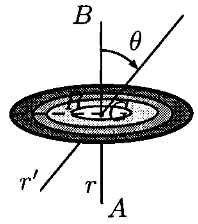
# Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

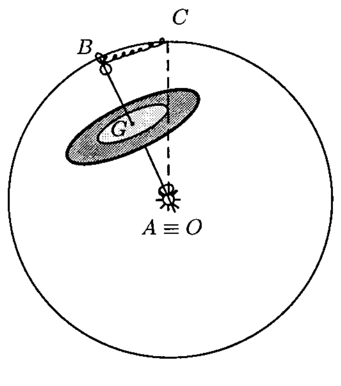
Trieste, 23 gennaio 2017. (G. Tondo)

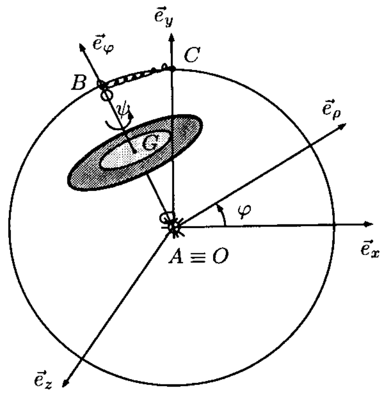
Si consideri il corpo rigido della figura, costituito da un disco *non* omogeneo di massa $m$, raggio $R$, densità superficiale $\sigma$ dipendente dalla sola coordinata radiale $\rho$ dei punti del disco: $\sigma(\rho) = a\,\rho$, $a > 0$. Sul disco è saldato un asse $r$ ortogonale, di massa *trascurabile*, passante per il centro $G$ e di estremi $A$, $B$, con $\overline{AG} = \overline{BG} = d$.

1) Si calcoli il momento d'inerzia del rigido rispetto ad un asse $r'$ passante per $G$ e inclinato di un angolo $\theta$ rispetto all'asse $r$.




Il rigido suddetto è vincolato, come in figura, con l'asse $r$ passante per una cerniera sferica *bucata* fissata al punto $O$ e con un anellino scorrevole su una guida circolare fissa di centro $O$ e raggio $AB$, anellino saldato in $B$ ad una cerniera sferica. Sul rigido agisce il peso proprio, la forza di richiamo di una molla lineare, di costante elastica $c$, fissata nei punti $B$ e $C$, la forza di richiamo di una molla angolare, di costante elastica $b$, fissata nel punto $A$.




**STATICA**

Detto $\varphi$ l'angolo tra il versore $\vec{e}_y$ e l'asse r e $\psi$ l'angolo di rotazione del disco, misurato a partire dalla posizione in cui la molla angolare è a riposo, determinare, in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{4cd}$:

2) le configurazioni di equilibrio del modello $\vec{q}_e = (\varphi_e, \psi_e)$ e la loro stabilità;

3) le reazioni vincolari esterne sull'asse $r$ in $A$ e in $B$, all'equilibrio.

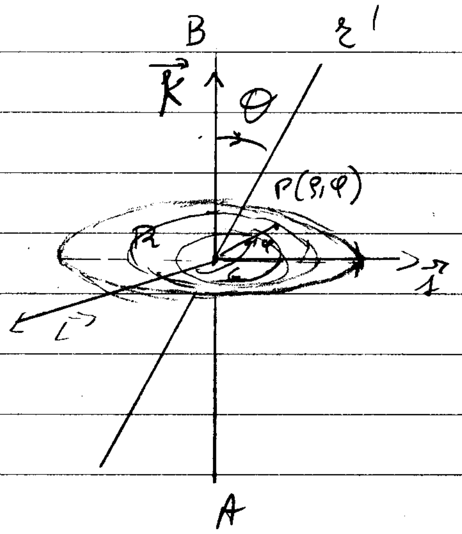
**DINAMICA**

4) Scrivere le equazione differenziali pure di moto;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) calcolare la reazione vincolare esterne sui punti $A$ e $B$, durante il moto.

