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[a\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{6}\right]_0^{2a} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2a^3-\frac{4}{3}a^3\right) = \frac{a^3}{\sqrt{3}}$$

Quindi, il momento deviatore non nullo è

$$I_{xy} = -\frac{M}{(3+\sqrt{3})a}\,\frac{a^{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{M}{3+\sqrt{3}}\,\frac{a^2}{\sqrt{3}},$$

$$I_C = \frac{Ma^2}{3+\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Allora,

$$I_2 = \vec{e}_2 \cdot I_C(\vec{e}_2) = \frac{1}{2}[1,\sqrt{3}]\, I_C \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix} = \frac{1}{4}[1,\sqrt{3}]\,\frac{Ma^2}{3+\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

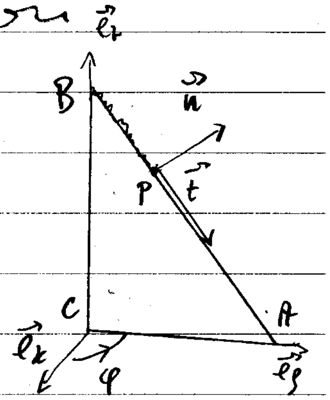
$$= \frac{Ma^2}{4(3+\sqrt{3})}[1,\sqrt{3}]\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3}-1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{4(3+\sqrt{3})}\left(2+\sqrt{3}-\cancel{1}-\cancel{1}+3\right) = \frac{Ma^2}{4}$$

Cinematica

Il modello è formato da un rigido più un punto vincolato sul esso. Con il metodo dei congelamenti successivi, si conclude che ha 2 g.l.. Come coordinate libere, si possono usare l'angolo φ di rotazione del telaio e l'ascissa curvilinea s di P sul lato AB

$$\varphi \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leq s \leq 2a$$

Utilizzeremo le seguenti basi di versori



$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: base "fissa"

$(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: base "solidale" al telaio

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: base "solidale" al telaio

$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{k})$: base "adattata" al vincolo del punto P

Le trasformazioni sono

$$\begin{cases} \vec{e}_\xi = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\xi - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\xi + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{e}_\xi \\ \vec{j} = \vec{e}_z \\ \vec{k} = -\vec{e}_\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_\xi = \vec{i} \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{k} \\ \vec{e}_z = \vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{t} = \dfrac{\vec{\gamma}'}{|\gamma'|} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\imath} - \sqrt{3}\,\vec{\jmath}\right) \\ \vec{n} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right) \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\imath} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{t} + \sqrt{3}\,\vec{n}\right) \\ \vec{\jmath} = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\,\vec{t} + \vec{n}\right) \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Componendo le trasformazioni

$$\begin{cases} \vec{t} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{e}_\rho - \sqrt{3}\,\vec{e}_z\right) \\ \vec{n} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{e}_\rho + \vec{e}_z\right) \\ \vec{k} = -\vec{e}_\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_\rho = \dfrac{1}{2}\left(\vec{t} + \sqrt{3}\,\vec{n}\right) \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{k} \\ \vec{e}_z = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\,\vec{t} + \vec{n}\right) \end{cases}$$

$$B - O = \sqrt{3}\,a\,\vec{e}_z$$

$$G - O = G - C = \frac{a}{2(3+\sqrt{3})}\left(3\vec{\imath} + (3+2\sqrt{3})\vec{\jmath}\right) = \frac{a}{2(3+\sqrt{3})}\left[3\,\vec{e}_\rho + (3+2\sqrt{3})\,\vec{e}_z\right]$$

$$P - O = (P-B) + (B-O) = s\,\vec{t} + \sqrt{3}\,a\,\vec{e}_z = \frac{s}{2}\left(\vec{\imath} - \sqrt{3}\,\vec{\jmath}\right) + \sqrt{3}\,a\,\vec{e}_z$$

$$= \frac{s}{2}\,\vec{e}_\rho + \sqrt{3}\left(a - \frac{s}{2}\right)\vec{e}_z = P - C$$

Dunque,

$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = \frac{s}{2}\,\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \frac{s}{2}\,\vec{e}_\varphi\,, \qquad \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial s} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_\rho - \sqrt{3}\,\vec{e}_z\right)$$

Statica

2) Per trovare gli equilibri, scriviamo le eq. pure di equilibrio. A questo scopo, calcoliamo le forze lagrangiane, tramite l'energia potenziale, per la sollecitazione conservativa; tramite la definizione per il carico follower

$$\vec{F}_P = F\,\vec{e}_\varphi$$

$$V(s,\varphi) = \frac{1}{2} c\,\varphi^2 \cancel{- M\,\vec{g}\cdot(G-O)} + \frac{1}{2} b\,s^2 - m\,\vec{g}\cdot(P-O)$$

$$= \frac{1}{2} c\,\varphi^2 + \frac{1}{2} b\,s^2 + m g\,\vec{e}_2 \cdot \left(\frac{s}{2}\,\vec{e}_\varphi + \sqrt{3}\left(a - \frac{s}{2}\right)\vec{e}_2\right)$$

$$= \frac{1}{2} c\,\varphi^2 + \frac{1}{2} b\,s^2 + m g \sqrt{3}\left(a - \frac{s}{2}\right)$$

$$Q_\varphi^{(con)} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -c\,\varphi$$

$$Q_s^{(con)} = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\left(b s - m g \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = F\,\vec{e}_\varphi \cdot \frac{s}{2}\,\vec{e}_\varphi = \frac{F s}{2}$$

$$Q_s^{(foll)} = \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial s} = F\,\vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{2}\left(\vec{e}_\varphi - \sqrt{3}\,\vec{e}_2\right) = 0$$

Quindi

$$Q_\varphi = Q_\varphi^{(con)} + Q_\varphi^{(foll)} = -c\varphi + F\frac{s}{2}$$

$$Q_s = Q_s^{(con)} + Q_s^{(foll)} = -bs + \frac{mg}{2}\sqrt{3}$$

Dunque, le eq. pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -c\varphi + F\frac{s}{2} = 0 \\ -bs + \frac{mg\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi_e = \frac{F}{c}\frac{s_e}{2} = \frac{F}{2c}\frac{mg\sqrt{3}}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{Fmg}{bc} \\ s_e = \frac{mg}{b}\frac{\sqrt{3}}{2} < 2a \end{cases}$$

Pertanto, $\exists!$ una configurazione di equilibrio

$$\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{mg}{b}, \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{F\,mg}{bc}\right)$$

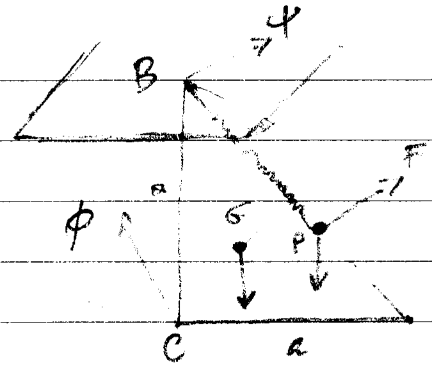
3) Reazioni nel telaio in B e in C all'equilibrio