Tema del 23/01/2017




1) Utilizziamo la formula

$$I_{z'} = vers(z') \cdot I_G\big(vers(z')\big) \qquad G \in z'$$

Calcoliamo la matrice di $I_G$, rispetto alla terna $\mathcal{B}_3=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ con $\vec{j} \in$ piano$(z,z')$ e $\vec{k} \parallel z$. Quindi

$$I_G^{\mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{bmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad C = 2A$$

$$vers(z') = \sin\theta\, \vec{j} + \cos\theta\, \vec{k}$$

Dunque

$$I_{z'} = [0, \sin\theta, \cos\theta] \begin{bmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = [0, \sin\theta, \cos\theta] \begin{bmatrix} 0 \\ A\sin\theta \\ C\cos\theta \end{bmatrix} =$$

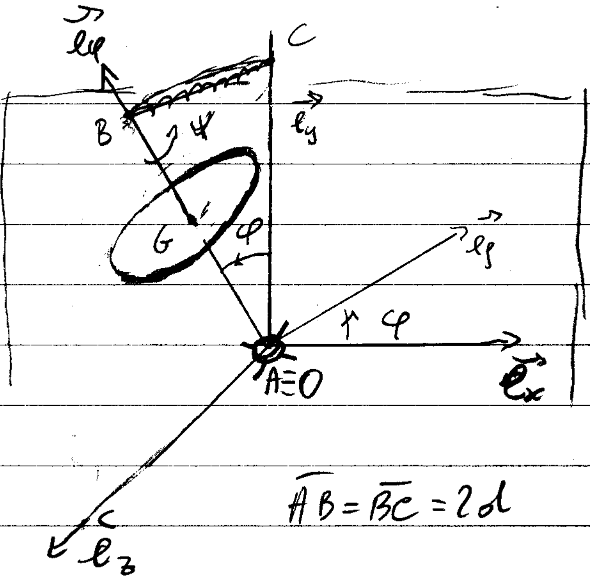
$$= A\sin^2\theta + C\cos^2\theta = A\left(\sin^2\theta + 2\cos^2\theta\right) = A\left(1+\cos^2\theta\right)$$

<u>Calcolo di $C$</u>

$$C = \int_{\mathcal{R}} \sigma(P)\left(x_P^2+y_P^2\right) d\mathcal{R} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R a\rho\, \rho^2 \rho\, d\rho\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho = 2\pi a \frac{R^5}{5}$$

$$m = \int_{\mathcal{R}} \sigma(P)\, d\mathcal{R} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R a\rho\,\rho\, d\rho\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = 2\pi a \frac{R^3}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{3m}{2\pi R^3}}$$

Quindi, $C = \frac{3}{5} m R^2$, $A = \frac{3}{10} m R^2$, $I_{z'} = \frac{3}{10} m R^2 \left(1+\cos^2\theta\right)$




$\overline{AB} = \overline{BC} = 2d$

## Cinematica

Il rigido $\mathcal{R}$ ha 2 g.l, come si può dedurre dal metodo dei congelamenti successivi. Infatti, l'asse AB, fisso in O può ruotare nel piano $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ intorno all'asse $\vec{e}_z$. Congelando tale rotazione, rimane libera la rotazione del disco intorno al suo asse. Congelando anche queste, il rigido è congelato. Si può arrivare alle stesse conclusione con il metodo del bilancio. Il rigido ha un punto fisso, A, quindi 3 g.l. Il vincolo di appoggio di B nel piano $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ è un vincolo semplice. Quindi

$$l = g - v = 3 - 1 = 2 \text{. Coord. libere} = \{(\varphi, \psi)\}$$

$0 \le \varphi < 2\pi$
$0 \le \psi < 2\pi$

Consideremo le seguenti basi:

$\mathcal{B}_{fix} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ : base "fissa"

$\mathcal{B}_i = (\vec{e}_\xi, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ : base "intermedia", $\vec{\omega}^{(tr)} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$