Poiché la cerniera sferica in C e il carrello sottile in B sono lisci, esercitano le reazioni vincolari

$$\mathcal{L}^{(reaz)} = \{(C, \vec{\Phi}), (B, \vec{\Psi})\},$$

con $\vec{\Phi}_C$ generica e $\vec{\Psi}_B \cdot \vec{e}_3 = 0$

Per determinarle, usiamo le ECS su tutto il modello



$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,ext)} + \vec{\phi}_C + \vec{\psi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_C^{(est,ext)} + (B-C)\times\vec{\psi}_B = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{R}^{(est,est)} = -(M+m)g\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\varphi\,,$$

$$\vec{M}_C^{(est,est)} = (G-C)\times(-Mg\,\vec{e}_z) + (P-C)\times(-mg\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\varphi) - c\varphi\,\vec{e}_z$$

$$\overset{!}{=} \frac{a}{2(3+\sqrt{3})}\left(3\vec{e}_\rho + (3+2\sqrt{3})\vec{e}_z\right)\times(-Mg)\,\vec{e}_z +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\vec{e}_\rho + \sqrt{3}\left(a-\frac{1}{2}\right)\vec{e}_z\right)\times\left(-mg\,\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\varphi\right) - c\varphi\,\vec{e}_z$$

$$= \frac{-3Mga}{2(3+\sqrt{3})}\,\vec{e}_\rho\times\vec{e}_z + \frac{1}{2}\left(-mg\,\vec{e}_\rho\times\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\rho\times\vec{e}_\varphi\right) +$$

$$+\sqrt{3}\left(a-\frac{1}{2}\right)F\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi - c\varphi\,\vec{e}_z$$

$$\overset{!}{=} \left(\frac{3Mga}{2(3+\sqrt{3})} + mg\frac{1}{2}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{F}{2} - c\varphi\right)\vec{e}_z - \sqrt{3}F\left(a-\frac{1}{2}\right)\vec{e}_\rho$$

Allora, dalla II ECS si ottiene

$$\vec{\psi}_B \times (B-C) = \vec{M}_C^{(est,est)} \quad \overset{\vec{\psi}_B\cdot\vec{e}_z = 0}{\Longrightarrow}$$

$$\vec{\psi}_B = \frac{(B-C)\times\vec{M}_C^{(est,est)}}{|B-C|^2}$$

Dunque,

$$\vec{\psi}_B = \frac{\sqrt{3}\,a}{\sqrt{3a^2}}\,\vec{e}_z \times \left[\left(\frac{Mga}{2}\,\frac{3}{3+\sqrt{3}} + mg\frac{s_e}{2}\right)\vec{e}_\varphi + \cancel{\left(\frac{F s_e}{2} - c\varphi_e\right)\vec{e}_z} - \sqrt{3}F\left(a - \frac{s_e}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{3}}\left(\frac{M_g a}{2}\,\frac{3}{3+\sqrt{3}} + \frac{mg}{2}\,\frac{mg\sqrt{3}}{2b}\right)\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi - \frac{1}{a}F\left(a - \frac{mg\sqrt{3}}{2\cdot 2b}\right)\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi$$

$$= -\frac{1}{a\sqrt{3}}\left(\frac{Mga}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{(mg)^2\sqrt{3}}{4b}\right)\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e} + F\left(\frac{\sqrt{3}mg}{4ab} - 1\right)\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e}$$

Dalla II CS si ricava

$$\vec{\phi}_c = -\vec{\psi}_B - \vec{R}_1^{(e,+,e\pi)} = \left(\frac{Mg}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{(mg)^2}{4ab}\right)\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e} - F\left(\frac{\sqrt{3}mg}{4ab} - \cancel{1}\right)\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e} +$$

$$+ (M+m)g\,\vec{e}_z - \cancel{F\,\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e}}$$

$$= \left(\frac{Mg}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{(mg)^2}{4ab}\right)\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e} - \frac{F\,mg\sqrt{3}}{4ab}\,\vec{e}_\varphi\Big|_{\vec{q}_e} + (M+m)g\,\vec{e}_z$$

Dinamica

Scriviamo le eq. di Lagrange relative a (s,φ).
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica

$$K = K^{(tel)} + K^{(P)}$$

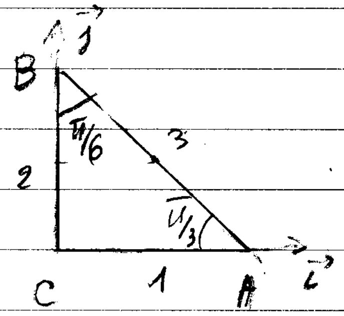
$$K^{(tel)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot I_C(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\cdot I_C(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 I_{Cz},$$

dove

$$I_{Cz} = \vec{e}_z\cdot I_C(\vec{e}_z)$$

è il momento d'inerzia del telaio rispetto all'asse di rotazione BC.

$$I_{Cz} = I_{Cz}^{(1)} + I_{Cz}^{(2)} + I_{Cz}^{(3)} = I_{yy} \overset{(20.1)}{=} \frac{M}{3+\sqrt{3}}\,a^2$$



Quindi,

$$K^{(tel)} = \frac{1}{2}\,\frac{Ma^2}{3+\sqrt{3}}\,\dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m \left|\vec{V}_P\right|^2$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)}$$

$$\vec{v}_P^{(rel)} = \dot{s}\,\vec{t}$$

$$\vec{v}_P^{(tr)} = \vec{\omega} \times P-O = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \left[\frac{s}{2}\vec{e}_\rho + \sqrt{3}\left(a - \frac{s}{2}\right)\vec{e}_z\right] =$$

$$= \frac{s}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \frac{s}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Dunque

$$\vec{v}_P = \dot{s}\,\vec{t} + \frac{s}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = \frac{\dot{s}}{2}\left(\vec{e}_\rho - \sqrt{3}\,\vec{e}_z\right) + \frac{s}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\left|\vec{v}_P\right|^2 = \frac{1}{4}\left(\dot{s}^2 + 3\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2\right) = \dot{s}^2 + \frac{s^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{s^2}{4}\dot{\varphi}^2\right)$$

!

Allora,

$$K = \frac{1}{2}\left[\frac{Ma^2}{3+\sqrt{3}}\dot{\varphi}^2 + m\left(\dot{s}^2 + \frac{s^2}{4}\dot{\varphi}^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[m\dot{s}^2 + \left(\frac{Ma^2}{3+\sqrt{3}} + m\frac{s^2}{4}\right)\dot{\varphi}^2\right]$$

Dunque, le EL sono

EL_s: $\dfrac{\partial K}{\partial \dot s} = m \dot s$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot s}\right) = m \ddot s$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = m \frac{s}{4} \dot\varphi^2$$

$$(11.1) \quad m\left(\ddot s - \frac{s}{4}\dot\varphi^2\right) = -bs + \frac{mg}{2}\sqrt{3}$$

EL_φ: $\dfrac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = \left(\dfrac{Ma^2}{3+\sqrt3} + m\dfrac{s^2}{4}\right)\dot\varphi$, $\dfrac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = \left(\frac{Ma^2}{3+\sqrt3} + m\frac{s^2}{4}\right)\ddot\varphi + \frac{ms}{2}\dot s\dot\varphi$$

$$(11.2) \quad \left(\frac{Ma^2}{3+\sqrt3} + m\frac{s^2}{4}\right)\ddot\varphi + \frac{m}{2}s\dot s\dot\varphi = -c\varphi + \frac{Fs}{2}$$

5) Linearizzazione intorno all'equilibrio

La sollecitazione non è conservativa, quindi si deve utilizzare la formula

$$A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0, \qquad \vec{x} := \frac{\vec{q} - \vec{q}_e}{\varepsilon}$$

dove

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|_{\vec{q}_e}, \quad B_{ij} = -\left.\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\right|_{\vec{q}_e} = 0, \quad C_{ij} = -\left.\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right|_{\vec{q}_e}$$

Quindi,

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}s_e^2 + \frac{Ml^2}{3+\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m^3 g^2 3}{16 b^2} + \frac{Ml^2}{3+\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