$\mathcal{B}_s = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : base "solidale" a $\mathcal{R}$, $\vec{\omega}^{(rel)} = \dot{\psi}\,\vec{e}_\varphi$

$$\begin{cases} \vec{e}_\xi = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\,\vec{e}_\xi - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\,\vec{e}_\xi + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$\dot{\vec{e}}_\xi = \vec{\omega}^{(tr)} \times \vec{e}_\xi = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\xi = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$ , $\dot{\vec{e}}_\varphi = \vec{\omega}^{(tr)} \times \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\xi$

$$B-O = 2d\,\vec{e}_\varphi = 2d(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)$$

$$G-O = d\,\vec{e}_\varphi = d(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)$$

$$B-C = (B-O)+(O-C) = 2d\,\vec{e}_\varphi - 2d\,\vec{e}_y = 2d(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_y)$$

$$\stackrel{!}{=} 2d(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y - \vec{e}_y) = 2d\left[-\sin\varphi\,\vec{e}_x + (1-\cos\varphi)\,\vec{e}_y\right]$$

$$\vec{\omega} = \dot\varphi\,\vec{e}_z + \dot\psi\,\vec{e}_\varphi = \dot\varphi\,\vec{e}_z + \dot\psi(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)$$

<u>Statica</u>

2) La sollecitazione, dovuta al peso proprio e alle molle, è conservativa. Quindi, ammette energia potenziale

$$V(\varphi,\psi) = -m\vec{g}\cdot(G-O) + \frac{1}{2}c\,\overline{BC}^2 + \frac{1}{2}b\psi^2$$

$$\overline{BC}^2 = (B-C)\cdot(B-C) = 4d^2(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_y)\cdot(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_y) = 4d^2(2 - 2\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_y) =$$
$$= 8d^2(1-\cos\varphi)$$

Dunque,

$$V = mg\,\vec{e}_y\cdot d\,\vec{e}_\varphi + \frac{1}{2}c\,8d^2(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}b\psi^2$$

Trascurando il termine costante, si trova

$$V(\varphi,\psi) = mgd\cos\varphi - 4cd^2\cos\varphi + \frac{1}{2}b\psi^2 = d(mg-4cd)\cos\varphi + \frac{1}{2}b\psi^2$$

Cerchiamo i punti stazionari della funzione $V$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = -d(mg-4ed)\sin\varphi = -Q_\varphi \\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial \psi} = b\psi = -Q_\psi \end{cases}$$

Dunque, i punti stazionari $\Leftrightarrow$ equilibri del modello sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (mg-4ed)\sin\varphi = 0 \\ b\psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \quad \text{vel} \quad \begin{cases} mg = 4ed \\ \psi = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\vec{q_e}^{(1)} = (0,0)$$

$$\vec{q_e}^{(2)} = (\pi, 0)$$

$$\vec{q_e}^{(3)} = (\varphi_e, 0) \quad \forall\, \varphi_e \in [0, 2\pi[ \quad \text{se } \lambda = \frac{mg}{4ed} = 1$$

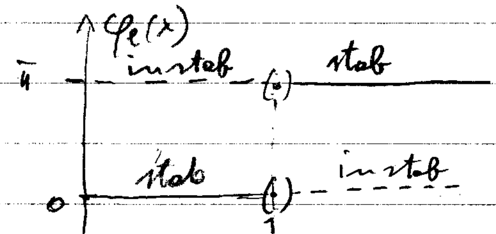
Stabilità

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -d(mg-4ed)\cos\varphi, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \psi \partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = b$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} -4ed^2(\lambda-1)\cos\varphi & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathcal{H}_{11} &= 4ed^2(1-\lambda)\cos\varphi \\ \det \mathcal{H} &= b\, \mathcal{H}_{11} \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{11}\big|_{\vec{q_e}^{(1)}} > 0 \quad \text{se } \lambda < 1$$

$$\mathcal{H}_{11}\big|_{\vec{q_e}^{(2)}} > 0 \quad \text{se } \lambda > 1$$




N.B. Se $\lambda = 1$, la stabilità di $\vec{q_e}^{(3)}$ si può stabilire considerando i termini dello sviluppo in serie di ordine superiore al secondo.

3) Reazioni esterne in A e B, all'equilibrio.

Poiché i vincoli sono non dissipativi, $\mathcal{L}^{(v)} = \{\vec{\Phi}_A = \phi_\rho \vec{e}_\rho + \phi_z \vec{e}_z,\ \vec{\Psi}_B = \psi_\varphi \vec{e}_\varphi + \psi_z \vec{e}_z\}$

Sappiamo che nelle configurazioni di equilibrio le ECS sono necessariamente soddisfatte.

Quindi, all'equilibrio

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,eff)} + \vec{\Phi}_A + \vec{\Psi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_O^{(est,eff)} + (B-O) \times \vec{\Psi}_B = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{R}^{(est,eff)} = m\vec{g} + \vec{F}_B^{(molla)} = -mg\vec{e}_y - c(B-C) = -mg\vec{e}_y - 2cd(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_y)$$
$$\overset{!}{=} (2cd - mg)\vec{e}_y - 2cd\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{M}_O^{(est,eff)} = (G-O) \times m\vec{g} + (B-O) \times \vec{F}_B^{(molla)} - b\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$
$$= d\,\vec{e}_\varphi \times -mg\vec{e}_y + 2d\,\vec{e}_\varphi \times [-2cd(\vec{e}_\varphi - \vec{e}_y)] - b\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$
$$= mgd \sin\varphi\,\vec{e}_z - b\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + 4cd^2 \sin\varphi\,\vec{e}_z$$

$$(B-O) \times \vec{\Psi}_B = 2d\,\vec{e}_\varphi \times (\psi_\varphi \vec{e}_\varphi + \psi_z \vec{e}_z) = 2d\,\psi_z\,\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = 2d\,\psi_z\,\vec{e}_\rho$$

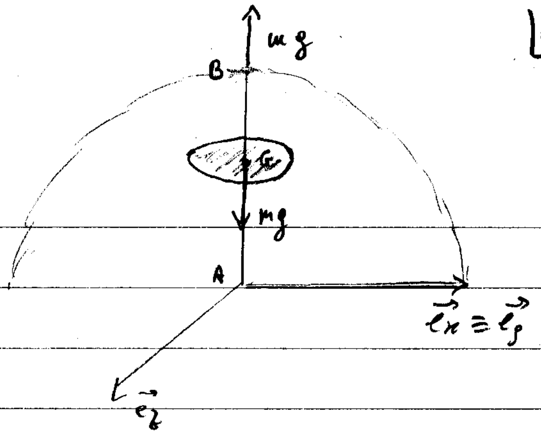
Nella configurazione di eq. $\vec{q}_e^{(1)}$:

$$\vec{R}^{(est,eff)}\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -mg\,\vec{e}_y - 2cd\,\cancel{(\vec{e}_y - \vec{e}_y)} = -mg\,\vec{e}_y$$

$$\vec{M}^{(est,eff)}\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = \vec{0}$$

$$(B-O) \times \vec{\Psi}_B\Big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = 2d\,\psi_z\,\vec{e}_x$$

$$\begin{cases} -(mg)\,\vec{e}_y + \phi_\rho \vec{e}_x + \phi_z \vec{e}_z + \psi_\varphi \vec{e}_y + \psi_z \vec{e}_z = \vec{0} \overset{\psi_z = 0}{\Rightarrow} \phi_\rho = \phi_z = 0 \text{ e } \psi_\varphi = mg \\ 2d\,\psi_z\,\vec{e}_x = \vec{0} \qquad \psi_z = 0 \end{cases}$$