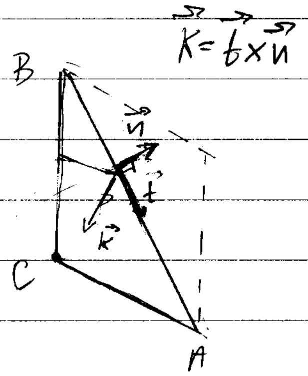
$$C = -\begin{bmatrix} -b & 0 \\ \frac{F}{2} & -c \end{bmatrix}$$

Dunque,

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{3m^3 g^2}{16 b^2} + \frac{Ml^2}{3+\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ -\frac{F}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + b x_1 = 0 \\ \left(\frac{3m^3 g^2}{16 b^2} + \frac{Ml^2}{3+\sqrt{3}}\right)\ddot{x}_2 - \frac{F}{2}x_1 + c x_2 = 0 \end{cases}$$

6) Reazioni dinamiche nel punto P.



Dall' eq. di Newton su (m, P)

$$\vec{\phi}_P = -\vec{F}_P + m\vec{a}_P$$

$$\vec{F}_P = -mg\vec{e}_z - bs\vec{t} + F\vec{e}_\varphi$$

$$= -mg\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\vec{t}+\vec{n}\right) - bs\vec{t} - F\vec{K} = \left(\frac{mg\sqrt{3}}{2} - bs\right)\vec{t} - \frac{mg}{2}\vec{n} - F\vec{K}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(Cor)}$$

$$\vec{a}_P^{(rel)} = \ddot{s}\,\vec{t}$$

$$\vec{a}_P^{(tr)} = \cancel{\vec{a}_C} + \dot{\vec{\omega}}\times(P-C) - |\vec{\omega}|^2 (P-C)_\perp$$

$$= \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z\times\left(s\vec{t} + \cancel{\sqrt{3}a\vec{e}_z}\right) - \dot{\varphi}^2\frac{s}{2}\vec{\imath}$$

$$= s\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z\times\vec{t} - \dot{\varphi}^2\frac{s}{4}\left(\vec{t}+\sqrt{3}\vec{n}\right)$$

$$= s\ddot{\varphi}\frac{1}{2}\left(-\cancel{\sqrt{3}\vec{t}}+\vec{n}\right)\times\vec{t} - \frac{s}{4}\dot{\varphi}^2\left(\vec{t}+\sqrt{3}\vec{n}\right)$$

$$= -\frac{s}{4}\dot{\varphi}^2\left(\vec{t}+\sqrt{3}\vec{n}\right) - \frac{s\ddot{\varphi}}{2}\vec{K}$$

$$\vec{a}_P^{(Cor)} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{(rel)} = 2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times\dot{s}\vec{t} = 2\dot{s}\dot{\varphi}\left(-\frac{1}{2}\vec{K}\right)$$

Dunque

$$\vec{a}_P = \left(\ddot{s} - \frac{s}{4}\dot{\varphi}^2\right)\vec{t} - \sqrt{3}\frac{s}{4}\dot{\varphi}^2\vec{n} - \frac{1}{2}\left(s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi}\right)\vec{K}$$

Allora,

$$\vec{\phi}_P = \cancel{\left(-\frac{mg\sqrt{3}}{2} + hs\right)\vec{t}} + \frac{mg}{2}\vec{n} + F\vec{K} +$$

$$+\, m\cancel{\left(\ddot{s} - \frac{s}{4}\dot{\varphi}^2\right)\vec{t}} - \sqrt{3}\,\frac{ms}{4}\,\dot{\varphi}^2\vec{n} - \frac{m}{2}\left(s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi}\right)\vec{K}$$

$$\overset{(11.1)}{=} m\left(\frac{g}{2} - \frac{\sqrt{3}\,s}{4}\dot{\varphi}^2\right)\vec{n} + \left(F - m\left(\frac{s}{2}\ddot{\varphi} + \dot{s}\dot{\varphi}\right)\right)\vec{K}$$