Dunque, in $\vec{q}_e^{(1)} = (0,0)$

$$\vec{\Psi}_B = mg\,\vec{e}_y \quad , \quad \vec{\phi}_A = \vec{0}$$

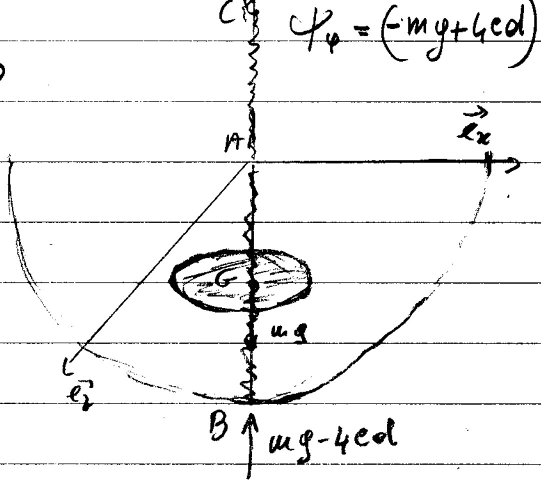
Analogamente, in $\vec{q}_e^{(2)}$

$$\vec{R}^{(est,att)}\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = -mg\,\vec{e}_y - 2cd\left(-\vec{e}_y - \vec{e}_y\right) = -(mg-4cd)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{M}^{(est,att)}_{O|\vec{q}_e^{(2)}} = \vec{0}$$

$$(B-O)\times\vec{\Psi}_B\Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = -2d\,\Psi_z\,\vec{e}_x$$

$$\begin{cases} (-mg+4cd)\,\vec{e}_y - \phi_\xi\,\vec{e}_x + \phi_z\,\vec{e}_z - \Psi_\varphi\,\vec{e}_y + \Psi_z\,\vec{e}_z = 0 \xRightarrow{\Psi_z=0} \phi_\xi = \phi_z = 0 \text{ et } \Psi_\varphi = (-mg+4cd) \\ -2d\,\Psi_z\,\vec{e}_x = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \Psi_z = 0 \end{cases}$$




Dunque, in $\vec{q}_e^{(2)} = (\pi,0)$

$$\vec{\Psi}_B = (mg-4cd)\,\vec{e}_y \quad , \quad \vec{\phi}_A = \vec{0}$$

Nella config. di eq. $\vec{q}_e^{(3)} = (\varphi_e, 0)$, $\lambda = 1$,

$$\begin{cases} (2cd-mg)\sin\varphi\,\vec{e}_\xi + \left[(2cd-mg)\cos\varphi - 2cd\right]\vec{e}_\varphi + \phi_\xi\,\vec{e}_\xi + \phi_z\,\vec{e}_z + \Psi_\varphi\,\vec{e}_\varphi + \cancel{\Psi_z\,\vec{e}_z} = \vec{0} \\ (mgd - \cancel{4cd^2})\sin\varphi\,\vec{e}_z + 2d\,\Psi_z\,\vec{e}_\xi = \vec{0} \quad \Rightarrow \Psi_z = 0 \end{cases}$$

Dalla I ECS,

$\vec{e}_\xi$: $\phi_\xi = (mg-2cd)\sin\varphi_e$

$\vec{e}_\varphi$: $\Psi_\varphi = (mg-2cd)\cos\varphi + 2cd$

$\vec{e}_z$: $\phi_z = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{\phi}_A\Big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = 2cd\sin\varphi_e\,\vec{e}_\xi$$

$$\vec{\Psi}_B\Big|_{\vec{q}_e^{(3)}} = 2cd\,(1+\cos\varphi_e)\,\vec{e}_\varphi$$

## Dinamica

4) Equazioni differenziali pure di moto.

Scriviamo le eq. di Lagrange del modello. A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot I_A(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot \vec{L}_A$$

Per il teo di Huygens-Steiner:

$$I_A(\vec{\omega}) = I_G(\vec{\omega}) + m(G-A) \times \left(\vec{\omega} \times (G-A)\right)$$

$$= I_G(\vec{\omega}) + m d\, \vec{e}_\varphi \times \left[\left(\dot{\varphi}\, \vec{e}_z + \cancel{\dot{\psi}\, \vec{e}_\varphi}\right) \times d\, \vec{e}_\varphi\right]$$

$$= I_G(\vec{\omega}) + m d^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi \times \left(\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi\right)$$

$$= I_G(\vec{\omega}) + m d^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

Quindi, poiché $\vec{e}_z$ ed $\vec{e}_\varphi$ sono API(G), pur non essendo solidali al disco,

$$\vec{L}_A = I_A(\vec{\omega}) = I_G\left(\dot{\varphi}\, \vec{e}_z + \dot{\psi}\, \vec{e}_\varphi\right) + m d^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

$$= \dot{\varphi}\, I_G(\vec{e}_z) + \dot{\psi}\, I_G(\vec{e}_\varphi) + m d^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

$$= \dot{\varphi}\left(A + m d^2\right) \vec{e}_z + C \dot{\psi}\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{L}_A = \left(\dot{\varphi}\, \vec{e}_z + \dot{\psi}\, \vec{e}_\varphi\right) \cdot \left[\dot{\varphi}\left(A + m d^2\right) \vec{e}_z + C \dot{\psi}\, \vec{e}_\varphi\right] =$$

$$= \left(A + m d^2\right) \dot{\varphi}^2 + C \dot{\psi}^2$$

Dunque,

$$K = \frac{1}{2}\left[\left(A + md^2\right)\dot{\varphi}^2 + C\dot{\psi}^2\right] = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{3}{10}R^2 + d^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{5}R^2\dot{\psi}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\dot{\varphi}, \dot{\psi}]\, m\begin{bmatrix} \frac{3}{10}R^2 + d^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}R^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

<u>Eq. di Lagrange</u>

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m\left(\frac{3}{10}R^2 + d^2\right)\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\left(\frac{3}{10}R^2 + d^2\right)\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}} = m\frac{3}{5}R^2\dot{\psi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}}\right) = \frac{3}{5}mR^2\ddot{\psi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \psi} = 0$$

$$\begin{cases} m\left(\frac{3}{10}R^2 + d^2\right)\ddot{\varphi} = d(mg - 4cd)\sin\varphi \\ m\frac{3}{5}R^2\ddot{\psi} = -b\psi \end{cases}$$

5) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

Poiché la sollecitazione è conservativa, le EL linearizzate intorno a $\vec{q_e}$ si riducono a

$$A(\vec{q_e})\ddot{\vec{x}} + \mathcal{H}_V(\vec{q_e})\vec{x} = 0 \qquad \vec{x} = \frac{\vec{q} - \vec{q_e}}{\varepsilon} \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Allora,

$$m\begin{bmatrix} \frac{3}{10}R^2 + d^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}R^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4ed^2(1-\lambda)\cos\varphi_e & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m\left(\frac{3}{10}R^2 + d^2\right)\ddot{x}_1 + 4ed^2(1-\lambda)\cos\varphi_e\, x_1 = 0 \\ m\frac{3}{5}R^2\ddot{x}_2 + b\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Intorno a $\vec{q_e}^{(1)}$:

$$\begin{cases} m\left(\frac{3}{10}R^2 + d^2\right)\ddot{\varphi} + 4ed^2(1-\lambda)\varphi = 0 \\ m\frac{3}{5}\ddot{\psi} + b\psi = 0 \end{cases}$$

Intorno a $\vec{q_e}^{(2)}$

$$\begin{cases} m\left(\frac{3}{10}R^2 + d^2\right)\ddot{\varphi} - 4ed^2(1-\lambda)\varphi = -4ed^2(1-\lambda)\bar{u} \\ m\frac{3}{5}\ddot{\psi} + b\psi = 0 \end{cases}$$

Intorno a $\vec{q}_e^{(2)} = (\varphi_e, 0)$, $(\lambda = 1)$

$$\begin{cases} m\left(\frac{3}{10}R^2 + d^2\right)\ddot{x}_1 = 0 \\ m\,\frac{3}{5}R^2\,\ddot{x}_2 + b\,x_2 = 0 \end{cases}$$

6) Reazioni vincolari esterne

Scriviamo le ECD

$$\begin{cases} \vec{R}^{(ext,att)} + \vec{\phi}_A' + \vec{\psi}_B' = m\,\vec{a}_G \\ \vec{M}_O^{(ext,att)} + (B-O)\times\vec{\psi}_B' = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{a}_G = \frac{d^2}{dt}(G-O) = \frac{d}{dt}\left(d\,\vec{e}_\varphi\right) = \frac{d}{dt}\left(-d\,\dot\varphi\,\vec{e}_\rho\right) = -d\left(\ddot\varphi\,\vec{e}_\rho + \dot\varphi\,\dot{\vec{e}}_\rho\right)$$

$$= -d\left[\ddot\varphi\,\vec{e}_\rho + \dot\varphi\left(\dot\varphi\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho\right)\right] = -d\left(\ddot\varphi\,\vec{e}_\rho + \dot\varphi^2\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(A+md^2\right)\dot\varphi\,\vec{e}_z + \ell\,\dot\psi\,\vec{e}_\varphi\right] =$$

$$= \left(A+md^2\right)\ddot\varphi\,\vec{e}_z + \ell\left(\ddot\psi\,\vec{e}_\varphi + \dot\psi\,\dot{\vec{e}}_\varphi\right)$$

$$= \left(A+md^2\right)\ddot\varphi\,\vec{e}_z + \ell\,\ddot\psi\,\vec{e}_\varphi - \ell\,\dot\psi\,\dot\varphi\,\vec{e}_\rho$$

Dalla II ECD,

$$\vec{\psi}_B' = \frac{B-O}{|B-O|^2}\times\left(\vec{M}_O^{(ext,att)} - \frac{d\vec{L}_O}{dt}\right) + \psi_\varphi'\,\vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{\cancel{2}\,\cancel{d}}{\cancel{2}4\,d^{\cancel{2}}}\,\vec{e}_\varphi\times\Big[-b\psi\,\cancel{\vec{e}_\varphi} + d\left(mg-4\ell d\right)\sin\varphi\,\vec{e}_z$$

$$-\left(A+md^2\right)\ddot\varphi\,\vec{e}_z - \ell\,\ddot\psi\,\cancel{\vec{e}_\varphi} + \ell\,\dot\psi\,\dot\varphi\,\vec{e}_\rho\Big] + \psi_\varphi'\,\vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{1}{2d}\,\vec{e}_\varphi\times\left[\ell\,\dot\psi\,\dot\varphi\,\vec{e}_\rho + \left(d\left(mg-4\ell d\right)\sin\varphi - \left(A+md^2\right)\ddot\varphi\right)\vec{e}_z\right]$$

$$= \frac{1}{2d}\Big[\left(-\ell\,\dot\psi\,\dot\varphi\right)\vec{e}_z + \underbrace{\left(d\left(mg-4\ell d\right)\sin\varphi - \left(A+md^2\right)\ddot\varphi\right)}_{EL_\varphi}\vec{e}_\rho\Big] + \psi_\varphi'\,\vec{e}_\varphi$$

Quindi,

$$\vec{\Psi}'_B = \Psi'_\varphi \vec{e}_\varphi - \left(\frac{\ell}{2d}\dot{\varphi}\dot{\psi}\right)\vec{e}_z$$

Sostituendo nella I ECD, si trova

$$\vec{\Phi}'_A = (mg - 2cd)\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \left[(mg-2cd)\cos\varphi + 2cd\right]\vec{e}_\varphi - \Psi'_\varphi \vec{e}_\varphi + \frac{\ell}{2d}\dot{\varphi}\dot{\psi}\vec{e}_z$$

$$-md\left(\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi\right) =$$

$$= \left((mg-2cd)\sin\varphi - md\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\rho + \left[(mg-2cd)\cos\varphi + 2cd - md\,\dot{\varphi}^2 - \Psi'_\varphi\right]\vec{e}_\varphi$$

$$+ \frac{\ell}{2d}\dot{\varphi}\dot{\psi}\,\vec{e}_z, \qquad \text{Dunque,}$$

$$\vec{\Phi}'_A = \left[(mg-2cd)\sin\varphi - md\ddot{\varphi}\right]\vec{e}_\rho + \frac{\ell}{2d}\dot{\varphi}\dot{\psi}\,\vec{e}_z,$$

e

$$\Psi'_\varphi = (mg-2cd)\cos\varphi + 2cd - md\dot{\varphi}^2$$

Quindi

$$\vec{\Psi}'_B = \left[(mg-2cd)\cos\varphi + 2cd - md\dot{\varphi}^2\right]\vec{e}_\varphi - \frac{\ell}{2d}\dot{\varphi}\dot{\psi}\,\vec{e}_z$$